





МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДФУ)  
**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

СОГЛАСОВАНО  
Руководитель ОП  
 Сущенко А.А.  
(подпись) (ФИО)

УТВЕРЖДАЮ  
Директор департамента  
 Сущенко А.А.  
(подпись) (ФИО)  
«25» марта 2022 г.



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
Функциональный анализ  
**Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика**  
(Программы бакалавриата «Прикладная математика и компьютерные науки»)  
**Форма подготовки очная**

курс 4 семестр 6  
лекции 18 час.  
практические занятия 0 час.  
лабораторные работы 36 час.  
в том числе с использованием МАО лек.18 / пр. 0 / лаб. 36 час.  
всего часов аудиторной нагрузки 54 час.  
в том числе с использованием МАО 66 час.  
самостоятельная работа 63 час.  
в том числе на подготовку к экзамену 27 час.  
контрольные работы (количество) 2  
курсовая работа / курсовой проект - / -  
зачет не предусмотрен  
экзамен 6 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта по направлению подготовки 01.03.02 **Прикладная математика и информатика** утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. № 9 с изменениями и дополнениями.

Рабочая программа обсуждена на заседании департамента, математического и компьютерного моделирования протокол № 6 от «25» марта 2022 г.

Директор департамента



Сущенко А.А.

Составители:



Сущенко А.А.

Владивосток  
2022

**Оборотная сторона титульного листа РПД**

**I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры/департамента:**

Протокол от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий *кафедрой* \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры/департамента:**

Протокол от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий *кафедрой* \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**III. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры/департамента:**

Протокол от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий *кафедрой* \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**IV. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры/департамента:**

Протокол от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий *кафедрой* \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

## I. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Цель: Приобретение у обучающихся необходимого для осуществления профессиональной деятельности уровня компетенций.

Задачи:

- освоение методов решения задач современной прикладной математики с использованием методов комплексного анализа;
- фундаментальное изучение предусмотренных программой определений, теорем, их доказательств, связей между ними, составляющих теоретический фундамент для описания и разработки математических моделей объектов различной природы;
- научно-исследовательская работа в области информационных технологий и математического моделирования, связанной с выбором необходимых методов и алгоритмов, используемых в различных технических системах;
- изучение новых научных результатов, научной литературы и непрерывному профессиональному самосовершенствованию.

Для успешного изучения дисциплины «Функциональный анализ» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям

Профессиональные компетенции выпускников и индикаторы их достижения:

Тип задач	Код и наименование профессиональной компетенции (результат освоения)	Код и наименование индикатора достижения компетенции
Научно-исследовательский	ПК-1 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим	ПК-1.1 обрабатывает и анализирует данные современных научных исследований, структурирует информацию и формулирует выводы
		ПК-1.2 самостоятельно и в составе научного коллектива ставит естественнонаучные задачи на основе знания постановок научно-исследовательских задач

Тип задач	Код и наименование профессиональной компетенции (результат освоения)	Код и наименование индикатора достижения компетенции
	научным исследованиям	ПК-1.3 использует методы проведения научных исследований и постановки математически корректных научно-исследовательских задач

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Функциональный анализ» применяются следующие методы активного/интерактивного обучения:

- презентации с использованием доски, книг, видео, слайдов, компьютеров и т.п., с последующим обсуждением материалов,
- обратная связь с формированием общего представления об уровне владения знаниями студентов, актуальными для занятия,
- разминка с вопросами, ориентированными на выстраивание логической цепочки из полученных знаний (конструирование нового знания),
- работа в малых группах (дает всем студентам возможность участвовать в работе, практиковать навыки сотрудничества, межличностного общения).

## II. ТРУДОЁМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДОВ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачётных единиц (144 академических часов).

(1 зачетная единица соответствует 36 академическим часам)

Видами учебных занятий и работы обучающегося по дисциплине могут являться:

Обозначение	Виды учебных занятий и работы обучающегося
Лек	Лекции
Лаб	Лабораторные работы
Пр	Практические занятия
ОК	Онлайн курс
СР	Самостоятельная работа обучающегося в период теоретического обучения
Контроль	Самостоятельная работа обучающегося и контактная работа обучающегося с преподавателем в период промежуточной аттестации

Структура дисциплины:

Форма обучения – очная.

№	Наименование раздела дисциплины	Семестр	Количество часов по видам учебных занятий и работы обучающегося					Формы промежуточной аттестации
			Лек	Лаб	Пр	ОК	СР	
1	Раздел 1. Метрические пространства	6	2	6				экзамен
2	Раздел 2. Нормированные пространства		2	6				
3	Раздел 3. Гильбертовы пространства		2	6				
4	Раздел 4. Линейные операторы		4	6			63	
5	Раздел 5. Линейные функционалы и сопряженные пространства		4	6			27	
6	Раздел 6. Уравнения с компактными операторами		4	6				
Итого:			18	36	0	0	63	27

### III. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

#### Лекционные занятия (18 час.)

##### Раздел 1. Метрические пространства.

**Тема 1.** Метрика. Примеры пространств. Множества в метрических пространствах. Сходимость и полнота.

**Тема 2.** Принцип сжимающих отображений и его приложения.

**Тема 3.** Компактность в метрических пространствах.

##### Раздел 2. Нормированные пространства.

**Тема 1.** Норма. Примеры пространств. Подпространства. Ряды.

**Тема 2.** Вложения пространств. Компактность в ЛНП.

##### Раздел 3. Гильбертовы пространства.

**Тема 1.** Скалярные произведения. Проекции. Теорема об ортогональном разложении.

**Тема 2.** Ортогональные системы

##### Раздел 4. Линейные операторы.

**Тема 1.** Пространство линейных непрерывных операторов

**Тема 2.** Обратимость операторов. Замкнутые операторы. Приложения.

**Тема 3.** Принципы линейного анализа: теорема Банаха о гомеоморфизме, теорема о замкнутом графике, принцип открытых отображений.

#### **Раздел 5. Линейные функционалы и сопряженные пространства.**

**Тема 1.** Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха.

**Тема 2.** Сопряженные пространства. Слабая сходимость.

**Тема 3.** Сопряженные операторы.

#### **Раздел 6. Уравнения с компактными операторами.**

**Тема 1.** Спектр оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

**Тема 2.** Уравнения Фредгольма

### **IV. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ Лабораторные работы (36 часов)**

#### **1. Пространства**

1. Аксиомы метрики. Примеры метрических пространств. Сходимость. Шары в метрических пространствах.
2. Сходимость последовательностей в конкретных метрических пространствах. Полные метрические пространства. Примеры пополнений.
3. Непрерывность отображений в конкретных метрических пространствах.
4. Принцип сжимающих отображений. Применение к системам алгебраических уравнений и к интегральным уравнениям.
5. Компактность в метрических пространствах. Исследование конкретных систем функций.
6. Гильбертово пространство. Процесс ортогонализации и построение систем ортогональных многочленов.
7. Контрольная работа

#### **2. Операторы**

1. Примеры ограниченных операторов. Норма оператора. Вычисление нормы оператора. Равномерная и сильная сходимости последовательностей операторов.
2. Исследование обратимости операторов.

3. Линейные ограниченные функционалы. Исследование слабой сходимости последовательностей элементов и функционалов.
4. Вполне непрерывные операторы. Примеры вполне непрерывных операторов.
5. Сопряженные и гильбертово сопряженные операторы. Примеры.
6. Исследование уравнений с вполне непрерывными операторами.
7. Контрольная работа

### Практические работы (0 часов)

## V. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ И ОНЛАЙН КУРСА ПРИ НАЛИЧИИ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине включает в себя:

- план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;
- методические рекомендации по выполнению заданий для самостоятельной работы;
- требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;
- критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

### План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Метрические и нормированные пространства	1 час	
2	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Метрические и нормированные пространства	1 час	
3	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Метрические и нормированные пространства	1 час	
4	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Метрические и нормированные пространства	1 час	Контрольная работа
5	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Гильбертовы пространства	1 час	
6	Подготовка к контрольной работе: Гильбертовы пространства	8 часов	
7	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Гильбертовы пространства	1 час	
8	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Гильбертовы пространства	1 час	Контрольная работа
9	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Линейные операторы	1 час	

10	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Линейные операторы	1 час	
11	Подготовка к контрольной работе: Линейные операторы	8 часов	
12	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Линейные операторы	1 час	Контрольная работа
13	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Уравнения с компактным оператором	1 час	
14	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Уравнения с компактным оператором	1 час	
15	Подготовка к контрольной работе: Уравнения с компактным оператором	8 часов	Контрольная работа
16	Подготовка к экзамену	36 часов	Экзамен

### **Рекомендации по самостоятельной работе студентов**

Самостоятельная работа студентов состоит из подготовки к практическим работам, работы над рекомендованной литературой и текстами лекций в процессе изучения теоретического материала.

Темы заданий для самостоятельной работы представлены в плане-графике выполнения самостоятельной работы по дисциплине.

При подготовке к практическим занятиям необходимо сначала прочитать основные понятия и теоремы по теме. При выполнении задания нужно сначала понять, что требуется в задаче, какой теоретический материал нужно использовать, наметить план решения задачи. Рекомендуется использовать методические указания и материалы по курсу, текст лекций, а также электронные пособия, имеющиеся на сервере Школы естественных наук.

При подготовке к контрольным работам дополнительно к изучению конспектов лекций необходимо пользоваться учебниками. Вместо «заучивания» материала важно добиться понимания изучаемых тем дисциплины. Отвечая на поставленный вопрос, предварительно следует понять, что требуется от Вас в данном случае, какой теоретический материал нужно использовать.

При подготовке к экзамену нужно освоить теорию: разобрать определения всех понятий и численных методов, рассмотреть примеры и самостоятельно решить несколько типовых задач из каждой темы. При решении задач всегда необходимо комментировать свои действия и не забывать о содержательной интерпретации.

### **Требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы**

Результатом самостоятельной работы являются отчеты по контрольным работам.

В процессе подготовки отчетов у студентов развиваются навыки составления письменной документации и систематизации имеющихся знаний. При составлении отчетов рекомендуется придерживаться следующей структуры:



- Постановка задачи;
- Метод решения;
- Спецификация используемых функций и типов данных;
- Описание решения конкретных заданий.

### **Критерии оценки выполнения самостоятельной работы**

Отчет должен полностью удовлетворять условию задачи. В случае некачественно выполненных отчетов (не соответствующих заявленным требованиям) результирующий балл за работу может быть снижен. Студент должен продемонстрировать отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией. Наличие всех отчетов является допуском к экзамену.

На экзамене оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

## **VI. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА**

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства - наименование		
			текущий контроль	промежуточная аттестация	
1	Разделы 1–3. Метрические пространства. Нормированные пространства. Гильбертовы пространства	ПК-1	Знает	Контрольная работа (ПР-6)	Защита контрольной работы
	Умеет				
	Владеет				
2	Разделы 4–6 Линейные операторы. Линейные функционалы. Уравнения с компактными операторами	ПК-1	Знает	Контрольная работа (ПР-6)	Защита контрольной работы
	Умеет				
	Владеет				
	Умеет				
			Владеет		

## VII. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### Основная литература

1. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения, СПб: Лань, 2010 г. - 160 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=42](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=42)
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 1, СПб: Лань, 2012 г. - 608 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=407](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=407)
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 2, СПб: Лань, 2012 г. - 800 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=408](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=408)
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 3, СПб: Лань, 2012 г. - 656 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=409](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=409)
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Физматлит, 2010 г. - 572 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2206](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206)
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, СПб: Лань, 2013 г. - 432 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=30198](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=30198)
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М: МЦНМО, 2012 г. – 341 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=56392](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=56392)
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М: Физматлит, 2015 г. – 208 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=59554](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59554)

9. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М: Физматлит, 2010 г. – 404 с.  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=59551](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59551)
10. Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П. Сборник задач по функциональному анализу, СПб: Лань, 2012 г. - 192 с.  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=3175](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3175)
11. Гантмахер Ф.Р Теория матриц, М: Физматлит, 2010 г. - 560 с.  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2155](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2155)

**Дополнительная литература**  
*(печатные и электронные издания)*

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
4. Вайнберг М.М. Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979.
5. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
7. Люстерник Л.А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
9. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
10. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
11. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.
12. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа, СПб: Лань, 2009 г. - 272 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=245](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=245)
13. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика, М: Физматлит, 2005 г. – 296 с.  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=59277](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59277)
14. Садовничий В. А. Теория операторов. 5-е изд. Дрофа, 2004. 384 стр.
15. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. 2-е изд., перераб. и доп. Москва "Наука", 1988. 400 стр.

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети**  
**«Интернет»**

<http://libgen.io/> - книги

<http://sci-hub.io/> - статьи

<http://www.twirpx.com/> - книги и методические указания

<http://window.edu.ru/> - методические указания

<http://alexandr4784.narod.ru/> - книги

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>

<http://eqworld.ipmnet.ru/en/library/mathematics.htm>

Ссылки на электронные библиотеки:

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/otherlibs.htm>

<http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/> - методические указания

[http://ph4s.ru/books\\_mat.html](http://ph4s.ru/books_mat.html)

### **Перечень информационных технологий и программного обеспечения**

1. Операционная система Windows.
2. Microsoft Office.
3. Компилятор с СИ++.
4. Пакет прикладных программ Mathematica.
5. Пакет прикладных программ Matlab.
6. Пакет прикладных программ Mathcad.
7. Пакет прикладных программ Maple.

## **VIII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

**1. Рекомендации по планированию и организации времени, необходимого для изучения дисциплины.** Рекомендуется следующим образом организовать время, необходимое для изучения дисциплины:

Изучение конспекта лекции в тот же день после лекции – 10-15 минут.

Повторение лекции за день перед следующей лекцией – 10-15 минут.

Изучение теоретического материала по учебнику и конспекту – 1 час в неделю.

Подготовка к практическому занятию и решение домашнего задания – 1 час.

Тогда общие затраты времени на освоение курса «Комплексный и Функциональный анализ» студентами составят около 2,5 часа в неделю.

**2. Описание последовательности действий студента («сценарий изучения дисциплины»).** При изучении курса следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его

понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий:

1. После окончания учебных занятий для закрепления материала просмотреть и обдумать текст лекции, прослушанной сегодня, разобрать рассмотренные примеры (10-15 минут).

2. При подготовке к лекции следующего дня повторить текст предыдущей лекции, подумать о том, какая может быть следующая тема (10-15 минут).

3. В течение недели выбрать время для работы со специальной литературой в библиотеке и для занятий на компьютере (по 1 часу).

4. При подготовке к практическим занятиям следующего дня необходимо сначала прочитать основные понятия и теоремы по теме домашнего задания. При выполнении задания нужно сначала понять, что требуется в задаче, какой теоретический материал нужно использовать, наметить план решения задачи. Если это не дало результатов, и Вы сделали задачу «по образцу» аудиторной задачи, или из методического пособия, нужно после решения такой задачи обдумать ход решения и опробовать решить аналогичную задачу самостоятельно.

**3. Рекомендации по использованию материалов учебно-методического комплекса.** Рекомендуется использовать методические указания и материалы по курсу «Функциональный анализ», текст лекций, а также электронные пособия, имеющиеся на сервере Школы естественных наук.

**4. Рекомендации по работе с литературой.** Теоретический материал курса становится более понятным, когда дополнительно к прослушиванию лекций изучаются и книги. Полезно использовать несколько учебников, однако легче освоить курс, придерживаясь одного учебника и конспекта. Рекомендуется, кроме «заучивания» материала, добиться понимания изучаемой темы дисциплины. Кроме того, очень полезно мысленно задать себе и попробовать ответить на следующие вопросы: о чем эта глава, какие новые понятия в ней введены.

**5. Советы по подготовке к экзамену.** Дополнительно к изучению конспектов лекций необходимо пользоваться учебниками. Вместо «заучивания» материала важно добиться понимания изучаемых тем дисциплины. При подготовке к экзамену нужно освоить теорию: разобрать определения всех понятий и численных методов, рассмотреть примеры и самостоятельно решить несколько типовых задач из каждой темы. При решении задач всегда необходимо комментировать свои действия и не забывать о содержательной интерпретации.

**6. Указания по организации работы с контрольно-измерительными материалами.** При подготовке к контрольной работе или экзамену необходимо сначала прочитать теорию по каждой теме. Отвечая на поставленный вопрос, предварительно следует понять, что требуется от Вас в данном случае, какой теоретический материал

## **IX. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Мультимедийная аудитория (мультимедийный проектор Optima EX542I – 1 шт.; аудио усилитель QVC RMX 850–1 шт.; колонки – 1 шт.; ноутбук; ИБП – 1 шт.; настенный экран; микрофон – 1 шт.) для проведения лекций в формате презентаций.

2. Учебный компьютерный класс и Мультимедийный класс с выходом в сеть Интернет.

## **X. ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

Для дисциплины «Функциональный анализ» используются следующие оценочные средства:

В соответствии с требованиями ФГОС ВО для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений планируемым результатам обучения по дисциплине созданы фонды оценочных средств:

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины (результаты по разделам)	Код контролируемой компетенции/планируемые результаты обучения	Наименование оценочного средства
1	Теоретическая часть	<b>ПК-1</b> Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	Реферат, доклад, презентация экзамен
2	Практическая часть.	<b>ПК-1</b> Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	контрольные работы экзамен

**Текущая аттестация** студентов по дисциплине «Функциональный анализ» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ в форме контрольных работ по оцениванию фактических результатов обучения студентов. Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
- степень усвоения теоретических знаний;
- уровень овладения практическими умениями и навыками;

- результаты самостоятельной работы.

**Промежуточная аттестация** студентов по дисциплине «Функциональный анализ» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ в виде экзамена в устной форме (ответы на вопросы экзаменационных билетов).

#### **Критерии выставления оценки студенту на экзамене по дисциплине «Функциональный анализ»**

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по дисциплине.

#### **Вопросы для подготовки к экзамену**

1. Неравенства Гельдера и Минковского. Примеры метрических пространств.
2. Сходимость. Непрерывность метрики.
3. Открытые и замкнутые множества и их свойства.
4. Принцип сжимающих отображений.
5. Приложение принципа сжимающих отображений к задаче Коши.

6. Компактность в метрических пространствах. Теоремы о непрерывных функциях на компактных множествах.
7. Критерий компактности Хаусдорфа.
8. Критерий Арцела относительной компакности множеств в пространстве непрерывных функций.
9. Линейные нормированные пространства. Непрерывность алгебраических операций и нормы. Примеры ЛНП. Ряды в банаховых пространствах.
10. Свойства скалярного произведения. Ортогональность. Процесс ортогонализации.
11. Теорема об ортогональном разложении.
12. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма оператора.
13. Теорема о продолжении оператора по непрерывности.
14. Обратимые операторы. Общий критерий обратимости.
15. Теорема об обратимости оператора, близкого к единичному.
16. Теорема об обратимости оператора, близкого к обратимому.
17. Приложение теорем об обратимости к интегральным уравнениям.
18. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала.
19. Следствия теоремы Хана – Банаха.
20. Общий вид функционалов в конкретных пространствах. Теорема Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве.
21. Сопряженный оператор и теорема о его ограниченности.
22. Слабая сходимость последовательности элементов. Единственность предела. Связь со сходимостью по норме.
23. Компактные операторы. Компактность сопряженного оператора.
24. Теория Фредгольма.
25. Теорема Гильберта – Шмидта.

### Типовые задания для контрольных работ

#### Задание 1.

1. Определите, является ли данное множество замкнутым, открытым в пространстве  $C[a,b], CL[a,b]$ . Найдите его замыкание, внутренние и граничные точки в каждом указанном пространстве.

1.1.  $M = \{x(t) \mid x(a)x(b) = 0\}$ ;

1.2.  $M = \{x(t) \mid x(a) = x(b)\}$ ;

1.3.  $M = \{x(t) \mid |x(t)| < 1, \forall t \in [a,b]\}$ ;



$$1.4. M = \{x(t) \mid x(a) > 0\};$$

$$1.5. M = \{x(t) \in C^1[a,b] \mid x(a) = 0\};$$

2. Для данного множества  $M$  выяснить, является ли множество  $B = M \cap l_p$  открытым, замкнутым, ограниченным в  $l_p$ .

$$2.1. M = \left\{x: x_k \leq \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots\right\}, \quad p = 1;$$

$$2.2. M = \{x: 0 < x_k < 1, k = 1, 2, \dots\}, \quad p = \infty;$$

$$2.3. M = \{x: x_k > 0, k = 1, 2, \dots\}, \quad p = 2;$$

$$2.4. M = \left\{x: \sum_{k=1}^{\infty} x_k < 1, k = 1, 2, \dots\right\}, \quad p = 2;$$

$$2.5. M = \{x: x_1 = \dots = x_n = 0, k = 1, 2, \dots\}, \quad p = 2;$$

3. Является ли последовательность  $x_n$  последовательностью Коши в пространстве  $E$ . Найти ее предел, если он существует.

$$3.1. x_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n}, & t \notin Q, \\ 0, & t \in Q. \end{cases}, \quad E = L_2[0,1];$$

$$3.2. x_n(t) = \begin{cases} \sin nt, & t \in Q \cap [-1,2], \\ \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^3}}, & t \in [-1,2] \setminus Q. \end{cases}, \quad E = L_1[-1,2];$$

$$3.3. x_n(t) = \begin{cases} ne^{nt}, & t \in K, \\ \frac{t^3}{n}, & t \in [0,1] \setminus K. \end{cases}, \quad E = L_{3/2}[0,1];$$

$$3.4. x_n(t) = \begin{cases} nt, & t \in [-2,0] \cap Q, \\ ne^{nt}, & t \in [-2,0] \setminus Q. \end{cases}, \quad E = L_4[-2,0];$$

$$3.5. x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^4}}, & t \in [-1,1] \setminus K, \\ \cos(n+t), & t \in [-1,1] \cap K. \end{cases}, \quad E = L_2[-1,1];$$

### Задание 2.

1. Определите, являются ли две нормы  $\|x\|_1$  и  $\|x\|_2$  эквивалентными в нормированном пространстве  $C^2[a,b]$  два раза непрерывно-дифференцируемых на отрезке  $[a,b]$  функций.

$$1.1. \|x\|_{C^2[a,b]} \text{ и } \|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]};$$

$$1.2. \|x\|_{C^2[a,b]} \text{ и } \|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

$$1.3. \|x\|_{C^2[a,b]} \text{ и } \|x\| = \left( \int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

$$1.4. \|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]} \text{ и } \|x\|_2 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

$$1.5. \|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]} \text{ и } \|x\|_2 = \left( \int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

2. Проверить, сходится ли ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  в нормированном пространстве  $E$ .

$$2.1. x_k(t) = \frac{4^k t^k - t^{2k}}{4^{2k}}, \quad E = C[0,1];$$

$$2.2. x_k(t) = \frac{t^k}{k} - \frac{t^{k+1}}{k+1}, \quad E = C[0,1];$$

$$2.3. x_k(t) = \frac{1}{t^2 + n^2}, \quad E = C[0,1];$$

$$2.4. x_k(t) = t^2 e^{-kt}, \quad E = C[0,1];$$

$$2.5. x_k(t) = \frac{t}{1 + n^4 t^2}, \quad E = C[0,1];$$

3. В гильбертовом пространстве  $L_2$  найти проекцию элемента  $x_0$  на подпространство  $L$ .

$$3.1. x_0 = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^k}, \dots \right), \quad L = \left\{ \alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}; x_k = \frac{1}{5^k}, y_k = \frac{1}{6^k} \right\};$$

$$3.2. x_0 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots \right), \quad L = \left\{ \alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}; x = (1, 1, 0, \dots), y = (1, 0, 0, \dots) \right\};$$

$$3.3. x_0 = (0, 1, 1, 2, 0, \dots), \quad L = \left\{ x : \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = 0 \quad x_2 = 0 \right\};$$

$$3.4. x_0 = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^k}, \dots \right), \quad L = \left\{ \alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}; x = (1, 0, 1, 0, \dots), y = (1, 1, 1, 0, \dots) \right\}$$

$$3.5. x_0 = \left( 1, 0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, \dots \right), \quad L = \left\{ x : \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0 \quad x_1 - x_3 = 0 \right\};$$

### Задание 3.

1. Являются ли относительно компактными следующие множества в пространстве  $C[0,1]$ ?

$$1.1. M = \{t^n : n \in \mathbb{N}\};$$

$$1.2. M = \{\sin(nt) : n \in \mathbb{N}\};$$

$$1.3. M = \{\sin(n+t) : n \in \mathbb{N}\};$$

$$1.4. M = \{\cos(n+t): n \in N\};$$

$$1.5. M = \{\sin(\alpha t): \alpha \in (0,1)\};$$

2. . Является ли множество  $M$  относительно компактным в пространстве  $l_p$ ?  
В случае положительного ответа построить для множества конечную  $\varepsilon$ -сеть для  $\varepsilon=0,1$ .

$$2.1. M = \left\{x: |x_k| < \frac{1}{k}, k \in N\right\}, \quad p = 2;$$

$$2.2. M = \left\{x: |x_k| < \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, k \in N\right\}, \quad p = 1;$$

$$2.3. M = \left\{x: |x_k| < \frac{1}{k^2}, k \in N\right\}, \quad p = 1;$$

$$2.4. M = \left\{x: |x_k| < \frac{1}{\sqrt[5]{k^2}}, k \in N\right\}, \quad p = 1;$$

$$2.5. M = \left\{x: |x_1| = 1, |x_{2k}| < \frac{1}{2^k}, |x_{2k+1}| < \frac{1}{3^{2k}}, k \in N\right\}, \quad p = 1;$$

3. Доказать, что интегральный оператор с вырожденным ядром является линейным и ограниченным оператором, если  $A: C[a, b] \rightarrow C[\alpha, \beta]$ . Вычислить норму оператора.

$$3.1. A: C[-1,1] \rightarrow C[0,1], \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 s(1+t)x(s)ds;$$

$$3.2. A: C[-2,2] \rightarrow C[3,5], \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 (ts + s^2 t^2)x(s)ds;$$

$$3.3. A: C[0,1] \rightarrow C[-1,2], \quad Ax(t) = \int_0^{1/3} (1+t^2 + s)x(s)ds;$$

$$3.4. A: C[-1,2] \rightarrow C[-2,1], \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 (1+t)s^3 x(s)ds;$$

$$3.5. A: C[-2,1] \rightarrow C[1,3], \quad Ax(t) = \int_{-2}^1 te^{t+s} sx(s)ds;$$

#### Задание4.

1. Вычислить норму оператора  $A$ , действующего из  $X$  в  $Y$ .

$$1.1. X = L_3[0,1], \quad Y = L_{3/2}[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 s(1+t)x(s)ds;$$

$$1.2. \quad X = L_4[-1,1], \quad Y = L_{5/2}[-1,2], \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 s^2 t^3 x(s) ds;$$

$$1.3. \quad X = l_6, \quad Y = l_6, \quad Ax = \left( 0, \frac{x_1}{\sqrt{3}}, \frac{x_2}{\sqrt{4}}, \dots, \frac{x_k}{\sqrt{k+2}}, \dots \right);$$

$$1.4. \quad X = l_5, \quad Y = l_5, \quad Ax = \left( \frac{x_1}{\sqrt{5}}, \frac{x_2}{\sqrt{5^2}}, \dots, \frac{x_k}{\sqrt{5^k}}, \dots \right);$$

$$1.5. \quad X = L_3[0,1], \quad Y = C[-1,1], \quad Ax(t) = \int_0^{1/2} t s^2 x\left(s^{3/2}\right) ds;$$

2. Найти сопряженный оператор  $A^*$  к оператору  $A: l_2 \rightarrow l_2$ , действующему по следующим формулам. Будет ли  $A$  само сопряженным?

$$2.1. \quad Ax = (x_2, x_3, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

$$2.2. \quad Ax = (0, x_1, x_2, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

$$2.3. \quad Ax = (0, 0, \alpha_1 x_1, \dots), \quad \alpha_i \in C, \quad i = 1, 2, \dots, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

$$2.4. \quad Ax = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

$$2.5. \quad Ax = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, x_1, \dots \right), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

3. Являются ли вполне непрерывными следующие операторы как отображение  $E$  в  $E$ ?

$$3.1. \quad E = C[0,1], \quad Ax(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2 x(1);$$

$$3.2. \quad E = C[0,1], \quad Ax(t) = x(t^2);$$

$$3.3. \quad E = C[-1,1], \quad Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t));$$

$$3.4. \quad E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^t tx(\tau) d\tau;$$

$$3.5. \quad E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} tx(s) ds;$$

4. Найти все решения следующих интегральных уравнений при всех значениях  $\lambda \neq 0$  и при всех значениях параметров  $a, b, c$ , входящих в свободный член этих уравнений.

$$4.1. \quad x(t) - \lambda \int_0^\pi \cos(t+s)x(s) ds = a \sin t + b;$$

$$4.2. \quad x(t) - \lambda \int_{-1}^1 (ts+1)x(s) ds = at^2 + bt + c;$$

$$4.3. \quad x(t) - \lambda \int_{-1}^1 (t^2 s + s^2 t) x(s) ds = at + bt^3;$$

$$4.4. \quad x(t) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (ts + s^2 t^2) x(s) ds = at + b;$$

$$4.5. \quad x(t) - \lambda \int_{-1}^1 \left( 5(ts)^{1/3} + 7(st)^{2/3} \right) x(s) ds = at + bt^{1/3};$$

### **Критерии оценивания контрольной работы**

Результатом работы является отчет.

В процессе подготовки отчетов у студентов развиваются навыки составления письменной документации и систематизации имеющихся знаний. При составлении отчетов рекомендуется придерживаться следующей структуры:

- Постановка задачи;
- Метод решения;
- Спецификация используемых функций и типов данных;
- Описание решения конкретных заданий.

Отчет по работе должен полностью удовлетворять условию задачи. В случае некачественно выполненных отчетов (не соответствующих заявленным требованиям) результирующий балл за работу может быть снижен. Студент должен продемонстрировать отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией.