



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

«СОГЛАСОВАНО»
Руководитель ОП

 Пак Т.В.

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор департамента Математического
и компьютерного моделирования

 Сущенко А.А.
(Школа)

« 25 » марта 2022г.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Функциональный анализ

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

(Математические и компьютерные технологии)

Форма подготовки очная

курс 3 семестр б
лекции 18 час.
практические занятия 00 час.
лабораторные работы 36 час.
в том числе с использованием МАО лек. час./ пр. час./ лаб. час
всего часов аудиторной нагрузки 54 час.
самостоятельная работа 54 час.
в том числе на подготовку к экзамену 36 час.
контрольные работы (количество) не предусмотрены
курсовая работа / курсовой проект не предусмотрены
зачет не предусмотрены
экзамен б семестр.

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 года № 9 (с изменениями и дополнениями)

Рабочая программа обсуждена на заседании департамента математического и компьютерного моделирования, протокол № 6 от «05» марта 2022 г.

Директор департамента математического и компьютерного моделирования Сущенко А.А.

Составители: д.ф.-м.н., профессор Чеботарев А.Ю.

Владивосток
2022

Оборотная сторона титульного листа РПД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании департамента:

Протокол от « ____ » _____ 20__ г. № ____

Директор департамента _____
(подпись) (И.О. Фамилия)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании департамента:

Протокол от « ____ » _____ 20__ г. № ____

Директор департамента _____
(подпись) (И.О. Фамилия)

III. Рабочая программа пересмотрена на заседании департамента:

Протокол от « ____ » _____ 20__ г. № ____

Директор департамента _____
(подпись) (И.О. Фамилия)

IV. Рабочая программа пересмотрена на заседании департамента:

Протокол от « ____ » _____ 20__ г. № ____

Директор департамента _____
(подпись) (И.О. Фамилия)

I. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Цель: Приобретение у обучающихся необходимого для осуществления профессиональной деятельности уровня компетенций.

Задачи:

- освоение методов решения задач современной прикладной математики с использованием методов комплексного анализа;
- фундаментальное изучение предусмотренных программой определений, теорем, их доказательств, связей между ними, составляющих теоретический фундамент для описания и разработки математических моделей объектов различной природы;
- научно-исследовательская работа в области информационных технологий и математического моделирования, связанной с выбором необходимых методов и алгоритмов, используемых в различных технических системах;
- изучение новых научных результатов, научной литературы и непрерывному профессиональному самосовершенствованию.

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие профессиональные компетенции:

Тип задач	Код и наименование профессиональной компетенции (результат освоения)	Код и наименование индикатора достижения компетенции
научно-исследовательский	ПК-1 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	ПК-1.1 обрабатывает и анализирует данные современных научных исследований, структурирует информацию и формулирует выводы
		ПК-1.2 самостоятельно и в составе научного коллектива ставит естественнонаучные задачи на основе знания постановок научно-исследовательских задач
		ПК-1.3 использует методы проведения научных исследований и постановки математически корректных научно-исследовательских задач

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Функциональный анализ» применяются следующие методы активного/интерактивного обучения:

- презентации с использованием доски, книг, видео, слайдов, компьютеров и т.п., с последующим обсуждением материалов,
- обратная связь с формированием общего представления об уровне владения знаниями студентов, актуальными для занятия,

- разминка с вопросами, ориентированными на выстраивание логической цепочки из полученных знаний (конструирование нового знания),
- работа в малых группах (дает всем студентам возможность участвовать в работе, практиковать навыки сотрудничества, межличностного общения).

II. ТРУДОЁМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДОВ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачётные единицы (144 академических часа).

(1 зачетная единица соответствует 36 академическим часам)

Видами учебных занятий и работы обучающегося по дисциплине могут являться:

Обозначение	Виды учебных занятий и работы обучающегося
Лек	Лекции
Лаб	Лабораторные работы
Пр	Практические занятия
ОК	Онлайн курс
СР	Самостоятельная работа обучающегося в период теоретического обучения
Контроль	Самостоятельная работа обучающегося и контактная работа обучающегося с преподавателем в период промежуточной аттестации

Структура дисциплины:

Форма обучения – очная.

№	Наименование раздела дисциплины	Семестр	Количество часов по видам учебных занятий и работы обучающегося						Формы промежуточной аттестации
			Лек	Лаб	Пр	ОК	СР	Контроль	
1	Раздел 1. Метрические пространства	6	2	6					экзамен
2	Раздел 2. Нормированные пространства		2	6					
3	Раздел 3. Гильбертовы пространства		2	6					
4	Раздел 4. Линейные операторы		4	6			54	36	
5	Раздел 5. Линейные функционалы и сопряженные пространства		4	6					
6	Раздел 6. Уравнения с компактными операторами		4	6					
Итого:			18	36			54		

III. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

6 семестр.

Раздел 1. Метрические пространства.

Тема 1. Метрика. Примеры пространств. Множества в метрических пространствах. Сходимость и полнота.

Тема 2. Принцип сжимающих отображений и его приложения.

Тема 3. Компактность в метрических пространствах.

Раздел 2. Нормированные пространства.

Тема 1. Норма. Примеры пространств. Подпространства. Ряды.

Тема 2. Вложения пространств. Компактность в ЛНП.

Раздел 3. Гильбертовы пространства.

Тема 1. Скалярные произведения. Проекции. Теорема об ортогональном разложении.

Тема 2. Ортогональные системы

Раздел 4. Линейные операторы.

Тема 1. Пространство линейных непрерывных операторов

Тема 2. Обратимость операторов. Замкнутые операторы. Приложения.

Тема 3. Принципы линейного анализа: теорема Банаха о гомеоморфизме, теорема о замкнутом графике, принцип открытых отображений.

Раздел 5. Линейные функционалы и сопряженные пространства.

Тема 1. Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха.

Тема 2. Сопряженные пространства. Слабая сходимость.

Тема 3. Сопряженные операторы.

Раздел 6. Уравнения с компактными операторами.

Тема 1. Спектр оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

Тема 2. Уравнения Фредгольма

IV. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Пространства

1. Аксиомы метрики. Примеры метрических пространств. Сходимость. Шары в метрических пространствах.
2. Сходимость последовательностей в конкретных метрических пространствах. Полные метрические пространства. Примеры пополнений.

3. Непрерывность отображений в конкретных метрических пространствах.
4. Принцип сжимающих отображений. Применение к системам алгебраических уравнений и к интегральным уравнениям.
5. Компактность в метрических пространствах. Исследование конкретных систем функций.
6. Гильбертово пространство. Процесс ортогонализации и построение систем ортогональных многочленов.
7. Контрольная работа

2. Операторы

1. Примеры ограниченных операторов. Норма оператора. Вычисление нормы оператора. Равномерная и сильная сходимости последовательностей операторов.
2. Исследование обратимости операторов.
3. Линейные ограниченные функционалы. Исследование слабой сходимости последовательностей элементов и функционалов.
4. Вполне непрерывные операторы. Примеры вполне непрерывных операторов.
5. Сопряженные и гильбертово сопряженные операторы. Примеры.
6. Исследование уравнений с вполне непрерывными операторами.
7. Контрольная работа

V. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ (И ОНЛАЙН КУРСА ПРИ НАЛИЧИИ)

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине включает в себя:

- план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;
- методические рекомендации по выполнению заданий для самостоятельной работы;

- требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;
- критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

план-график выполнения самостоятельной работы

№ п/п	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Метрические и нормированные пространства	1 час	
2	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Метрические и нормированные пространства	1 час	
3	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Метрические и нормированные пространства	1 час	
4	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Метрические и нормированные пространства	1 час	Контрольная работа
5	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Гильбертовы пространства	1 час	
6	Подготовка к контрольной работе: Гильбертовы пространства	8 часов	
7	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Гильбертовы пространства	1 час	
8	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Гильбертовы пространства	1 час	Контрольная работа
9	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Линейные операторы	1 час	
10	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Линейные операторы	1 час	
11	Подготовка к контрольной работе: Линейные операторы	8 часов	
12	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Линейные операторы	1 час	Контрольная работа
13	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Уравнения с компактным оператором	1 час	
14	Работа над конспектом лекции, подготовка к контрольной работе: Уравнения с компактным оператором	1 час	
15	Подготовка к контрольной работе: Уравнения с компактным оператором	8 часов	Контрольная работа
16	Подготовка к экзамену	36 часов	Экзамен

Методические рекомендации по выполнению заданий для самостоятельной работы

Самостоятельная работа студентов состоит из подготовки к практическим работам, работы над рекомендованной литературой и текстами лекций в процессе изучения теоретического материала.

Темы заданий для самостоятельной работы представлены в плане-графике выполнения самостоятельной работы по дисциплине.

При подготовке к практическим занятиям необходимо сначала прочитать основные понятия и теоремы по теме. При выполнении задания нужно сначала понять, что требуется в задаче, какой теоретический материал нужно использовать, наметить план решения задачи. Рекомендуется использовать методические указания и материалы по курсу, текст лекций, а также электронные пособия, имеющиеся на сервере Школы естественных наук.

При подготовке к контрольным работам дополнительно к изучению конспектов лекций необходимо пользоваться учебниками. Вместо «заучивания» материала важно добиться понимания изучаемых тем дисциплины. Отвечая на поставленный вопрос, предварительно следует понять, что требуется от Вас в данном случае, какой теоретический материал нужно использовать.

При подготовке к экзамену нужно освоить теорию: разобрать определения всех понятий и численных методов, рассмотреть примеры и самостоятельно решить несколько типовых задач из каждой темы. При решении задач всегда необходимо комментировать свои действия и не забывать о содержательной интерпретации.

Требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы

Результатом самостоятельной работы являются отчеты по контрольным работам.

В процессе подготовки отчетов у студентов развиваются навыки составления письменной документации и систематизации имеющихся знаний. При составлении отчетов рекомендуется придерживаться следующей структуры:

- Постановка задачи;
- Метод решения;
- Спецификация используемых функций и типов данных;
- Описание решения конкретных заданий.

Критерии оценки выполнения самостоятельной работы

Отчет должен полностью удовлетворять условию задачи. В случае некачественно выполненных отчетов (не соответствующих заявленным требованиям) результирующий балл за работу может быть снижен. Студент должен продемонстрировать отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией. Наличие всех отчетов является допуском к экзамену.

На экзамене оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

VI. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства - наименование		
			текущий контроль	промежуточная аттестация	
1	Разделы 1–3. Метрические пространства. Нормированные пространства. Гильбертовы пространства	ПК-1	Знает	Контрольная работа (ПР-6)	Защита контрольной работы
			Умеет		
			Владеет		
2	Разделы 4–6 Линейные операторы. Линейные функционалы. Уравнения с компактными операторами	ПК-1	Знает	Контрольная работа (ПР-6)	Защита контрольной работы
			Умеет		
			Владеет		
			Умеет		
			Владеет		

VII. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

(электронные и печатные издания)

1. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения, СПб: Лань, 2010 г. - 160 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=42
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 1, СПб: Лань, 2012 г. - 608 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=407

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 2, СПб: Лань, 2012 г. - 800 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=408
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 3, СПб: Лань, 2012 г. - 656 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=409
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Физматлит, 2010 г. - 572 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, СПб: Лань, 2013 г. - 432 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=30198
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М: МЦНМО, 2012 г. – 341 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=56392
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М: Физматлит, 2015 г. – 208 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59554
9. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М: Физматлит, 2010 г. – 404 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59551
10. Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П. Сборник задач по функциональному анализу, СПб: Лань, 2012 г. - 192 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3175
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, М: Физматлит, 2010 г. - 560 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2155

Дополнительная литература
(печатные и электронные издания)

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
4. Вайнберг М.М. Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979.
5. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
7. Люстерник Л.А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
9. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
10. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
11. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.
12. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа, СПб: Лань, 2009 г. - 272 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=245
13. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика, М: Физматлит, 2005 г. - 296 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59277
14. Садовничий В. А. Теория операторов. 5-е изд. Дрофа, 2004. 384 стр.
15. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. 2-е изд., перераб. и доп. Москва "Наука", 1988. 400 стр.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

<http://libgen.io/> - книги

<http://sci-hub.io/> - статьи

<http://www.twirpx.com/> - книги и методические указания

<http://window.edu.ru/> - методические указания

<http://alexandr4784.narod.ru/> - книги

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>

<http://eqworld.ipmnet.ru/en/library/mathematics.htm>

Ссылки на электронные библиотеки:

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/otherlibs.htm>

<http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/> - методические указания

http://ph4s.ru/books_mat.html

Перечень информационных технологий и программного обеспечения

1. Операционная система Windows.
2. Microsoft Office.
3. Компилятор с СИ++.
4. Пакет прикладных программ Mathematica.
5. Пакет прикладных программ Matlab.
6. Пакет прикладных программ Mathcad.
7. Пакет прикладных программ Maple.

VIII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Рекомендации по планированию и организации времени, необходимого для изучения дисциплины. Рекомендуется следующим образом организовать время, необходимое для изучения дисциплины:

Изучение конспекта лекции в тот же день после лекции – 10-15 минут.

Повторение лекции за день перед следующей лекцией – 10-15 минут.

Изучение теоретического материала по учебнику и конспекту – 1 час в неделю.

Подготовка к практическому занятию и решение домашнего задания – 1 час.

Тогда общие затраты времени на освоение курса «Комплексный и Функциональный анализ» студентами составят около 2,5 часа в неделю.

2. Описание последовательности действий студента («сценарий изучения дисциплины»). При изучении курса следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий:

1. После окончания учебных занятий для закрепления материала просмотреть и обдумать текст лекции, прослушанной сегодня, разобрать рассмотренные примеры (10-15 минут).

2. При подготовке к лекции следующего дня повторить текст предыдущей лекции, подумать о том, какая может быть следующая тема (10-15 минут).

3. В течение недели выбрать время для работы со специальной литературой в библиотеке и для занятий на компьютере (по 1 часу).

4. При подготовке к практическим занятиям следующего дня необходимо сначала прочитать основные понятия и теоремы по теме домашнего задания. При выполнении задания нужно сначала понять, что требуется в задаче, какой теоретический материал нужно использовать, наметить план решения задачи. Если это не дало результатов, и Вы сделали задачу «по образцу» аудиторной задачи, или из методического пособия, нужно после решения такой задачи обдумать ход решения и опробовать решить аналогичную задачу самостоятельно.

3. Рекомендации по использованию материалов учебно-методического комплекса. Рекомендуется использовать методические указания и материалы по курсу «Функциональный анализ», текст лекций, а

также электронные пособия, имеющиеся на сервере Школы естественных наук.

4. Рекомендации по работе с литературой. Теоретический материал курса становится более понятным, когда дополнительно к прослушиванию лекций изучаются и книги. Полезно использовать несколько учебников, однако легче освоить курс, придерживаясь одного учебника и конспекта. Рекомендуется, кроме «заучивания» материала, добиться понимания изучаемой темы дисциплины. Кроме того, очень полезно мысленно задать себе и попробовать ответить на следующие вопросы: о чем эта глава, какие новые понятия в ней введены.

5. Советы по подготовке к экзамену. Дополнительно к изучению конспектов лекций необходимо пользоваться учебниками. Вместо «заучивания» материала важно добиться понимания изучаемых тем дисциплины. При подготовке к экзамену нужно освоить теорию: разобрать определения всех понятий и численных методов, рассмотреть примеры и самостоятельно решить несколько типовых задач из каждой темы. При решении задач всегда необходимо комментировать свои действия и не забывать о содержательной интерпретации.

6. Указания по организации работы с контрольно-измерительными материалами. При подготовке к контрольной работе или экзамену необходимо сначала прочитать теорию по каждой теме. Отвечая на поставленный вопрос, предварительно следует понять, что требуется от Вас в данном случае, какой теоретический материал нужно использовать, наметить общий план решения.

IX. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Мультимедийная аудитория (мультимедийный проектор Optima EX542I – 1 шт.; аудио усилитель QVC RMX 850–1 шт.; колонки – 1 шт.; ноутбук; ИБП – 1 шт.; настенный экран; микрофон – 1 шт.) для проведения лекций в формате презентаций.

2. Учебный компьютерный класс и Мультимедийный класс с выходом в сеть Интернет.

X. ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

В соответствии с требованиями ФГОС ВО для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений планируемым результатам обучения по дисциплине созданы фонды оценочных средств:

№ п/п	Контролируемые разделы	Код контролируемой компетенции/планируемые результаты обучения	Наименование оценочного средства
-------	------------------------	--	----------------------------------

	дисциплины (результаты по разделам)		
1	Теоретическая часть	ПК-1 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	Реферат, доклад, презентация экзамен
2	Практическая часть.	ПК-1 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	контрольные работы экзамен

Текущая аттестация студентов по дисциплине «Функциональный анализ» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ в форме контрольных работ по оцениванию фактических результатов обучения студентов. Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
- степень усвоения теоретических знаний;
- уровень овладения практическими умениями и навыками;
- результаты самостоятельной работы.

Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Функциональный анализ» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ в виде экзамена в устной форме (ответы на вопросы экзаменационных билетов).

Критерии выставления оценки студенту на экзамене по дисциплине «Функциональный анализ»

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической

последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по дисциплине.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Неравенства Гельдера и Минковского. Примеры метрических пространств.
2. Сходимость. Непрерывность метрики.
3. Открытые и замкнутые множества и их свойства.
4. Принцип сжимающих отображений.
5. Приложение принципа сжимающих отображений к задаче Коши.
6. Компактность в метрических пространствах. Теоремы о непрерывных функциях на компактных множествах.
7. Критерий компактности Хаусдорфа.
8. Критерий Арцела относительной компактности множеств в пространстве непрерывных функций.
9. Линейные нормированные пространства. Непрерывность алгебраических операций и нормы. Примеры ЛНП. Ряды в банаховых пространствах.
10. Свойства скалярного произведения. Ортогональность. Процесс ортогонализации.
11. Теорема об ортогональном разложении.
12. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма оператора.
13. Теорема о продолжении оператора по непрерывности.
14. Обратимые операторы. Общий критерий обратимости.
15. Теорема об обратимости оператора, близкого к единичному.
16. Теорема об обратимости оператора, близкого к обратимому.
17. Приложение теорем об обратимости к интегральным уравнениям.
18. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала.
19. Следствия теоремы Хана – Банаха.
20. Общий вид функционалов в конкретных пространствах. Теорема Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве.
21. Сопряженный оператор и теорема о его ограниченности.

22. Слабая сходимость последовательности элементов. Единственность предела. Связь со сходимостью по норме.
23. Компактные операторы. Компактность сопряженного оператора.
24. Теория Фредгольма.
25. Теорема Гильберта – Шмидта.

Типовые задания для контрольных работ

Задание 1.

1. Определите, является ли данное множество замкнутым, открытым в пространстве $C[a,b], CL[a,b]$. Найдите его замыкание, внутренние и граничные точки в каждом указанном пространстве.

- 1.1. $M = \{x(t) \mid x(a)x(b) = 0\}$;
- 1.2. $M = \{x(t) \mid x(a) = x(b)\}$;
- 1.3. $M = \{x(t) \mid |x(t)| < 1, \forall t \in [a,b]\}$;
- 1.4. $M = \{x(t) \mid x(a) > 0\}$;
- 1.5. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] \mid x(a) = 0\}$;

2. Для данного множества M выяснить, является ли множество $B = M \cap l_p$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p .

- 2.1. $M = \left\{x: x_k \leq \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots\right\}, p = 1$;
- 2.2. $M = \{x: 0 < x_k < 1, k = 1, 2, \dots\}, p = \infty$;
- 2.3. $M = \{x: x_k > 0, k = 1, 2, \dots\}, p = 2$;
- 2.4. $M = \left\{x: \sum_{k=1}^{\infty} x_k < 1, k = 1, 2, \dots\right\}, p = 2$;
- 2.5. $M = \{x: x_1 = \dots = x_n = 0, k = 1, 2, \dots\}, p = 2$;

3. Является ли последовательность x_n последовательностью Коши в пространстве E . Найти ее предел, если он существует.

- 3.1. $x_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n}, & t \notin Q, \\ 0, & t \in Q. \end{cases}, E = L_2[0,1]$;
- 3.2. $x_n(t) = \begin{cases} \sin nt, & t \in Q \cap [-1,2], \\ \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^3}}, & t \in [-1,2] \setminus Q. \end{cases}, E = L_1[-1,2]$;

$$3.3. \quad x_n(t) = \begin{cases} ne^{nt}, & t \in K, \\ \frac{t^3}{n}, & t \in [0,1] \setminus K. \end{cases}, \quad E = L_{3/2}[0,1];$$

$$3.4. \quad x_n(t) = \begin{cases} nt, & t \in [-2,0] \cap Q, \\ ne^{nt}, & t \in [-2,0] \setminus Q. \end{cases}, \quad E = L_4[-2,0];$$

$$3.5. \quad x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^4}}, & t \in [-1,1] \setminus K, \\ \cos(n+t), & t \in [-1,1] \cap K. \end{cases}, \quad E = L_2[-1,1];$$

Задание 2.

1. Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в нормированном пространстве $C^2[a,b]$ два раза непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций.

$$1.1. \quad \|x\|_{C^2[a,b]} \text{ и } \|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]};$$

$$1.2. \quad \|x\|_{C^2[a,b]} \text{ и } \|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

$$1.3. \quad \|x\|_{C^2[a,b]} \text{ и } \|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

$$1.4. \quad \|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]} \text{ и } \|x\|_2 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

$$1.5. \quad \|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]} \text{ и } \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

2. Проверить, сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в нормированном пространстве E .

$$2.1. \quad x_k(t) = \frac{4^k t^k - t^{2k}}{4^{2k}}, \quad E = C[0,1];$$

$$2.2. \quad x_k(t) = \frac{t^k}{k} - \frac{t^{k+1}}{k+1}, \quad E = C[0,1];$$

$$2.3. \quad x_k(t) = \frac{1}{t^2 + n^2}, \quad E = C[0,1];$$

$$2.4. \quad x_k(t) = t^2 e^{-kt}, \quad E = C[0,1];$$

$$2.5. \quad x_k(t) = \frac{t}{1 + n^4 t^2}, \quad E = C[0,1];$$

3. В гильбертовом пространстве L_2 найти проекцию элемента x_0 на подпространство L .

$$3.1. x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^k}, \dots \right), \quad L = \left\{ \alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}; x_k = \frac{1}{5^k}, y_k = \frac{1}{6^k} \right\};$$

$$3.2. x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots \right), \quad L = \left\{ \alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}; x = (1, 1, 0, \dots), y = (1, 0, 0, \dots) \right\};$$

$$3.3. x_0 = (0, 1, 1, 2, 0, \dots), \quad L = \left\{ x : \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = 0 \quad x_2 = 0 \right\};$$

$$3.4. \quad x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^k}, \dots \right),$$

$$L = \left\{ \alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}; x = (1, 0, 1, 0, \dots), y = (1, 1, 1, 0, \dots) \right\}$$

$$3.5. x_0 = \left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, \dots \right), \quad L = \left\{ x : \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0 \quad x_1 - x_3 = 0 \right\};$$

Задание 3.

1. Являются ли относительно компактными следующие множества в пространстве $C[0,1]$?

$$1.1. M = \{t^n : n \in \mathbb{N}\};$$

$$1.2. M = \{\sin(nt) : n \in \mathbb{N}\};$$

$$1.3. M = \{\sin(n+t) : n \in \mathbb{N}\};$$

$$1.4. M = \{\cos(n+t) : n \in \mathbb{N}\};$$

$$1.5. M = \{\sin(\alpha t) : \alpha \in (0,1)\};$$

2. Является ли множество M относительно компактным в пространстве l_p ? В случае положительного ответа построить для множества конечную ε -сеть для $\varepsilon=0,1$.

$$2.1. M = \left\{ x : |x_k| < \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad p = 2;$$

$$2.2. M = \left\{ x : |x_k| < \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad p = 1;$$

$$2.3. M = \left\{ x : |x_k| < \frac{1}{k^2}, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad p = 1;$$

$$2.4. M = \left\{ x : |x_k| < \frac{1}{\sqrt[5]{k^2}}, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad p = 1;$$

$$2.5. M = \left\{ x : |x_1| = 1, |x_{2k}| < \frac{1}{2^k}, |x_{2k+1}| < \frac{1}{3^{2k}}, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad p = 1;$$

3. Доказать, что интегральный оператор с вырожденным ядром является линейным и ограниченным оператором, если $A: C[a, b] \rightarrow C[\alpha, \beta]$. Вычислить норму оператора.

$$3.1. A: C[-1,1] \rightarrow C[0,1], \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 s(1+t)x(s)ds;$$

$$3.2. A: C[-2,2] \rightarrow C[3,5], \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 (ts + s^2 t^2)x(s)ds;$$

$$3.3. A: C[0,1] \rightarrow C[-1,2], \quad Ax(t) = \int_0^{1/3} (1+t^2 + s)x(s)ds;$$

$$3.4. A: C[-1,2] \rightarrow C[-2,1], \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 (1+t)s^3 x(s)ds;$$

$$3.5. A: C[-2,1] \rightarrow C[1,3], \quad Ax(t) = \int_{-2}^1 te^{t+s} sx(s)ds;$$

Задание 4.

1. Вычислить норму оператора A , действующего из X в Y .

$$1.1. X = L_3[0,1], \quad Y = L_{3/2}[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 s(1+t)x(s)ds;$$

$$1.2. X = L_4[-1,1], \quad Y = L_{5/2}[-1,2], \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 s^2 t^3 x(s)ds;$$

$$1.3. X = l_6, \quad Y = l_6, \quad Ax = \left(0, \frac{x_1}{\sqrt{3}}, \frac{x_2}{\sqrt{4}}, \dots, \frac{x_k}{\sqrt{k+2}}, \dots \right);$$

$$1.4. X = l_5, \quad Y = l_5, \quad Ax = \left(\frac{x_1}{\sqrt{5}}, \frac{x_2}{\sqrt{5^2}}, \dots, \frac{x_k}{\sqrt{5^k}}, \dots \right);$$

$$1.5. X = L_3[0,1], \quad Y = C[-1,1], \quad Ax(t) = \int_0^{1/2} ts^2 x\left(s^{3/2}\right)ds;$$

2. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A: l_2 \rightarrow l_2$, действующему по следующим формулам. Будет ли A само сопряженным?

$$2.1. Ax = (x_2, x_3, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

$$2.2. Ax = (0, x_1, x_2, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

$$2.3. Ax = (0, 0, \alpha_1 x_1, \dots), \quad \alpha_i \in C, \quad i = 1, 2, \dots, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

$$2.4. Ax = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

$$2.5. Ax = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, x_1, \dots \right), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

3. Являются ли вполне непрерывными следующие операторы как отображение E в E ?

$$3.1. \quad E = C[0,1], \quad Ax(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2x(1);$$

$$3.2. \quad E = C[0,1], \quad Ax(t) = x(t^2);$$

$$3.3. \quad E = C[-1,1], \quad Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t));$$

$$3.4. \quad E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^t tx(\tau)d\tau;$$

$$3.5. \quad E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} tx(s)ds;$$

4. Найти все решения следующих интегральных уравнений при всех значениях $\lambda \neq 0$ и при всех значениях параметров a, b, c , входящих в свободный член этих уравнений.

$$4.1. \quad x(t) - \lambda \int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds = a \sin t + b;$$

$$4.2. \quad x(t) - \lambda \int_{-1}^1 (ts+1)x(s)ds = at^2 + bt + c;$$

$$4.3. \quad x(t) - \lambda \int_{-1}^1 (t^2s + s^2t)x(s)ds = at + bt^3;$$

$$4.4. \quad x(t) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(ts + s^2t^2)x(s)ds = at + b;$$

$$4.5. \quad x(t) - \lambda \int_{-1}^1 \left(5(ts)^{1/3} + 7(st)^{2/3}\right)x(s)ds = at + bt^{1/3};$$

Критерии оценивания контрольной работы

Результатом работы является отчет.

В процессе подготовки отчетов у студентов развиваются навыки составления письменной документации и систематизации имеющихся знаний. При составлении отчетов рекомендуется придерживаться следующей структуры:

- Постановка задачи;
- Метод решения;
- Спецификация используемых функций и типов данных;
- Описание решения конкретных заданий.

Отчет по работе должен полностью удовлетворять условию задачи. В случае некачественно выполненных отчетов (не соответствующих заявленным требованиям) результирующий балл за работу может быть снижен. Студент должен продемонстрировать отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией.