МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

«СОГЛАСОВАНО»
Руководитель ОП

__________ Пак Т.В.

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор департамента Математического и компьютерного моделирования

__________ Сущенко А.А.

«25» марта 2022г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Дифференциальные уравнения в частных производных
Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика
(Математические и компьютерные технологии)
Форма подготовки очная

курс 3 семестр 5
лекции 16 час.
практические занятия 32 час.
лабораторные работы 00 час.
в том числе с использованием МАО лек. 10 /пр. 18 /лаб. 0 час.
всего часов аудиторной нагрузки 48 час.
самостоятельная работа 60 час.
в том числе на подготовку к экзамену 36 час.
контрольные работы (количество) 2
курсовая работа / курсовой проект не предусмотрены
экзамен 5 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 года № 9 (с изменениями и дополнениями)

Рабочая программа обсуждена на заседании департамента математического и компьютерного моделирования, протокол № 6 от «05» марта 2022 г.

Директор департамента математического и компьютерного моделирования Сущенко А.А.
Составитель: Чеботарев А. Ю.

Владивосток
2022

Оборотная сторона титульного листа РПД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании департамента:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Директор департамента ________________________ _____________

(подпись) (И.О. Фамилия)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании департамента:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Директор департамента ________________________ _____________

(подпись) (И.О. Фамилия)

III. Рабочая программа пересмотрена на заседании департамента:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Директор департамента ________________________ _____________

(подпись) (И.О. Фамилия)

IV. Рабочая программа пересмотрена на заседании департамента:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Директор департамента ________________________ _____________

(подпись) (И.О. Фамилия)

Аннотация дисциплины

Программа дисциплины «Дифференциальные уравнения» разработана для студентов бакалавриата 3 курса по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Сквозные цифровые технологии».

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» входит в базовую часть блока Б1 учебного плана (Б1.О.13.01).

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 часа.

Дисциплина реализуется на 3 курсе в 5 семестре.

Цель:

- В результате освоения данной дисциплины бакалавр приобретает знания, умения и навыки, обеспечивающие достижение целей основной образовательной программы «Математика и компьютерные науки».

Задачи:

- освоение методов решения прикладных задач современной вычислительной математики и математической физики: численные методы решения интегральных уравнений, вариационные и проекционные методы решения задач математической физики, методы расщепления;
- фундаментальное изучение вопросов построения, исследования и применения численных методов решения задач математической физики, составляющих теоретический фундамент для описания и разработка математических моделей объектов различной физической природы;
- научно-исследовательская работа в области информационных технологий и математической физики, связанной с выбором необходимых методов и алгоритмов, используемых в различных технических системах;
- изучение новых научных результатов, научной литературы и непрерывному профессиональному самосовершенствованию.

Общепрофессиональные компетенции выпускников и индикаторы их достижения:

Наименование категории (группы) общепрофессиональных компетенций	**Код и наименование общепрофессиональной компетенции**	**Код и наименование индикатора достижения общепрофессиональной компетенции**
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1 знает основы в области математических и (или) естественных наук. ОПК-1.2 умеет использовать их в профессиональной деятельности. ОПК-1.3 владеет навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

IV семестр

МОДУЛЬ 2. Уравнения высших порядков (20 / 0 час.)

Раздел 1. Классификация уравнений высших порядков (4 / 0 час.)

Тема 1. Уравнения высших порядков, интегрируемые в квадратурах (2 / 0 час.)

Перечень рассматриваемых вопросов:

1. уравнения вида F(x, $y^{(n)}$)=0;
2. уравнения вида F(..,$y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$)=0;
3. уравнения вида F($y^{(n-2)}$, $y^{(n)}$)=0;
4. задачи на нахождение особых решений.

Тема 2. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка (2 / 0 час.)

Перечень рассматриваемых вопросов:

1. уравнения, в которых нет аргумента;
2. уравнения, в которых нет функции;
3. однородные уравнения;
4. обобщенно - однородные уравнения;
5. уравнения с точной производной.

Раздел 2. Линейные уравнения n-го порядка (8 / 0 час.)

Тема 1. Линейные уравнения n-го порядка. Теоремы о линейной зависимости и независимости решений (2 / 0 час.)

Перечень рассматриваемых вопросов:

1. понятие линейной зависимости и независимости решений, определитель Вронского;
2. теорема о зависимости функций;
3. теорема о линейной независимости решений;
4. фундаментальная система решений и теорема о существовании фундаментальной системы решений.

Тема 2. Построение линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений. Формула Лиувилля-Остроградского (2 / 0 час.)

Перечень рассматриваемых вопросов:

1. теорема о зависимости «n+1» решения;
2. теорема о соответствии однородного уравнения и фундаментальной системы решений;
3. построение уравнения по фундаментальной системе решений.

Тема 3. Теоремы о структуре общего решения линейного однородного, неоднородного решения (2 / 0 час.)

Перечень рассматриваемых вопросов:

1. теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения.

Тема 4. Понижение порядка в линейном однородном и неоднородном уравнении (2 / 0 час.)

Перечень рассматриваемых вопросов:

1. понижение порядка, если известно частное решение;
2. метод вариации произвольных постоянных.

Раздел 3. Уравнения с постоянными коэффициентами (8 / 0 час.)

Тема 1. Построение общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (2 / 0 час.)

Перечень рассматриваемых вопросов:

1. случай различных характеристических корней;
2. случай кратных характеристических корней.

Тема 2. Подбор частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами по виду правой части (4 / 0 час.)

Перечень рассматриваемых вопросов:

1. в случае, когда правая часть есть многочлен;
2. в случае, когда правая часть есть экспонента, умноженная на многочлен;

3. в случае, когда в правой части есть exp, многочлен с sinx и cosx.

Тема 3. Уравнение Эйлера. Дифференциальные уравнения 2 порядка (2 / 0 час.)

Используя case-технологии, рассмотрим методы интегрирования уравнений 2 порядка (однородные). Они делятся по типу:

1. нет аргумента $\rightarrow$ метод y-новый arg, y'-новая функция;
2. нет функции $\rightarrow$ младшую производную обозначаем за новую;
3. обобщенно - однородные $\rightarrow$ замена x=e ^{t}, y=u(t) e ^{t};
4. однородные $\rightarrow$ замена y=uy, u-новая функция;
5. с точной производной $\rightarrow$ понижение порядка;
6. известно одно частное $\rightarrow$ по фундаментальной системе.

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольные работы

Примеры контрольной работы №1 по теме «Дифференциальные уравнения 1 порядка»

Вариант 1

1. Определить тип уравнения и решить его: $yy' = xy + 1$
2. Определить тип уравнения и решить его: $y' = \sqrt{2x + y + 1}$
3. Определить тип уравнения и решить его: $xy' = x^3 + 2y$
4. Определить тип уравнения и решить его: $\left(x^2 + e^y\right)dx + \left(xe^y + 2y\right)dy = 0$
5. Определить тип уравнения и решить его: $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}dx$

Вариант 2

1. Определить тип уравнения и решить его: $xy' = x^2 + y^2$
2. Определить тип уравнения и решить его: $xy' = e^x + xy$
3. Определить тип уравнения и решить его: $\left(2xy - 4x^3\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$
4. Определить тип уравнения и решить его: $\left(x\cos y + \sin 2y\right)y' = 1$
5. Определить тип уравнения и решить его: $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

Вариант 3

1. Определить тип уравнения и решить его: $\left(x - 1\right)y' + xy = 0$
2. Определить тип уравнения и решить его: $\left(x + y\right)y' = y - x$
3. Определить тип уравнения и решить его: $\left(x - 1\right)dy = \left(x^2 + y\right)dx$
4. Определить тип уравнения и решить его: $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$
5. Определить тип уравнения и решить его: $\left(2xy^2 - y\right)dx + xdy = 0$

Вариант 4

1. Определить тип уравнения и решить его: $y'tgx - y = 3$
2. Определить тип уравнения и решить его: $2xyy' = x^2 + y^2$

3. Определить тип уравнения и решить его: $(\cos y - xtgy)\,y' = 1$

4. Определить тип уравнения и решить его: $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$

5. Определить тип уравнения и решить его: $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$

Вариант 5

1. Определить тип уравнения и решить его: $y' + 2xy^2 = 2xy$
2. Определить тип уравнения и решить его: $(x + y)\,y' = 4y - 2x + 6$
3. Определить тип уравнения и решить его: $x^2 y' + xy = (x+1)\,y^3$
4. Определить тип уравнения и решить его: $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right)dy$
5. Определить тип уравнения и решить его: $xy' = 2\sqrt{y}\cos - 2y$

Примеры контрольной работы №2 по теме «Уравнения, не разрешенные относительно производной»

Вариант 1

1. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются: $y' + 2xy^2 = 2xy$
2. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются: $y'^2 + e^x = yy'$
3. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются: $(xy' + y)^2 = x^2 y'$
4. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются: $2xy' - y = \sin y'$
5. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются: $y = y'\sqrt{1 + y'^2}$

Вариант 2

1. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются: $9y'^2 - 4y^5 = 0$

2. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $xy' + y = \ln y'$

3. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $y^{13} - y'e^{2x} = 0$

4. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $2y' = x + \ln y'$

5. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $xy' = 2y + \sqrt{1 + y^{12}}$

Вариант 3

1. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $y^{13} - y'e^{2x} = 0$

2. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $y = 2xy' - y^{13}$

3. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $y = \left(xy' + 2y\right)^2$

4. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $y^2\left(y - xy'\right) = x^3 y'$

5. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $x^2\left(y - xy'\right) = yy^{12}$

Вариант 4

1. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $xy^{13} = y' + 1$

2. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $y = xy' - 3y^{13}$

3. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $y = \left(xy' + 2y\right)^2$

4. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

   $y^2 + x^2 y^{15} = xy\left(y'^2 + y^{13}\right)$

5. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

$\left(y-2xy'\right)^2 = 4yy^{13}$

Вариант 5

1. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

$xy^{12} = 2yy' - x$

2. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

$y^{12} + 4y = 2xy' + x^2$

3. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

$x^2 y^{12} + y^2 = \left(2 - yy'\right)$

4. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

$y^{13} + \left(y'^2 - 2y'\right)x = 3y' - y$

5. Решить уравнение и указать его особые решения, если они имеются:

$\left(xy' - y\right)^2 = \dfrac{y^{12}}{x} + 1$

Примеры контрольной работы №3 по теме «Уравнения высших порядков»

Вариант 1

1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

2) $y'' + y' = \dfrac{1}{\sin x}$.

3) $y'' - 4y' + 5y = 1 + 8\cos x + e^{2x}$.

4) $y'' - 2y' + 2y = \left(x + e^x\right)\sin x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_4 = \lambda_5 = i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = -i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -12$, $\lambda_3 = 12 = 13i$, $\lambda_4 = 12 - 13i$, $y = \dfrac{6}{x^4} + 3x^4$.

Вариант 2

1) $y'''' - 5y'' + 4y = 0$.

2) $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

3) $y'' + 4y = e^x + 4\sin 2x + 2\cos^2 x$.

4) $y''' + y' = \sin x \; x\cos x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1 + i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 1 - i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 12 + 12i$, $\lambda_4 = 12 - 12i$, $y = \dfrac{5}{x^4} + \cos 4x$.

Вариант 3

1) $y''' - 3y' + 2y = 0$.

2) $y''' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

3) $y'' - 2y' - 3y = 2x + e^{-x} - 2e^{3x}$.

4) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 1 + 2i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 1 - 2i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = 11 + 12i$, $\lambda_4 = 11 - 12i$, $y = \dfrac{4}{x^4} + \sin 3x$.

Вариант 4

1) $y''' - 8y = 0$.

2) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cdot \cos x}}$.

3) $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x$.

4) $y'''' + y'' = 7x - 3\cos x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 2i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = -2i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 11$, $\lambda_3 = 11 + 11i$, $\lambda_4 = 11 - 11i$, $y = -\dfrac{1}{x^4} + e^{4x}$.

Вариант 5

1) $y''''' - 6y' + 9y''' = 0$.

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

3) $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + e^2$.

4) $y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x\sin x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 3i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = -3i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$, $\lambda_3 = 10 + 11i$, $\lambda_4 = 10 - 11i$, $y = -\frac{1}{x^3} + 3x^2$.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения» представлено в разделе «Фонд оценочных средств» и включает в себя:

- план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;
- характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;
- требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;
- критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Код и наименование индикатора достижения		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1.	Дифференциальные уравнения 1 порядка с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 1	Подготовка к коллоквиуму № 1
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
2.	Линейные уравнения 1 порядка Уравнение Бернулли.	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 2	Подготовка к коллоквиуму № 1
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
3.	Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 3	Подготовка к коллоквиуму № 1
		ОПК-1.2	Умеет		

	множитель.	ОПК-1.3	Владеет		
4.	Теорема Коши. Задачи Коши.	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 4	Подготовка к коллоквиуму № 1
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
5.	Контрольная работа № 1	ОПК-1.1	Знает	Проверка к/р № 1	
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
6.	Дифференциальные уравнения неразрешенные относительно производной.	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 5	Подготовка к коллоквиуму № 1
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
7.	Два способа нахождения особых решений.	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 6	Подготовка к коллоквиуму № 1
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
8.	Контрольная работа № 2	ОПК-1.1	Знает	Проверка к/р № 2	
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
9.	Коллоквиум № 1	ОПК-1.1	Знает	Проверка коллоквиума № 1	
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
10.	Линейные уравнения n-ого порядка. Зависимость, независимость решений.	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 7	Подготовка к коллоквиуму № 2
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
11.	Понижение порядка в линейном однородном уравнении n-ого порядка	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 8	Подготовка к коллоквиуму № 2
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		

12.	Дифференциальные уравнения 2-ого порядка, разные методы интегрирования.	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 9	Подготовка к коллоквиуму № 2
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
13.	Дифференциальные уравнения 2-ого порядка.	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 10	Подготовка к коллоквиуму № 2
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
14.	Интегрирование однородных уравнений n-ого порядка с постоянным коэффициентом	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 11	Подготовка к коллоквиуму № 2
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
15.	Интегрирование однородных уравнений n-ого порядка с постоянным коэффициентом	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 12	Подготовка к коллоквиуму № 2
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
16.	Интегрирование неоднородных уравнений n-ого порядка	ОПК-1.1	Знает	Проверка домашних заданий № 13	Подготовка к коллоквиуму № 2
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
17.	Контрольная работа № 3	ОПК-1.1	Знает	Проверка к/р № 3	
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		
18.	Коллоквиум № 2	ОПК-1.1	Знает	Проверка коллоквиума № 2	
		ОПК-1.2	Умеет		
		ОПК-1.3	Владеет		

V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Н.М. Матвеев Методы интегрирования ОДУ. М.: Высшая школа, 2012, 545с.

2. В.В. Степанов Курс дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 2013, 465с.

3. Л.С. Понтрягин Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 2012, 328с.

4. А.Ф. Филиппов Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 2014 128с.

5. Р.П. Шепелева Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд-во ДВГУ, 2012, 210с.

Дополнительная литература

1. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения. //М.: Изд-во тех.-теор. литературы, 2012.

2. Ю.Н. Бибиков. Общий курс обыкн. диф-х уравнений. // Изд. Ленинградского университета, 2014, 231с.

3. Р.П. Шепелева Методические указания к самостоятельной работе по теме «Голоморфные функции от матриц и их приложения» в курсе «Обыкновенные дифференциальные уравнения» ИМиКН. Изд-во Дальневосточного университета, 2012г.

4. Р.П. Шепелева Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд-во ДВГУ, 2012, 210с.

5. Г.Г. Дурнов Сборник заданий по дифференциальным уравнениям Линейные системы, ДВГУ 2013.

6. Е.В. Костюченко, Е. Г. Прилепкина Пособие по решению обыкновенных дифференциальных уравнений, из-во Дальневосточного университета, 2014 г.

7. Г.Г. Дурнов Методические указания к контрольным работам, из-во Дальневосточного университета, 2014.

8. Шепелева Р.П. Методические указания к самостоятельной работе и задания (темы 1 и 2) по курсу «Дифференциальные уравнения». Из-во ДВФУ, 2014 г.

9. Шепелева Р.П. Методические указания к самостоятельной работе и задания (темы 3 и 4) по курсу «дифференциальные уравнения». Из-во ДВФУ, 2014 г.

10. Шепелева Р.П. Методические указания к самостоятельной работе и задания (темы 5 и 6) по курсу «дифференциальные уравнения». Из-во ДВФУ, 2104 г.

11. Шепелева Р.П. Учебно – методическое пособие «Операционное исчисление». Издательство ДВФУ, 2013.

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного достижения учебных целей занятий должны выполняться следующие основные требования:

- соответствие действий обучающихся ранее изученным на лекционных и семинарских занятиях методикам и методам.

- максимальное приближение действий студентов к реальным, соответствующим будущим функциональным обязанностям.

-поэтапное формирование умений и навыков, т.е. движение от знаний к умениям и навыкам, от простого к сложному и т.д.

- использование при работе на тренажерах или действующей технике фактических документов, технологических карт, бланков и т.п.

- выработка индивидуальных и коллективных умений и навыков.

- распределение времени, отведенного на занятие, на решение каждой задачи;

- подбор иллюстративного материала (графиков, таблиц, схем), необходимого для решения задач, продумывание расположения рисунков и записей на доске.

Студент должен:

- научиться работать с книгой, документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой.

- формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства. Формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Необходимо поддерживать непрерывный контакт с аудиторией, отвечать на возникающие у студентов вопросы. На практических занятиях преподаватель разбирает примеры по пройденной теме. Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения. Если знаний, полученных в аудитории, оказалось недостаточно, студент может самостоятельно повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами, которые собраны в изучаемом курсе в системе blackboard dvfu. После выполнения задания, студент отправляет его на проверку преподавателю в соответствующем «Назначении». Работа должна быть отослана в формате PDF одним документом. По данному курсу разработаны методические указания, которые выложены в системе blackboard dvfu в соответствующем разделе.

По данному курсу разработаны следующее методические пособия: [3, 6 8, 9, 10, 11]

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекции по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения» проводятся в мультимедийных аудиториях, оснащенных соответствующим современным оборудованием. Для организации самостоятельной работы студенты также пользуются собственными персональными компьютерами и читальными залами научной библиотеки ДВФУ.

Наименование оборудованных помещений и помещений для самостоятельной работы	**Перечень основного оборудования**
Мультимедийная аудитория	Экран с электроприводом 236*147 см Trim Screen Line; Проектор DLP, 3000 ANSI Lm, WXGA 1280x800, 2000:1 EW330U Mitsubishi; Подсистема специализированных креплений оборудования CORSA-2007 Tuarex; Подсистема видео коммутации; Подсистема аудио коммутации и звукоусиления; акустическая система для потолочного монтажа SI 3CT LP Extron; цифровой аудио процессор DMP 44 LC Extron; беспроводные ЛВС для обучающихся обеспечены системой на базе точек доступа 802.11a/b/g/n 2x2 MIMO(2SS).
Читальные залы Научной библиотеки ДВФУ с открытым доступом к фонду (корпус А - уровень 10)	Моноблок HP ProOne 400 All-in-One 19,5 (1600x900), Core i3-4150T, 4GB DDR3-1600 (1x4GB), 1TB HDD 7200 SATA, DVD+/-RW, GigEth, Wi-Fi, BT, usb kbd/mse,Win7Pro (64-bit)+Win8.1Pro(64-bit),1-1-1 Wty Скорость доступа в Интернет 500 Мбит/сек. Рабочие места для людей с ограниченными возможностями здоровья оснащены дисплеями и принтерами Брайля; оборудованы: портативными устройствами для чтения плоскопечатных текстов, сканирующими и читающими машинами видео увеличителем с возможностью регуляции цветовых спектров; увеличивающими электронными лупами и ультразвуковыми маркировщиками

VIII. ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Шкала оценивания уровня сформированности компетенций по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		Критерии	Показатели	Баллы
ОПК-1	знает (пороговый уровень)	Порядок и сущность формулировки понятий, определений и теорем, актуальность теоретической и практической значимости их применения в исследованиях. Об основных понятиях дифференциальных уравнений	Знание определений, основных понятий дифференциальных уравнений; основных законов естественнонаучных (математических) дисциплин и их роли в профессиональной деятельности.	Способность дать определения основных понятий дифференциальных уравнений. Способность перечислить источники информации. Способность работы с компьютером, как в социальной сфере, так и в области познавательной и профессиональной деятельности.	61-75
	умеет (продвинутый)	Проводить исследование в соответствии с поставленной целью и задачами, определять логику проведения исследования относительно оценки эффективности бизнес-проектов.	Умение применять полученные знания для решения математических задач, использовать математический язык и символику при построении моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные, применять методы дифференциальных уравнений и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.	Способность самостоятельно изучить доказательство некоторых понятий математики. Способность применять изученные методы решения для нестандартного решения поставленных задач. Способность обосновать выбранный метод решения.	76-85

	владеет (высокий)	Инструментами и методами проведения исследований, методами анализа и обоснования эффективности бизнес-проектов, компьютерными программами.	Владение математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих и научных задач, владение навыками работы с компьютером, как в социальной сфере, так и в области познавательной и профессиональной деятельности.	Способность уверенно владеть математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих и научных задач. Способность бегло и точно применять терминологический аппарат предметной области исследования в устных ответах на вопросы и в письменных работах.	86-100

Шкала измерения уровня сформированности компетенций

Итоговый балл	1-60	61-75	76-85	86-100
Оценка (пятибалльная шкала)	2 (незачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
Уровень сформированности компетенций	отсутствует	пороговый (базовый)	продвинутый	высокий (креативный)

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

Оценочные средства для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Промежуточная аттестация и текущий контроль по дисциплине осуществляется с использованием бально-рейтинговой системы.

По дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения» учебным планом предусмотрен экзамен в первом и втором семестрах.

Экзамен по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения» проводится в письменном виде в форме выполнения письменных заданий. При необходимости, студент устно поясняет выполненные не полностью ответы.

Перечень вопросов к экзамену и коллоквиумам

Коллоквиум №1 (Уравнение первого порядка)

Вопросы:

1. Методы интегрирования уравнений первого порядка
2. Понятие дифференциальных уравнений 1 порядка, общего, частного решений, их геометрического смысла. Уравнения с разделяющими переменными
3. Однородные уравнения 1 порядка
    a. уравнения, приводящиеся к однородным
    b. обобщенно-однородные уравнения, задачи, приводящиеся к однородным уравнениям
4. Линейные уравнения 1 порядка
    a. метод Лагранжа
    b. метод Бернулли
    c. свойства решений линейного дифференциального уравнения

   d. уравнения Бернулли и Рикатти
5. Уравнения в полных дифференциалах, критерий Коши
   a. понятие интегрирующих множителей, их свойства
   b. практическое нахождение интегрирующего множителя
6. Уравнения, не разрешенные относительно производной
   a. уравнения вида F(y')=0
   b. уравнения вида F(x, y')=0
   c. уравнения вида F(y, y')=0
   d. уравнения вида F(x, y, y')=0, случай общей параметризации
   e. уравнение Лагранжа и Клеро
7. Теорема о существовании и единственности решений задачи Коши: вспомогательные предложения, доказательство существования решения, доказательство единственности, продолжение решений
8. Особые точки уравнения $y' = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$: классификация особых точек, в случае когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$, классификация особых точек, в случае когда $\lambda_1 = \lambda_2$
9. Два способа нахождения особых решений:
   a. метод P-дискриминантной кривой
   b. метод C-дискриминантной кривой
   c. задачи на нахождение особых решений

Коллоквиум №2 (Уравнения высших порядков)

1. Классификация уравнений высших порядков
2. Уравнения высших порядков, интегрируемые в квадратурах:
   a. уравнения вида F(x, $y^{(n)}$)=0
   b. уравнения вида F(..,$y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$)=0
   c. уравнения вида F($y^{(n-2)}$, $y^{(n)}$)=0
   d. задачи на нахождение особых решений
3. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:
   a. уравнения, в которых нет аргумента
   b. уравнения, в которых нет функции
   c. однородные уравнения
   d. обобщенно - однородные уравнения
   e. уравнения с точной производной
4. Линейные уравнения n-го порядка. Теоремы о линейной зависимости и независимости решений:
   a. понятие линейной зависимости и независимости решений, определитель Вронского
   b. теорема о зависимости функций

    c. теорема о линейной независимости решений
    d. фундаментальная система решений и теорема о существовании фундаментальной системы решений
5. Построение линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений. Формула Лиувилля-Остроградского:
    a. теорема о зависимости «n+1» решения
    b. теорема о соответствии однородного уравнения и фундаментальной системы решений
    c. построение уравнения по фундаментальной системе решений
6. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения
7. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения
8. Понижение порядка в линейном однородном и неоднородном уравнении:
    a. понижение порядка, если известно частное решение
    b. метод вариации произвольных постоянных
9. Построение общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами:
    a. случай различных характеристических корней
    b. случай кратных характеристических корней
10. Подбор частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами по виду правой части:
    a. в случае, когда правая часть есть многочлен
    b. в случае, когда правая часть есть экспонента, умноженная на многочлен
    c. в случае, когда в правой части есть exp, многочлен с sinx и cosx
11. Уравнение Эйлера. Дифференциальные уравнения 2 порядка

Критерии выставления оценки студенту на экзамене по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Баллы (рейтинговой оценки)	**Оценка зачета/ экзамена** (стандартная)	**Требования к сформированным компетенциям**
100-86	*«зачтено»/«отлично»*	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения

		практических задач.
76-85	*«зачтено»/«хорошо»*	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.
61-75	*«зачтено»/ «удовлетворительно»*	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.
60 и менее	*«незачтено»/ «неудовлетворительно»*	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

Оценочные средства для текущей аттестации

Текущая аттестация студентов по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения» проводится в форме контрольных мероприятий (контрольной работы, экспресс контрольной, индивидуального домашнего задания) по оцениванию фактических результатов обучения студентов и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
- степень усвоения теоретических знаний;
- уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;
- результаты самостоятельной работы.

Коллоквиум является формой контроля усвоения студентами теоретической части курса. Сдается студентами преподавателю в устной форме в виде собеседования во время лекционных занятий по завершению изучения теоретической части разделов курса и оценивается в форме дифференцированного зачета.

Коллоквиум считается сданным успешно при получении оценок «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно». При получении оценки «неудовлетворительно» он считается не сданным, а соответствующий раздел теоретической части неусвоенным.

Студенту предоставляется возможность пересдать коллоквиум один раз во время консультаций по дисциплине с получением оценки на один балл ниже. Для студента, успешно сдавшего коллоквиум, выносимые на коллоквиум вопросы исключаются из списка вопросов, выносимых на экзамен.

Контрольная работа является формой контроля усвоения студентами практической части курса. Выполняется студентами во время практических занятий по завершению изучения практической части разделов курса. Контрольная работа сдается преподавателю на проверку и оценивается в форме дифференцированного зачета.

Контрольная работа считается выполненной успешно при получении оценок «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно». При получении оценки «неудовлетворительно» контрольная работа считается не сданной, а соответствующий раздел практикума неусвоенным.

Студенту предоставляется возможность пересдать контрольную работу один раз во время консультаций по дисциплине с получением оценки на один балл ниже.

Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства – наименование	
			текущий контроль	промежуточная аттестация
Дифференциальные	ОПК-1	1	Проверка	Подготовка к

уравнения 1 порядка с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.		неделя	домашних заданий № 1	коллоквиуму № 1
Линейные уравнения 1 порядка Уравнение Бернулли.	ОПК-1	2 неделя	Проверка домашних заданий № 2	Подготовка к коллоквиуму № 1
Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.	ОПК-1	3 неделя	Проверка домашних заданий № 3	Подготовка к коллоквиуму № 1
Теорема Коши. Задачи Коши.	ОПК-1	4 неделя	Проверка домашних заданий № 4	Подготовка к коллоквиуму № 1
Контрольная работа № 1	ОПК-1	5 неделя	Проверка к/р № 1	
Дифференциальные уравнения неразрешенные относительно производной.	ОПК-1	6 неделя	Проверка домашних заданий № 5	Подготовка к коллоквиуму № 1
Два способа нахождения особых решений.	ОПК-1	7 неделя	Проверка домашних заданий № 6	Подготовка к коллоквиуму № 1
Контрольная работа № 2	ОПК-1	8 неделя	Проверка к/р № 2	
Коллоквиум № 1	ОПК-1	8 неделя	Проверка коллоквиума № 1	
Линейные уравнения n-ого порядка. Зависимость, независимость решений.	ОПК-1	9 неделя	Проверка домашних заданий № 7	Подготовка к коллоквиуму № 2
Понижение порядка в линейном однородном уравнении n-ого порядка	ОПК-1	10 неделя	Проверка домашних заданий № 8	Подготовка к коллоквиуму № 2
Дифференциальные уравнения 2-ого порядка, разные методы интегрирования.	ОПК-1	11 неделя	Проверка домашних заданий № 9	Подготовка к коллоквиуму № 2
Дифференциальные уравнения 2-ого порядка.	ОПК-1	12 неделя	Проверка домашних заданий № 10	Подготовка к коллоквиуму № 2
Интегрирование однородных уравнений n-ого порядка с постоянным коэффициентом	ОПК-1	13 неделя	Проверка домашних заданий № 11	Подготовка к коллоквиуму № 2
Интегрирование однородных уравнений n-ого порядка с постоянным коэффициентом	ОПК-1	14 неделя	Проверка домашних заданий № 12	Подготовка к коллоквиуму № 2
Интегрирование неоднородных уравнений n-ого порядка	ОПК-1	15 неделя	Проверка домашних заданий № 13	Подготовка к коллоквиуму № 2
Контрольная работа № 3	ОПК-1	16	Проверка к/р	

		неделя	№ 3	
Коллоквиум № 2	ОПК-1	17 неделя	Проверка коллоквиума № 2	

Критерии оценки (письменный ответ)

100-86 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией
соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.

85-76 - баллов - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.

75-61 - балл - фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определенно и последовательно изложить ответ.

60-50 баллов - незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

Это соответствует: 100-86 баллов – «отлично», 85-76 баллов – «хорошо», 75-61 баллов – «удовлетворительно», не более 60 баллов – «неудовлетворительно».

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине IV семестр

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1 – 4 неделя	Домашняя работа № 1 – 4	1 неделя на каждое задание	Проверка на занятиях
2	5 неделя	Контрольная работа № 1	4 недели	Оценка по заданию
3	6 – 7 неделя	Домашняя работа № 5 – 7	1 неделя на каждое задание	Проверка на занятиях
4	8 неделя	Контрольная работа № 2	3 недели	Оценка по заданию
5	8 неделя	Коллоквиум № 1	7 недель	Оценка ответа
6	9 – 11 неделя	Домашняя работа № 8 – 10	1 неделя на каждое задание	Проверка на занятиях
7	12 – 15 неделя	Домашняя работа № 11 – 15	4 недели	Проверка на занятиях
8	16 неделя	Контрольная работа № 3	15 неделя	Оценка по заданию
9	17 неделя	Коллоквиум № 2		Оценка ответа

Домашние и классные задания

IV семестр

Занятие 1 Задачи на составление уравнений 1 порядка в классе № 31-33, 71-75 (нечетные), домой № 30-34, 72-76 (четные)

Уравнения с разделяющимися переменными в классе № 51-65 (нечетные), домой № 52-64 (четные)

Занятие 2 Однородные уравнения 1 порядка в классе № 101-111 (нечетные), домой № 102-112 (четные)

Обобщенно-однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным в классе № 113-127 (нечетные), домой № 114-126 (четные)

Занятие 3 Линейные уравнения 1 порядка, метод вариации произвольного постоянного Лагранжа в классе № 137-153 (нечетные), домой № 136-148 (четные)

Линейные уравнения 1 порядка, метод подстановки, уравнения Бернулли в классе № 155-165 (нечетные), домой № 150-166 (четные)

Уравнения Рикатти в классе № 167-171 (нечетные), домой № 168-174 (четные)

Занятие 4 Уравнения в полных дифференциалах в классе № 187-193 (нечетные), домой № 186-194 (четные)

Интегрирующий множитель. Нахождение интегрирующего множителя в классе № 195-207 (нечетные), домой № 196-208 (четные)

Занятие 5 В классе № 209-219 (нечетные), домой № 210-220 (четные)

Тренинг на определение типа и метода решений уравнений 1 порядка, разрешенных относительно производной в классе № 301-410 (нечетные), домой № 302-420 (четные)

Занятие 6 Контрольная работа «Уравнения 1 порядка, разрешенные относительно производной». Примерный вариант предлагается.

Указать тип и метод и проинтегрировать:

$$x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y}$$

$$(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$$

$$(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$$

$$xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2 dx}$$

$$(y' - x\sqrt{y})(x^2 - 1) = xy$$

Занятие 7 Уравнения 1 порядка, не разрешенные относительно производной типа $F(y') = 0,\ F(x, y') = 0,\ F(y, y') = 0$. В классе № 241-261 (нечетные), домой № 242-262 (четные)

Уравнения 1 порядка, не разрешенные относительно производной. Метод общей параметризации для уравнения типа $F(x, y, y') = 0$. В классе № 267-285 (нечетные), домой № 268-286 (четные)

Занятие 8 Уравнения Лагранжа и Клеро. В классе № 287-295 (нечетные), домой № 288-296 (четные)

Занятие 9 Контрольная работа «Уравнения 1 порядка, неразрешенные относительно производной». Примерный вариант предлагается.

$$(xy' - y)^2 = y'^2 - 1$$
$$3y'^4 = y' + y$$
$$4y = x^2 + y'^2$$
$$x(y'^2 + e^{2y}) = -2y'$$

Уравнения высших порядков

Занятие 10 Понижение порядка в уравнениях, не содержащих функцию, аргумент, однородных относительно у и его производных, обобщенно-однородных относительно х и у. В классе № 421-435 (нечетные), домой № 422-434 (четные)

В классе № 437-449 (нечетные), домой № 436-450 (четные)

Сведение многократного интеграла к однократному, интегрирование через выделение полных производных. В классе № 451-461 (нечетные), домой № 452-462 (четные)

Занятие 11 Понижение порядка, используя однородность и интегрирование. В классе № 463-475 (нечетные), домой № 464-474 (четные)

Сведение к уравнениям 1 порядка. В классе № 481-499 (нечетные), домой № 482-500 (четные)

Занятие 12 Контрольная работа «Уравнения высших порядков с переменными коэффициентами». Примерный вариант предлагается.

$$yy'' + 1 = y'^2$$
$$2xy'y'' = y'^2 - 1$$
$$xy'' = y' + x\sin\frac{y}{x}$$
$$y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$$
$$yxy'' + xy'^2 = 2yy'$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Занятие 13 Нахождение общего решения. В классе № 511-531 (нечетные), домой № 512-532 (четные)

Нахождение общего решения. В классе № 533-547 (нечетные), домой № 537-548 (четные)

Занятие 14 Нахождение частного решения с неопределенными коэффициентами. В классе № 549-569 (нечетные), домой № 537-548 (четные)

Занятие 15 Метод вариации произвольных постоянных. В классе № 575-581 (нечетные), домой № 576-580 (четные)

Занятие 16 Контрольная работа «Линейные уравнения с постоянными коэффициентами». Примерный вариант предлагается.

$y^{IV} + y'' = 7x - 3\cos x$

$y'' - 2y' + 2y = (x + e^x)\sin x$

$y'' + y = 4e^x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -3$

$y'' + 4y = 2tgx$

$L[y] = 2\cos x \sin x + 5e^x(\cos 2x + 1)$

$k_{1,2} = \pm 2i,\ \ k_{3,4} = \pm 2i,\ \ k_{5,6} = 1 \pm 2i,\ \ k_{7,8} = 1$

Найти общее решение с неопределенными коэффициентами

Методические указания к курсу

Линейные дифференциальные уравнения

1. Следующие теоремы являются основными в теории линейных дифференциальных уравнений.

Общее решение линейного однородного уравнения n – го порядка имеет вид

$$y = c_1 y_1 + ... + c_n y_n,$$

где $y_1,...,y_n$ - линейно – независимые решения, $c_1,...,c_n$ - произвольные постоянные.

Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме его частного решения и общего решения линейного однородного уравнения.

Аналогичные теоремы справедливы для линейных систем.

2. Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

надо найти все корни λ характеристического уравнения

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (1) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $c_j e^{\lambda_j x}$ для каждого простого корня λ_j, уравнения (2) и слагаемых вида

$$(c_{m+1} + c_{m+2} x + ... + c_{m+k} x^{k-1}) e^{\lambda x} \qquad (3)$$

для каждого кратного корня λ уравнения (2), где k - кратность этого корня. Все c_j - произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (1) и корни λ здесь могут быть вещественными или комплексными.

Если же все коэффициенты в (1) вещественные, то решение можно написать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ. Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$c_{m+1} e^{\alpha x} \cos \beta x + c_{m+2} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если все эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если каждый из этих двух корней имеет кратность k. Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} - многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (3), их коэффициенты - произвольные постоянные.

Пример 1. Решить уравнение $y^{V}-2y^{IV}-16y'+32y=0.$

Пишем характеристическое уравнение

$\lambda^5-2\lambda^4-16\lambda+32=0.$

Находим его корни: $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-2,\ \lambda_4=2i,\ \lambda_5=-2i.$

По изложенным выше правилам пишем общее решение

$y=(c_1+c_2x)e^{2x}+c_3e^{-2x}+c_4\cos 2x+c_5\sin 2x$

(степень многочлена c_1+c_2x на 1 меньше кратности корня, а члены cos и sin соответствуют корням $\pm 2i$).

3. Для линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций $b_0+b_1x+...+b_mx^m,\ e^{\alpha x},\ \cos\beta x,\ \sin\beta x,$ частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью $P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m$, частное решение имеет вид

$y_1=x^{\xi}Q_m(x)e^{\gamma x},$ (4)

где $Q_m(x)$ - многочлен той же степени m. Число $\xi=0,$ если $\gamma-$не корень характеристического уравнения (2), а если $\gamma-$ корень, то ξ равно кратности этого корня.

Для уравнений с вещественными коэффициентами и правой частью вида

$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x)$ (5)

можно искать частное решение в виде

$y_1=x^{\xi}e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x),$ (6)

где $\xi=0,$ если $\alpha+\beta i$ не корень характеристического уравнения и ξ равно кратности корня $\alpha+\beta i$ в противном случае, а R_m и T_m - многочлены степени

m, равной наибольшей из степеней многочленов P и Q в (5). Чтобы найти коэффициенты многочленов в (4) или (6), надо подставить решение y_1 в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1(x)+...+f_p(x)$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1(x)+...+f_p(x)$.

Пример 2. Решить уравнение

$$y^{III} - 6y^{II} + 9y^{I} = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x. \qquad (7)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \ \lambda_3 = 0.$ Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + c_3.$$

Правая часть (7) состоит из двух слагаемых. Ищем отдельно частные решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}, \qquad (8)$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}\cos 2x. \qquad (9)$$

Число $\gamma = 3$ есть корень кратности 2, поэтому для уравнения (8) частное решение, согласно (4), имеет вид $y_1 = x^2(ax+b)e^{3x}.$ Подставив его в (8), найдем

$$a = \frac{1}{18}, b = -\frac{1}{18}.$$

Число $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ не является корнем, поэтому для уравнения (9) частное решение, согласно (6), имеет вид $y_2 = e^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x).$ Подставив его в (9), найдем $c = -\dfrac{3}{52}, d = -\dfrac{1}{26}.$

Общее решение уравнения (7) равно $y_0 + y_1 + y_2.$

4. Другой метод отыскания частного решения уравнения с вещественными

коэффициентами и правой частью $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ (или $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$) состоит в следующем . Решают уравнение с правой частью $P(x)e^{(\alpha+\beta i)x}.$ Так как

$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$ то вещественная часть полученного решения будет решением уравнения с правой частью $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, а мнимая – решением уравнения с правой частью $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)$.

Пример 3. Решить уравнение

$$y'' + 4y = 8\sin 2x. \qquad (10)$$

Так как $\sin 2x = \mathrm{Im}\, e^{2ix}$ (т.е. мнимая часть от e^{2ix}), то сначала решаем уравнение

$$y'' + 4y = 8e^{2ix} \qquad (11)$$

Уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm 2i$. В правой части $\gamma = 2i$ совпадает с корнем кратности 1, поэтому решение ищем в виде $y_1 = axe^{2ix}$. Подставляя в (11), после упрощений получаем

$$4iae^{2ix} = 8e^{2ix}; a = -2i.$$

Значит, частное решение уравнения (11) есть

$$y_1 = -2ixe^{2ix} = -2ix(\cos 2x + i\sin 2x).$$

Взяв мнимую часть от y_1, получаем частное решение уравнения (10):

$$y_2 = \mathrm{Im}\, y_1 = -2x\cos 2x.$$

Прибавляя общее решение $y_0 = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$ уравнения $y'' + 4y = 0,$ получаем общее решение уравнения (10).

5. Линейное уравнение с постоянными и переменными коэффициентами и с любой правой частью $f(x)$ можно решить методом вариации постоянных, если известно общее решение $y_0 = c_1y_1 + ...c_ny_n$ линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда решение линейного неоднородного уравнения ищется в виде $y = c_1(x)y_1 + ... + c_n(x)y_n$. Функции $c_i(x)$ определяются из системы (где a_0 - коэффициент при $y^{(n)}$ в уравнении)

$$c_1'(x)y_1 + ... + c_n'(x)y_n = 0;$$

$$c_1'(x)y_1' + ... + c_n'(x)y_n' = 0;$$

……………………;

$$c_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0; \qquad (12)$$

$a_0(c_1'(x)y_1^{(n-1)}+...+c_n'(x)y_n^{(n-1)})=f(x).$

Пример 4. Решить уравнение

$$y''-2y'+y=e^x/x. \qquad (13)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет корень $\lambda=1$ кратности 2. Общее решение однородного уравнения

$y_0=(c_1+c_2x)e^x=c_1e^x+c_2xe^x.$

Ищем решение уравнения (13) в виде

$$y=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x. \qquad (14)$$

Функции $c_1(x), c_2(x)$ определяются из системы вида (12)

$c_1'(x)e^x+c_2'(x)xe^x=0;$

$c_1'(x)y_1+c_2'(xe^x+e^x)=e^x/x.$

Из этой системы получаем

$c_2'=1/x, c_1'=-1;\quad c_2(x)=\ln|x|+\overline{c_2},\quad c_1(x)=-x+\overline{c_1}.$

Подставляя $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (14), находим общее решение

$y=c_2(x)=(\overline{c_1}-x)e^x+(\ln|x|+\overline{c_2})xe^x.$

6. Уравнение Эйлера

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{(n-1)}y^{(n-1)}+...+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x) \qquad (15)$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x=e^t$ при $x>0$ (или $x=-e^t$ при $x<0$). Чтобы сразу написать характеристическое уравнение, надо каждое произведение $x^ky^{(k)}$ в (15) заменить на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-k+1).$

Пример 5. Решить уравнение

$$x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=8x^3. \qquad (16)$$

Сразу пишем характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-\lambda(\lambda-1)+2\lambda-2=0. \qquad (17)$$

Его корни $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2.$ Поэтому общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$y_0 = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t}.$

Чтобы решить неоднородное уравнение (16), сначала раскроем скобки в (17):

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$

По этому характеристическому уравнению составляем левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получаем из правой части (16) заменой $x = e^t$: $y_t''' - 4y_t'' + 5y_t' - 2y = 8e^{3t}$. (18)

Число 3 – не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде $y_1 = ae^{3t}$. Подставляя в (18), находим $a = 2$. Итак, общее решение имеет вид

$y = y_0 + y_1 = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t} + 2e^{3t} = (c_1 + c_2 \ln|x|)x + c_3 x^2 + 2x^3.$

7. Общего метода решения линейных уравнений с переменными коэффициентами не существует. В некоторых случаях частное решение удается найти путем подбора, например, в виде многочлена $y = x^m + ax^{m-1} + \ldots + d$ или в виде $y = e^{ax}$ и т.п.

Если известно частное решение y_1 линейного однородного уравнения n – го порядка, то порядок уравнения можно понизить, сохраняя линейность уравнения. Для этого в уравнение надо подставить $y = y_1 z$ и затем понизить порядок заменой $z' = u$.

Пример 6. Решить уравнение

$xy'' - (x+1)y' + y = 0.$ (19)

Ищем частное решение в виде многочлена $y = x^m + ax^{m-1} + \ldots$.

Сначала найдем его степень. Подставляем $y = x^m + \ldots$ в (19) и выписываем только члены старшей степени:

$xm(m-1)x^{m-2} + \ldots - (x+1)mx^{m-1} - \ldots + x^m + \ldots = 0.$

Приравниваем нулю коэффициент при старшей степени x

$-m + 1 = 0, m = 1.$

Следовательно, многочлен может быть только первой степени. Подставляя $y_1 = x + a$ в (19), находим $a = 1$. Значит, $y_1 = x + 1$ - частное решение.

Чтобы найти общее решение, делаем в (19) замену $y=(x+1)z$. Получаем после упрощений

$x(x+1)z''-(x^2+1)z'=0.$

Понижаем порядок заменой $z'=u$ и решаем уравнение $x(x+1)u'=(x^2+1)u$;

$\frac{du}{u}=\frac{x^2+1}{x(x+1)}dx;\ \ u=\frac{cxe^x}{(x+1)^2}$. Так как $z'=u$, а

$\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=-\int xe^x d(\frac{1}{x+1})=-\frac{xe^x}{x+1}+\int\frac{(xe^x)'}{x+1}dx=\frac{e^x}{x+1}+c,$ то

$z=\frac{c_1e^x}{x+1}+c_2,\quad y=(x+1)z=c_1e^x+c_2(x+1).$

8. <u>Упражнения.</u>

Решить уравнения:

1. $y''-3y'+2y=0.$ 2. $y''+5y'+y=0.$ 3. $y''-4y'+8y=0.$

4. $y'''+9y'=0.$ 5. $y''+4y'+4y=0.$ 6. $y'''-2y''+y'=0.$

7. $y^{IV}-y=0.$ 8. $y^{IV}+2y''+y=0.$ 9. $y''-4y=e^{3x}.$

10. $y''+2y'+5y=e^{-x}.$ 11. $y''+y=xe^x.$ 12. $y''-y=\sin x.$

13. $y''-y'-2y=e^{2x}.$ 14. $y''-y=xe^x.$ 15. $y''+y=\sin x.$

16. $y''+2y'+2y=e^{-x}+x.$ 17. $y''+y'=xe^{-x}-x^2.$

Для каждого из следующих уравнений написать его частное решение с неопределенными коэффициентами. Числовых значений коэффициентов не находить:

18. $y''+2y'+2y=e^{-x}+x\sin x.$

19. $y''-4y'+4y=xe^{2x}+.e^{2x}\cos x.$

20. $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x.$

21. $y''+y'-6y=xe^{2x}\sin 3x.$

22. $y''-6y'+10y=x^2e^{3x}+x\sin x.$

23. $y'''-y'=xe^x\cos^2 x.$

24. $y^{IV} + 4y'' = x\sin^2 x.$

Решить уравнения:

25. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}.$

26. $x^2 y'' + xy' - y = 0.$

27. $x^2 y'' - xy' + y = x.$

28. $y'' + y = tgx.$

29. $x^3 y''' + xy' - y = 0.$

30. $x^2 y'' + xy' + 4y = x^2 - 2x.$

Подобрав частное решение в виде многочлена или показательной функции, решить уравнения:

31. $x(x-1)y'' - xy' + y = 0.$

32. $xy'' - (x+y)y' - 2(x-1)y = 0.$

Методические указания к самостоятельной работе студентов и задания (темы 1 и 2) по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

I. Уравнения 1 – го порядка, разрешенные относительно производной.

Решить дифференциальные уравнения $y' = f(x, y)$ - значит найти все такие функции $y = y(x)$, которые ему удовлетворяют, образуют его в тождество $y'(x) = f(x, y(x))$. Каждая такая функция называется решением, а ее график – интегральной кривой.

1. Первый простейший тип – уравнения с разделяющими переменными.

   Это уравнение вида

   $$y'(x) = f(x)g(x) \qquad (1)$$

   или вида

   $$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \qquad (2)$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только

x, в другую – только y, и затем проинтегрировать обе части (надо следить, чтобы dx и dy стояли в числителе, а при них соответствующие функции от x и от y).

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Решить уравнение $xy' - xy^2 = y^2$.

Разрешаем уравнение относительно производной y'

$xy' = y^2 + xy^2$, $y' = \dfrac{y^2(1+x)}{x}$.

Получить уравнение вида (1). Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то умножаем обе части уравнения на dx и делим y^2. Получим $\dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{1+x}{x}dx$. Переменные разделены.

Теперь можно интегрировать: $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{1+x}{x} + c$; $-\dfrac{1}{y} = \ln|x| + x + c$.

$$y = -\frac{1}{\ln|x| + x + c} \qquad (3)$$

При делении на y^2 мы могли потерять решение $y = 0$. Подставляем $y = 0$ в исходное уравнение, видим, что $y = 0$ - решение. Итак, все решения даются формулами (2) и $y = 0$.

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by) \qquad (4)$$

приводится к уравнениям с разделяющейся переменной заменой искомой функции $z = ax + by$ (или $z = ax + by + c$, c - любое).

Пример. Решим уравнение $(x + y - 2)^2 y' = 1$.

Разрешим уравнение относительно производной y':

$$y' = \frac{1}{(x + y - 2)^2} \qquad (5)$$

Получилось уравнение вида (4). Вводим новую искомую функцию $z = x + y - 2$. Тогда $z' = 1 + y'$, y' определяется из (5). Получаем:

$z' = 1 + \frac{1}{z^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{z^2+1}{z^2}$.

Разделим переменные:

$\frac{z^2 dz}{z^2+1} = dx$.

Теперь можно интегрировать:

$\int \frac{z^2 dz}{z^2+1} = \int \frac{z^2+1-1}{z^2+1} dz = \int dz - \int \frac{dz}{z^2+1} = z - arctgz = x + c$, и возвращаясь к x и y:

$(x+y-2) - arctg(x+y-2) = x + c$.

2. Однородные уравнения могут быть записаны в виде

а) $y = f(x, y)$, где $f(x, y)$ - функция 0 – го измерения, т.е.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (6)$$

а также в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \qquad (7)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ - однородные функции одной и той же степени, т.е. $M(kx, ky) = k^m M(x, y)$, $N(kx, ky) = k^m N(x, y)$, например, M и N - однородные многочлены.

Однородное уравнение замены $\frac{y}{x} = t$, $t = t(x)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $xy' - 2y = x$.

Разрешить относительно производной:

$$y' = \frac{2y}{x} - 1 \qquad (8)$$

Уравнение имеет вид (6), т.е. является однородным.

Делаем замену $y = tx$. Тогда $y' = t'x + t$. Подставляем это в (8): $t'x + t = 2t - 1$, $t'x = t - 1$.

Разделим переменные и затем интегрируем:

$\frac{dt}{t-1}=\frac{dx}{x}$; $\int\frac{dt}{t-1}=\int\frac{dx}{x}+\ln c$, $\ln(t-1)\ln x+\ln c$, $t-1=cx$. Возвращаясь от t к y, получаем

$$\frac{y}{x}-1=cx,\ y=cx^2+x \qquad (c\neq 0) \qquad (9)$$

При делении на $t-1$ могло быть потеряно решение $t-1=0$, т.е. $t=1$, $y=x$. Подставляя в (8), видим, что $y=x$. Его можно получить по формуле (9), если допустить $c=0$.

Итак, все решения задаются формулой $y=cx^2+x$, c - произвольная постоянная.

Уравнение вида

б) $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ приводится в случае, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$ к однородному с помощью переноса начала координат:

$\begin{cases} x=u+\alpha \\ y=v+\beta \end{cases}$, где α и β - решения системы $\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0 \\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \end{cases}$

Если же $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$, то уравнение имеет вид (4) и решается заменой $z=a_1x+b_1y+c_1$.

Решить уравнение $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$.

Составим определитель $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0$, т.е. делаем перенос $\begin{cases} x=u+\alpha \\ y=v+\beta \end{cases}$ α и β найдем из системы $\begin{cases} 2\alpha-4\beta+6=0 \\ \alpha+_1\beta-3=0 \end{cases}$, $\begin{matrix} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{matrix}$

После замены $\begin{cases} x=u+1 \\ y=v+2 \end{cases}$ придем к однородному уравнению

$(2u-4v)dx+(u+v)dv=0$. Заменой $\frac{v}{u}=t$ приведем его к уравнению с разделяющими переменными $(t^2-3t+2)du=-(t+1)udt$.

$$\int\frac{du}{u}=-\int\frac{(t+1)dt}{t^2-3t+2}$$

после интегрирования и подстановки вместо $t=\dfrac{y-2}{x-1}$, получим,

$(y-2x)^3=c(y-x-1)^2$, $y=x+1$.

Пример. $(x-y-1)+(y-x+2)y'=0$.

Определитель $\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$.

Сделаем замену $x-y-1=t$, $y=x-t-1$, $y-x+2=x-t-1-x+2=t+1$, $y'=1-t'$.

подставим в уравнение

$t+(-t+1)(1-t')=0$, $1+(t-1)t'=0$, $(t-1)\dfrac{dt}{dx}=-1$, $(t-1)dt=-dx$, $\dfrac{t^2}{2}-t=-x+c$,

$\dfrac{(x-y-1)^2}{2}-(x-y-1)=-x+c$.

в) некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y=z^m$. Число m заранее не известно. Например, уравнение $2x^4yy'+y^4=4x^6$. Это уравнение будет однородным в том случае, когда степени всех его членов равны между собой, т.е. $4+m+m-1=4m=6$, отсюда $m=\dfrac{3}{2}$. Следовательно, уравнение можно заменить $y=z^{3/2}$ привести к однородному $y'=\dfrac{3}{2}z^{1/2}\cdot z^1$, $2x^4z^{3/2}\cdot\dfrac{3}{2}z^{1/2}\cdot z^1+z^6=4x^6$

$2x^4z^2z'+z^6=4x^6$ - однородное.

Заменой $\dfrac{z}{x}=t$ придем к уравнению с разделяющимися переменными: $z=tx$, $z'=t'x+t$

$2x^4\cdot t^2x^2(t'x+t)+t^6x^6=4x^6$, $\dfrac{2t^2dt}{t^6-2t^3+4}=\dfrac{dx}{x}$

$\dfrac{2}{3}\int\dfrac{dt^3}{(t^3)^2-2t^3+4}=\int\dfrac{dx}{x}$, $\qquad \dfrac{2}{3}\int\dfrac{d(t^3-1)}{(t^3-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\int\dfrac{dx}{x}$

$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}arctg\dfrac{t^3-1}{\sqrt{3}}=\ln|xc|$, $t=\dfrac{z}{x}=\dfrac{y^{2/3}}{x}$, $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}arctg\dfrac{y^1-x^3}{\sqrt{3}x^3}=\ln(xc)$

3. Линейным называют уравнение

$A(x)y'+B(x)y=Q(x)$(неприведенное, неоднородное)

И $\quad y'+P(x)y=R(x)$ (приведенное неоднородное) (10)

Его узнать среди других уравнений 1порядка можно по виду – линейное относительно y и y', с коэффициентами, зависящими от x.

Для интегрирования уравнения (10) применим метод Лагранжа (метод вариации произвольного постоянного).

Шаг 1. В начале проинтегрируем соответствующее нашему (10) однородное уравнение

$$y'+P(x)y=0 \tag{11}$$

Это уравнение с разделяющими переменными

$\frac{dx}{dy}=-P(x)y$, $\frac{\alpha y}{y}=-P(x)dx$

$y_{00}=ce^{-\int P(x)dx}$, где c - произвольная константа (12)

Шаг 2. Формула (12) наводит на мысль: искать y общее неоднородного в точно таком же виде, что и (12), только c возьмем как функцию от x.

$$y_{он}=c(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{13}$$

Осталось найти $c(x)$ из тех соображений, что (13) есть решение уравнения (10). Подставим (13) в (10).

$c'(x)e^{-\int P(x)dx}+c(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot(-P(x))+c(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot P(x)=R(x)$.

Слагаемые c, $c(x)$ подобны и разного знака.

Остается $c'(x)e^{-\int P(x)dx}=R(x)$, $c(x)=e^{\int P(x)dx}\cdot R(x)+\tilde{c}$, $\tilde{c}$ - произвольная константа

Шаг 3. Подставим $c(x)$ в $y_{он}$, получим $y_{он}=\left(e^{\int P(x)dx}\cdot R(x)+\tilde{c}\right)e^{-\int P(x)dx}$

Пример $y'=yctgx+\cos x$, $y'-yctgx=\cos x$.

Решим соответствующее однородное уравнение

$y'-yctgx=0$, $\frac{dy}{y}=yctgxdx$, $\ln|y|=\ln|\sin x|+\ln c_1 y_{00}=c\sin x$

Заменим c на $c(x)$ и подставим $y_{он}=c(x)\sin x$ в заданное уравнение.

$c'(x)\sin x + c(x)\cos x = c(x)\sin x\, ctgx + \cos x$

$c'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\qquad c(x) = \ln|\sin x| + c_1$

Получаем решение $y = c(x)\sin x - (\ln\sin x + c_1)\sin x$

2 способ интегрирования линейного уравнения носит название метод Бернулли: решение нашего уравнения ищется как произведение 2-ух функций $u(x)$ и $v(x)$, одну из которых мы выбираем как нам удобно, а вторая находится их тех соображений, что вместе это произведение $u(x)\cdot v(x)$ - есть решение данного уравнения.

Пример. Решить уравнение $\left(x + y^2\right)y' = y - 1$

Это уравнение линейно относительной функции $x(y)$

$x + y^2 = x'(y-1)$, $\ (y-1)x' - x = y^2$, $\ x' - \dfrac{x}{y-1} = \dfrac{y^2}{y-1}$.

Ищем $x(y) = u(y)\cdot v(y)$, $x' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \dfrac{uv}{y-1} = \dfrac{y^2}{y-1}$, группируем 1 с 3-им слагаемым или 2-ое с 3-им:

$$\left(u' - \frac{u}{y-1}\right)v + uv' = \frac{y^2}{y-1}$$

Полагаем $u' - \dfrac{u}{y-1} = 0$, $\ \dfrac{du}{u} = \dfrac{dy}{y-1}$, $\ \ln u = \ln(y-1) + \ln c$, $\ u = (y-1)c$

Пусть $c = 1$, тогда $u = y = 1$.

Оставшаяся часть уравнения дает следующее

$(y-1)v' = \dfrac{y^2}{y-1}$, $\ v' = \dfrac{y^2}{(y-1)^2}$

$$\int dv = \int\frac{y^2 - dy}{(y-1)^2} = \int\frac{y^2 - 2y + 2y + 1 - 1}{(y-1)^2} = \int\frac{(y-1)^2}{(y-1)^2}dy + \int\frac{2y-1-1+1}{(y-1)^2}dy = y + 2\int\frac{dy}{y-1} + \int\frac{dy}{(y-1)^2} =$$

$$= y + 2\ln|y-1| - \frac{1}{y-1} + c$$

$$v = y + 2\ln|y-1| - \frac{1}{y-1} + c.$$

Ответ. $x=(y-1)\left(y+2\ln(y-1)-\dfrac{1}{y-1}+c\right)$, $y=1$ (при делении потеряно).

К линейным уравнениям приводятся уравнения Бернулли и в ряде случаев уравнение Риккати.

Уравнение Бернулли имеет вид: $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$

Если $\alpha=1$, то это уравнение с разделяющимися переменными. Если $\alpha=0$, то это линейное уравнение.

Рассмотрим случаи $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$, тогда в каком надо убрать y^{α} справа (это «портит» линейность). Для этого разделим все уравнения на y^{α}.

$\dfrac{y'}{y^{\alpha}}+\dfrac{P(x)}{y^{\alpha-1}}=Q(x)$. 2-ое слагаемое показывает, что за новую функцию надо взять $z=\dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$, а продифференцировав ее, получим $z'=(1-\alpha)\dfrac{1}{y^{\alpha}}y'$, т.е. умножив уравнение на $(1-\alpha)$ в 1-ом слагаемом получим z'.

Уравнение принимает линейный вид $z'+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$.

Пример. Решить уравнение $y'=3y+y^2e^x$.

$y'-3y=y^2e^x$, делим обе части на y^2: $\dfrac{y'}{y^2}-\dfrac{3}{y}=e^x$.

$z=\dfrac{1}{y}$, $z'=-\dfrac{y}{y^2}$, $-z'-3z=e^x$, $z'+3z=-e^x$ - линейное.

Интегрируем его $z'+3z=0$, $\dfrac{dz}{z}=-3dx$, $\ln z=-3x-\ln c$, $z_{00}=e^{-3x}\cdot c$.

$z_{он}=e^{-3x}\cdot c(x)$, $-3e^{3x}\cdot c(x)+3e^{-3x}\cdot c'(x)+3c(x)e^{-3x}=e^x$

$c'(x)=e^{4x}$, $c(x)=\dfrac{1}{4}e^{4x}+\tilde{c}$, $z_{он}=e^{-3x}\left(\dfrac{e^{4x}}{4}+\tilde{c}\right)=\dfrac{e^x}{4}+\tilde{c}e^{-3x}$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{e^x}{4}+\tilde{c}e^{-3x}$.

Уравнение Риккати, т.е. $y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$ в общем случае не интегрируется в квадратурах. Если же известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y=y_1(x)+z$ уравнение. Риккати сводится к уравнению Бернулли и таким образом может быть решено в квадратурах. Например, для уравнения

$y'+y^2=x^2-2x$ в левой части будут члены, подобные членам в правой части, если взять $y=ax+b$.

Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах найдем a и b (если частное решение указанного вида существует, что не всегда бывает). Другой пример для уравнения $y'+2y^2=6/x^2$ те же рассуждения побуждают нас искать частное решение в виде a/x.

Подставляем $y=\dfrac{a}{x}$, $y'=-\dfrac{a}{x^2}$ в уравнение найдем постоянную a.

$-\dfrac{a}{x^2}+2\dfrac{a^2}{x^2}=\dfrac{6}{x^2}$, $2a^2-a^2-6=0$. Имеем $a=2$, $a=-3/2$.

Возьмем $a=2$ частное решение имеет вид $\dfrac{2}{x}$. Сделаем замену $y=\dfrac{2}{x}+z$,

$y'=-\dfrac{2}{x^2}+z'$

$-\dfrac{2}{x^2}+z'+2\left(\dfrac{2}{x}+z\right)^2=\dfrac{6}{x^2}$, $z'+\dfrac{8}{x}z=-2z^2$ - уравнение Бернулли.

Делим на z^2: $\dfrac{z'}{z^2}+\dfrac{8}{x}\cdot\dfrac{1}{z}=-2$, сделаем замену $u=\dfrac{1}{z}$, тогда $-u'+\dfrac{8}{x}\cdot u=-2$ или

$u'-\dfrac{8}{x}\cdot u=2$ - линейное уравнение.

Решаем методом Лагранжа: $u'-\dfrac{8}{x}\cdot u=0$, $u_{00}=x^8\cdot c$, где c - произвольная константа.

Ищем $u_{он}=x^8\cdot c(x)$. Подставим в уравнение:

$8x^7\cdot c+8x^7\cdot c'-\dfrac{8}{x}\cdot x^8\cdot c=2$, $c'=\dfrac{2}{x^8}$, $c=-\dfrac{2}{7x^7}+\tilde{c}$

И тогда $u_{он}=x^8\left(-\dfrac{2}{7x^7}+\tilde{c}\right)=-\dfrac{2}{7}x+\tilde{c}x^8$.

$\dfrac{1}{z}=-\dfrac{2}{7}x+\tilde{c}x^8$, $z=\dfrac{1}{-\dfrac{2}{7}x+\tilde{c}x^8}=\dfrac{7}{-2x+7\tilde{c}x^8}$, $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{-2x+7\tilde{c}x^8}$.

4. Уравнения в полных дифференциалах

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad (14)$$

Называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть равна полному дифференциалу от некоторой функции $F(x,y)$, т.е. $F'xdx+F'ydy=0$. Для этого необходимо и достаточно чтобы $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

Общее решение уравнения в полных дифференциалах записывается в неявной форме: $F(x,y)=c$.

Например. Решить уравнение:

$$\left(y^3-5x^4\right)dx+\left(3xy^2+2y\right)dy=0 \qquad (15)$$

Так как $\left(y^3-5x^4\right)'y=3y^2$, $\left(3xy^2+2y\right)'x=3y^2$, то (15) – уравнение в полных дифференциалах. Найдем такую функцию $F(x,y)$, у которой полный дифференциал $dF=F'x+F'ydy$ равен левой части уравнения (15), т.е. такую функцию F, что

$$F'_x=y^3-5x^4,\quad F'y=3xy^2+2y \qquad (16)$$

Интегрируем по x первое из уравнений (16), считая y постоянным. Вместо постоянной интегрирования пишем $f(y)$: $F=\int\left(y^3-5x^4\right)dx=xy^3-x^5+\varphi(y)$.

Подставляя это во второе уравнение (16), находим $\varphi(y)$:

$\left(xy^3-x^5+\varphi(y)\right)'y=3xy^2+2y$, $\varphi'(y)=2y$, $\varphi(y)=y^2+const$.

Можно взять $F(x,y)=xy^3-x^5+y^2$. Общее решение уравнения (15) имеет вид $xy^3-x^5+y^2=c$.

Если условие $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ не выполнено, можно воспользоваться нахождением интегрирующего множителя.

Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (17)$$

Называется такая функция $m(x,y)\neq 0$, после умножения, на которую уравнение (17) превращается в уравнение в полных дифференциалах. Если функции M и N в уравнении (17) имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то интегрирующий множитель существует. Однако нет общего метода для его отыскания. Помочь может формула, полученная из условия Коши: $\frac{\partial(m\,M)}{\partial y}=\frac{\partial(n\,N)}{\partial x}$,

С учетом, что $m(x,y)$ как функция, от u которая есть функция от x и y.

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial u}{\partial x}-M\frac{\partial u}{\partial y}}du \tag{18}$$

Чаще всего в роли u пробуют $u=x$, $u=y$, $u=x^2$, $u=y^2$, $u=xy$, $u=xy^2$, $u=x^2y$, $u=\frac{x}{y}\ldots$

Например $$y^2dx-\left(xy+x^3\right)dy \tag{19}$$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-y-3x^2$

По формуле (18) имеем: $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{3\left(y+x^2\right)}{-x\left(y+x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial y}}du$.

Пусть $u=x$, тогда $\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{3dx}{x}$, откуда $\mu=\frac{1}{x^3}$.

Умножим уравнение (19) на $\frac{1}{x^3}$: $\frac{y^2}{x^3}dx-\frac{y+x^2}{x^2}dy=0$.

Для последнего условия Коши: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2y}{x^3}$.

Т.е. это уравнение есть уравнение в полных дифференциалах

$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y^2}{x^3}\\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{y+x^2}{x^2}\end{cases}$, отсюда $F=\int\frac{y^2}{x^3}dx=\frac{y^2}{2x^2}+\varphi(y)$

Подставим во второе уравнение: $\frac{-y}{x^2}+\varphi'(y)=\frac{-y}{x^2}+1$, $\varphi'(y)=1$, $\varphi(y)=y+\tilde{c}$

Ответ $\frac{-y}{2x^2}+y=c$.

Определить тип каждого из следующих уравнений и решить их:

1. $yy' = xy + 1$

2. $xy' = x^2 + y^2$

3. $(x-1)y' + xy = 0$

4. $y' tgx - y = 3$

5. $y' + 2xy^2 = 2xy$

6. $(y-x)^2 y' = 1$

7. $y' = \sqrt{2x + y + 1}$

8. $x^2 y' = 2xy - y^2$

9. $(x+y)y' = y - x$

10. $2xyy' = x^2 + y^2$

11. $(x+y)y' = 4y - 2x + 6$

12. $(xy+1)y' + y^2 = 0$

13. $xy' = x^3 + 2y$

14. $xy' = e^x + xy$

15. $(x-1)dy = (x^2 + y)dx$

16. $(\cos y - xtgy)y' = 1$

17. $x^2 y' + xy = (x+1)y^3$

18. $xyy' = y^2 + x - 1$

19. $(x^2 + e^y)dx + (xe^y + 2y)dy = 0$

20. $(2xy - 4x^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

21. $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2$

22. $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$

23. $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right)dy$

24. $(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$

25. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}dx$

26. $\left(x\cos y + \sin 2y\right)y' = 1$

27. $\left(2xy^2 - y\right)dx + xdy = 0$

28. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

29. $xy' = 2\sqrt{y}\cos - 2y$

30. $xy'\left(\ln y - \ln x\right) = y$

II. Уравнения, не разрешенные относительно производной

1. Методы решения уравнения вида $F\left(x, y, y'\right) = 0$.

А. Разрешить уравнение относительно y', т.е. выразить y' через x и y. Получится одно или несколько уравнений вида $y' = f\left(x, y\right)$. Каждое из них надо решить.

Пример 1. Решить уравнение $y'^2 = 4y$.

Разрешаем относительно производной: $y' = \pm 2\sqrt{y}$.

Решаем полученные уравнения: $\pm\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$, $\pm\sqrt{y} = x + c$, $y = \left(x + c\right)^2$.

Кроме того, при делении на $\sqrt{y}$ потеряно решение $y = 0$.

Б. Метод введения параметра. Пусть уравнение $F\left(x, y, y'\right) = 0$ можно разрешить относительно y, т.е. записать в виде $y = f\left(x, y'\right)$. Вводя параметр $p = y'$, т.е $p = \frac{dy}{dx}$, получаем

$$y = f\left(x, p\right) \qquad (1)$$

Так как $dy = pdx$, а из (1) имеем $dy = f'_x dx + f'_p dp$, то

$$pdx = f'_x dx + f'_p dp \qquad (2)$$

Это уравнение легко разрешается относительно $\frac{dx}{dp}$. Если его решение найдено в виде $x = \varphi\left(p\right)$, то с помощью (1) получаем решение исходного уравнения в параметрической записи: $x = \varphi\left(p\right)$, $y = f\left(\varphi\left(p\right), p\right)$.

Этим же способом решаются уравнения вида $x = f(y, y')$.

Пример 2. Решить уравнение $y = x + y' - \ln y'$.

Вводим параметр $p = y'$:

$$y = x + p - \ln p \qquad (3)$$

Отсюда $dy = dx + dp - \frac{dp}{p}$, а из равенства $y' = p$ имеем $dy = pdx$. Поэтому

$pdx = dx + dp - \frac{dp}{p}$, $(p-1)dx = \frac{p-1}{p}dp$.

А. Если $p \neq 1$, то сокращаем на $p-1$, $dx = \frac{dp}{p}$, $x = \ln p + c$.

Подставляя это в (3), получаем решение в параметрической записи $x = \ln p + c$, $y = p + c$.

Исключив p, можно получить решение в явном виде:

$$y = e^{x-c} + c \qquad (4)$$

Б. Если $p = 1$, то подставляя $p = 1$ в (3), получаем еще решение $y = x + 1$. (Было бы ошибкой в равенстве $p = 1$ заменить p на y' и, проинтегрировав, получить $y = x + c$.)

Пример 3. $y^{12} - 4xy' + 8y^2 = 0$. Это – уравнение первой степени относительно x, разрешаем его (y' обозначим p): $x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}$.

Дифференцируем обе части по y, считая p функцией y и заменяя $\frac{dy}{dx}$ через p.

Получим: $\frac{1}{p} = \left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right)\frac{dp}{p^2} - \frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}$.

Преобразуем: $\frac{dp}{dy}\frac{p^2 - 4y^2}{2yp^2} = \frac{p^3 - 4y^2}{4y^2 p}$.

Деля обе части на общий множитель $p^3 - 4y^2$, мы получаем уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$; интегрируя, находим: $p = cy^{1/2}$. Внося это выражение в данные уравнения, получаем: $c^2 y^{3/2} - 4cxy^{3/2} + 8y^2 = 0$.

Откуда выделяя частное решение $y=0$, находим: $c4y=\left(4cx-c^3\right)^2$.

Или, вводя новое постоянное $c_1=\frac{c^2}{4}$, $y=c_1\left(x-4\right)^2$.

Приравнивая $p^3-4y^2=0$ и исключив p из полученного уравнения и из первоначального получим $y=\frac{4}{27}x^3$, $y=0$.

2. Особым решением уравнения $F\left(x,y,y'\right)=0$ называется решение, которого в каждой точке касается другое решение, отличное от данного в сколь угодно малой окрестности этой точки. Так, в примере 1 решения $y=0$ в каждой точке касается одна из парабол $y=\left(x+c\right)^2$, которые тоже являются решениями. Следовательно, решение $y=0$ - особое.

Чтобы найти особое решение уравнения $F\left(x,y,y'\right)=0$ (предполагается, что F, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial y'$ непрерывны), надо исключить y' из уравнений $F\left(x,y,y'\right)=0$, $\frac{\partial F\left(x,y,y'\right)}{\partial y}=0$.

Полученное уравнение $\psi\left(x,y\right)=0$ называется уравнением дискриминантной кривой. Каждую ветвь дискриминантной кривой надо проверить:

а) является ли она решением данного уравнения $F\left(x,y,y'\right)=0$ (подставив ее в это уравнение);

б) касаются ли этого решения в каждой точке другие решения.

Если на оба вопроса ответ утвердительный, то исследуемая ветвь является особым решением.

Пример 4. Найти особое решение уравнения

$$y=x+y'-\ln y'. \qquad (5)$$

От обеих частей равенства возьмем производную по y'

$$0=1-\frac{1}{y'} \qquad (6)$$

Исключаем y' из равенств (5) и (6). Из (6) имеем $y'=1$, подставляя в (5), получаем дискриминантную кривую $y=x+1$. Будет ли она решением?

Подставляя $y = x+1$ в (5), получаем тождество, значит, $y = x+1$ - решение. Будет ли оно особым, т.е. касаются ли его в каждой точке другие решения? Условие касания двух кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в точке x_0 состоит в одновременном выполнении двух равенств

$$y_1(x_0) = y_2(x_0),\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \tag{7}$$

У нас $y_1 = x+1$, а другие решения имеют вид (4), т.е. $y_2 = e^{x-c} + c$. Подставляя это в условие касания (7), получаем: $x_0 + 1 = e^{x_0 - c} + c$, $1 = e^{x_0 - c}$.

Из второго равенства $c = x_0$, подставляя в первое, получаем $x_0 + 1 = 1 + x_0$. Это справедливо при всех x_0. Значит, при каждом x_0 решение $y = x+1$ - особое.

Пример 5. Пусть известно семейство решений

$$y = cx - c^2 \tag{8}$$

дифференциального уравнения. Найти его особое решение.

Особое решение в каждой точке касается кривой из семейства (8), т.е. является огибающей семейства. Чтобы найти огибающую, надо продифференцировать обе части уравнения (8) по c и из полученного равенства $0 = x - 2c$ и из (8) исключить c. Имеем $c = \frac{x}{2}$; $y = \frac{x}{2} \cdot x - \left(\frac{x}{2}\right)^2$; $y = \frac{x^4}{4}$.

Полученная кривая $y = \frac{x^4}{4}$ в каждой точке касается одного из решений семейства (8) (проверьте условие касания, как в примере 4). Следовательно, эта кривая – огибающая семейства решений, т.е. особое решение.

3. Уравнение Лагранжа. Изложение преобразования приводит уравнение, не разрешенное относительно производной, к новому уравнению, которое является разрешением относительно производной; но это новое уравнение, вообще говоря, не интегрируется в квадратурах. Сейчас мы рассмотрим тип уравнений, неразрешенных относительно производных, в применении к которым метод дифференцирования всегда приводим уравнению, интегрируемому в квадратурах. Это – уравнение Лагранжа. Так называется уравнение, линейное относительно x и y, т.е. уравнение вида:

$A(p)y+B(p)x=C(p)$,

где коэффициенты A, B, C - даже дифференцируемые функции производной $p=\frac{dy}{dx}$. Разрешая это уравнение относительно y (мы предполагаем, что $A(p)\neq 0$), приводим его к виду

$y=\varphi(p)x+\psi(p)$

Продифференцируем его по x, считая p - функцией от x,

$p=\varphi(p)+\left[\varphi'(p)x+\psi'(p)\right]\frac{dp}{dx}$.

Если в этом уравнении рассматривать x как искомую функцию, p - как независимое переменное, то получим линейное уравнение:

$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}$.

Оно интегрируется в квадратурах, решение имеет вид: $x=c\omega(p)+\chi(p)$.

Внося найденные выражения x в данные уравнения, получим выражение вида:

$yc\left[c\omega(p)+\chi(p)\right]\varphi(p)+\psi(p)$.

Таким образом, две переменных выражены в функцию параметра p, если исключить этот параметр, получим общий интеграл Лагранжа в форме

$P(x,y,c)=0$.

Примечание: Приведение к линейному уравнению невозможно, если $\varphi(p)-p=0$. Случай $\varphi(p)-p\equiv 0$ рассмотрим в следующем разделе. Допустим теперь, что для некоторого значения $p=c_0$ мы имеем $\varphi(c_0)-c_0=0$, тогда полученное уравнение допускает решение $p=c_0$, подставляя в уравнение Лагранжа это значение p, получает $y=\varphi(c_0)x+\psi(c_0)$. Можно проверить, что это есть решение уравнения Лагранжа. Можно убедиться, что оно не содержится а формуле общего решения.

Пример: $y = 2px + p^2$. Дифференцируем по x, считая p и y функциями x и заменяя $\frac{dy}{dx}$ через p, имеем $p = 2p + 2(x+p)\frac{dp}{dx}$.

Разрешая относительно $\frac{dx}{dp}$, находим $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$, решения этого уравнения $x = \frac{c}{p^2} - \frac{2p}{3}$ Вставляя это выражение в данное уравнение, находим $y = \frac{2c}{p} - \frac{p^2}{3}$.

Итак, мы выразили x и y в функции параметра p и произвольного постоянного c, мы получим общее решение в параметрической форме.

Кроме этого решения имеется еще решение $y = 0$.

4. Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа: оно имеет вид:

$$y = px + \varphi(p),$$

где φ - данная (дифференцируемая функция). Продифференцируем обе части по x, получаем:

$p = p + \left[x + \varphi'(p)\right]\frac{dp}{dn}$ или $\frac{dp}{dx}\left(x + \varphi'(p)\right) = 0$.

Исследуем оба множителя лево части последнего уравнения.

Первый множитель дает дифференциальное уравнение $y = Cx + \varphi(C)$.

Итак, общее решение уравнения Клеро получается заменой p на произвольное постоянное c.

Прорешиваем второй множитель $x + \varphi'(p) = 0$. Определяет p как функцию от x, $p = \omega(x)$, если подставить это значение p в уравнение Клеро, то получим: $y = x\omega(x) + \varphi(\omega(x))$.

Можно также подставить значение $x = -\varphi'(p)$ в уравнение Клеро получить ту же кривую в параметрической форме $x = -\varphi'(p)$, $y = -p\varphi(p) + \varphi(p)$

Это есть особое решение – огибающая.

5. Решить следующие уравнения и указать их особые решения, если они имеются.

1) $y^{12} + xy = (x+y)y'$. 2) $9y^{12} - 4y^5 = 0$.

3) $y^{13} - y'e^{2x} = 0$.

4) $xy^{13} = y' + 1$.

5) $xy^{12} = 2yy' - x$.

6) $y = y' \ln y'$.

7) $y^{12} + e^{x} = yy'$.

8) $xy' + y = \ln y'$.

9) $y = 2xy' - y^{13}$.

10) $y = xy' - 3y^{13}$.

11) $y^{12} + 4y = 2xy' + x^{2}$.

12) $y^{13} + (3x - 6)y' = 3y$.

13) $(xy' + y)^{2} = x^{2}y'$.

14) $y^{13} - y'e^{2x} = 0$.

15) $y = (xy' + 2y)^{2}$.

16) $y^{13} + (3x - 6)y' = 3y$.

17) $x^{2}y^{12} + y^{2} = (2 - yy')$.

18) $3y^{13} - xy + 1 = 0$.

19) $2xy' - y = \sin y'$.

20) $2y' = x + \ln y'$.

21) $y^{2}(y - xy') = x^{3}y'$.

22) $y^{2} + x^{2}y^{15} = xy\left(y'^{2} + y^{13}\right)$.

23) $y^{13} + \left(y'^{2} - 2y'\right)x = 3y' - y$.

24) $x^{2}y^{12} - 2(xy - 2)y' + y^{3} = 0$.

25) $y = y'\sqrt{1 + y^{12}}$.

26) $xy' = 2y + \sqrt{1 + y^{12}}$.

27) $x^{2}(y - xy') = yy^{12}$.

28) $(y - 2xy')^{2} = 4yy^{13}$.

29) $(xy' - y)^{2} = \dfrac{y^{12}}{x} + 1$.

30) $x\left(y'^{2} + e^{2y}\right) = -2y$.

Методические указания к самостоятельной работе студентов и задания (темы 3 и 4) по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Уравнение высших порядков

Выделим основные пути интегрирования уравнений высших порядков.

А. Уравнения, не содержащие независимой переменной. Эти уравнения имеют вид

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Введем новую неполную функцию по формуле

$$y' = z \qquad (2)$$

и примем y за независимую переменную. Выразим $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ через функцию z и ее производные.

Имеем $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$; $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}z\right) = \left[\frac{d^2z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z \dots$

$$y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right).$$

Поэтому искомое уравнение примет вид

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}z, \dots, \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)\right). \qquad (3)$$

Это уравнение $n-1$ - го порядка. Если, решая его, найдем общее решение $z = \varphi(y, c_1, \dots, c_{n-1})$, то, возвращаясь к искомой функции y, получим уравнение

$$y' = \varphi(y, c_1, \dots, c_{n-1}). \qquad (4)$$

Проинтегрировав его, найдем общий интеграл уравнения (1).

Особые решения уравнения (3) могут привести к особым решениям уравнения (1) в силу подстановки (2). Далее особые решения могут возникнуть вследствие интегрирования (4). Наконец, мы могли потерять решения вида $y = const$, принимая за независимую переменную. Поэтому нужно положить в уравнение (1) $y = m$. Будем иметь $F(m, 0, \dots, 0) = 0$.

Если полученное уравнение имеет вещественные корни $m = m_i$, то уравнение (1) допускает решения вида $y = m_i$.

Пример. Дано уравнение $yy'' = y'^2$.

Полагая $y' = z$ и принимая y за независимую переменную, имеем $y'' = \frac{dz}{dy}$, так что искомое уравнение примет вид $y = \frac{dz}{dy} = z^2$.

Разделив на z (при этом равенство $z = 0$ дает $y = const$, что мы пока отбросим, ибо приняли y за независимую переменную), интегрируя по частям, получим $z = yc_1$; возвращаясь к функции y, придем к уравнению $y' = yc_1$. Интегрируя еще раз, придем к общему интегралу искомого уравнения $y = e^{c_1 x} c_2$. Положим теперь в искомом уравнении $y = n$, получим $m \cdot 0 = 0^2$. Так как любое m удовлетворяет этому уравнению, то исходное уравнение допускает семейство решений $y = c$, где c - произвольная постоянная.

Б. Уравнение, не содержащее искомой функции, и уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных, имеют следующий общий вид:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0, \ (k < n) = 0 \qquad (5)$$

Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц при помощи введения новой искомой функции z по формуле

$$y^{(k)} = z. \qquad (6)$$

Получаем

$$F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0. \qquad (7)$$

Предположим, что это уравнение интегрируется в конечном виде и

$$z = \varphi\left(x, c_1, c_2 ..., c_{n-k}\right) \qquad (8)$$

есть решение этого уравнения. Тогда $y^{(k)} = \varphi\left(x, c_1, c_2 ..., c_{n-k}\right)$.

Интегрируя это уравнение, найдем общее решение данного уравнения (5). Особым решением уравнения (7) соответствуют особые решения уравнения (5).

Пример. Дано уравнение $4y' + y''^2 = 4xy''$

Положим $y' = z$. Тогда $4z + z^2 = 4xz'$ или $z = xz' - \frac{z'^2}{4}$.

Это уравнение Клеро. Его общее решение имеет вид $z = cx - \frac{c^2}{4}$.

Поэтому: $y' = cx - \frac{c^2}{4}$. Откуда $y = c_1 x\left(x - c_1\right) + c_2$, $\left(c_1 = \frac{c}{2}\right)$.

Это и есть общее решение исходного уравнения.

Уравнение $z = xz' - \frac{z'^2}{4}$ имеет особое решение $z = x^2$. Ему соответствует уравнение $y' = x^2$. Поэтому $y = \frac{x^3}{3} + c'$, где c' - произвольная постоянная – тоже является решением заданного уравнения. Легко видеть, что это решение особое.

В. Уравнение $$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{9}$$

в котором левая часть является однородной функцией относительно $y, y', ..., y^{(n)}$, т.е. $F\left(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)$ допускает понижение порядка на единицу при помощи подстановки

$$y' = yz, \tag{10}$$

где $z = z(x)$ есть новая неизвестная функция.

В самом деле, дифференцируя последовательно (10), заменяя каждый раз y на yz, получим

$$y'' = y'z + yz' = y\left(z^2 + z'\right);$$

$$y''' = y\left(z^3 + 3zz' + z''\right);$$

……………………..

$$y^{(n)} = yu\left(z, z', ..., z^{(n-1)}\right).$$

Поэтому, выполняя в уравнении (9) подстановку (10) и пользуясь предложенной однородностью функции F, получим

$$y^m F\left(x, 1, z, z^2+z', ..., \omega\left(z, z', ..., z^{(n-1)}\right)\right)=0 \qquad (11)$$

Сокращая на y^m, находим уравнение $(n-1)$ - го порядка

$$F\left(x, 1, z, z^2+z', ..., \omega\left(z, z', ..., z^{(n-1)}\right)\right)=0 \qquad (12)$$

Пусть $z=\varphi(x, c_1, c_2 ..., c_{n-1})$ есть общее решение уравнения (11). Тогда $y'=\varphi(x, c_1, c_2 ..., c_{n-1})\,y$.

Интегрируя это линейное однородное уравнение, получим $y=c_n e^{\int \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_{n-1})dx}$, т.е. общее решение уравнения (9).

Особые решения уравнения (12) могут привести к особым решениям уравнения (9).

Пример. Уравнение, рассмотренное в п. А, может быть рассмотрено как однородное относительно $y, y', ..., y^{(n)}$ и, следовательно, проинтегрировано методом п. В.

Дано уравнение: $yy''=y'^2$.

Полагая $y'=yz$, имеем $y''=y\left(z^2+z'\right)$. Поэтому уравнение перепишется так: $y^2\left(z'+z^2\right)=y^2z^2$. Сокращая на y^2, получаем $z'+z^2=z^2$.

Это уравнение имеет решение $z=c_1$, заменяя z на $\frac{y'}{y}$, будем иметь $\frac{y'}{y}=c_1$.

Интегрируя еще раз, получим $y=e^{c_1x}c_2$. Уравнение имеет еще решение $y=c$, не содержащееся в предыдущей формуле.

Г. Уравнение (9) называется обобщенным однородным, если существует такое постоянное вещественное k, что левая часть этого уравнения становится однородной функцией некоторой степени относительно всех аргументов при условии, что $x, y, y', ..., y^{(n)}$ считаются величинами соответственно I-го, k-го, $k-1$-го,…, $k-n$-го измерений, так что при всех t выполняется тождество

$F\left(tx, t^k y, t^{k-1}y', ..., t^{k-n}y^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)$.

Это уравнение допускает понижение порядка на единицу, ибо при помощи замены независимой переменной x и неизвестной функции y по формулам

$x = e^t$, $y = ze^{kt}$

придем к уравнению, которое не содержит независимой переменной и, поэтому, согласно сказанному выше, допускает понижение порядка на единицу.

Пример. Рассмотрим уравнение $x^3 y'' + 2xyy' - x^2 y'^2 - y^2 = 0$.

Считая x, y, y', y'' соответственно величинами I-го, k-го, $k-1$-го, $k-2$-го измерений, составляем условие, определяющее k, т.е. условие, при котором все члены будут одного измерения. Первый член $x^3 y''$ имеет измерение $3+k-2$, ибо x^3 имеет измерение 3, а y'' - измерение $k-2$. Измерение второго члена $2xyy'$ равно $1+k+(k-1)$. Третий член $\left(-x^2 y'^2\right)$ имеет измерение $2+2(k-1)$. Наконец, измерение последнего члена $\left(-y^2\right)$ равно $2k$. Приравнивая все эти измерения, получаем условия, определяющие k:

$1+k = 2k = 2k = 2k$.

Это условие будет выполнено при $k=1$. Следовательно, рассматриваемое уравнение является обобщенным однородным.

Делаем подстановку $x = e^t$, $y = ze^t$.

Тогда $y'_x = \dfrac{dy}{dt}c^{-t} = \dfrac{dz}{dt} + z$; $y'' = \dfrac{dy'}{dt}e^{-t} = \left(\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{dz}{dt}\right)e^{-t}$, так что после подстановки получим уравнение $z'' + z' - z'^2 = 0$, которое не содержит не зависимую переменную t. Положим $z' = u$ и примем z за независимую переменную. Тогда $z'' = u'u$, и мы имеем $u'u + u - u^2 = 0$.

Сократив на u, получаем $u' + 1 - u = 0$, откуда $u = c_1 e^z + 1$, но $u = z'$ поэтому $z' = c_1 e^z + 1$.

Интегрируя, находим $c_2\left(c_1 + e^{-z}\right) = e^{-t}$, откуда $z = \ln \dfrac{c_2 e^t}{1 - c_1 c_2 e^t}$.

Возвращаясь к переменным x и y, получим общее решение $y = x\ln\frac{c_2 x}{1 - c_1 c_2 x}$.

Равенство $u = 0$ приводит к семейству частных решений $y = cx(x \neq 0)$.

Студентам предлагается самостоятельно решить пять заданий. В 4-м и 5-м заданиях предлагается использовать идеи составления дифференциальных уравнений в физических и геометрических задачах, какие приводились в теме «Дифференциальные уравнения первого порядка», с тем лишь дополнением, что ускорение заменяется на вторую производную в физических задачах, в геометрических задачах вторая производная входит в формулу кривизны кривой.

Например, предлагается такая задача:

Луч света из воздуха показатель преломления m_0 падает под углом α_0 с вертикалью в жидкость с переменным показателем преломления. Последний линейно зависит от глубины и постоянен в плоскости, параллельной горизонту; на поверхности жидкости он равен m_1, а на глубине h_1 он равен m_1 Найти форму светового луча в жидкости показатель преломления среды обратно пропорционален скорости распространения света.

Решение.

Пусть ось абсцисс направлена вертикально вниз, начало координат на поверхности жидкости, уравнение луча $y = f(x)$. На глубине x имеем $\frac{\sin\alpha}{\sin(d + d\alpha)} = \frac{m + dm}{m}$, где m - показатель преломления на глубине x, а α - угол между вертикалью и касательной к световому лучу. Очевидно, $tg\alpha$ равняется y'. Из уравнения $m\sin\alpha = (m + dm)(\sin\alpha\cos d\alpha + \cos\alpha\sin d\alpha)$, раскрыв скобки и отбросив бесконечно малые порядка выше первого, получим $md\alpha = -dmtg\alpha$.

Откуда $\frac{dm}{m} = -\frac{dy'}{y'(1 + y'^2)}$.

Интегрируя это уравнение, найдем y', как функцию m. Подставляя вместо m его выражение через x и интегрируя вторично, получим ответ $y=\frac{m_0 h\sin\alpha_0}{m_2-m_1}\cdot\ln\left[m+\sqrt{h^2-m_0{}^2\sin^2\alpha_0}\right]+c_1$.

Задание №1.

Уравнение, не содержащее аргумента:

1. $yy''^2=1$
2. $1+y'^2=2yy''$
3. $2yy''-3y'^2=4y^2$
4. $2(2a-y)y''=1+y'^2$
5. $y^4-y^3y''=1$
6. $y''(1+yy')=y'(1+y'^2)$
7. $2y'^2=(y-1)y''$
8. $2yy''+y'^2+y'^4=0$
9. $(2y+y')y''=y'^2$
10. $yy''+y-y'^2=0$
11. $yy''-2yy'\ln y-y'^2=0$
12. $yy''-y'^2=y^2$
13. $y''/y'=2yy'/(1+y^2)$
14. $y''^2=y'^2+1$
15. $y^4-y^3y''=1$
16. $y'^2+2yy''=0$
17. $y'''y'^2=y''^3$
18. $y''+y'^2=2e^{-y}$
19. $y''^2-2y'y'''+1=0$
20. $yy''=y'^2-y'^3$
21. $y^3y''=1$
22. $y'^2=(3y-2y')y''$

23. $2yy'' = y^2 y'^2$

24. $y'' tgy = 2y'^2$

25. $yy' + y = y'^2$

26. $(y-1)y'' = 2y'^2$

27. $(y' + 2y)y'' = y'^2$

28. $3y'' = y^{-5/3}$

29. $y'' = e^{2y}$

30. $y'' = 1/\sqrt{y}$

Задание №2

Уравнение, не содержащее функцию:

1. $y''(e^x + 1) + y' = 0$
2. $y''^2 + y' = xy''$
3. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$
4. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$
5. $2xy'y'' = y'^2 - 1$
6. $y'' = 2(y'' - 1)ctgx$
7. $y''^3 + xy'' = 2y'$
8. $y''^2 = y'^2 + 1$
9. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$
10. $y''(2y' + x) = 0$
11. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$
12. $y'''y'^2 = y'''^3$
13. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$
14. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$
15. $xy'' = y' \ln y' / x$
16. $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$

17. $\left(1-x^2\right)y''+xy'-2=0$

18. $\left(1+e^x\right)y''+y'=0$

19. $x^2y'''=y''^2$

20. $y'''=y'^2$

21. $y''tgy=2y'^2$

22. $xy'''+y''-x-1=0$

23. $y''+2xy'^2=0$

24. $xy''=y'+x\sin y'/x$

25. $x^2\left(y''^2-y'y'''\right)=y'^2$

Задание №3

В следующих задачах понизить порядок данных уравнений, пользуясь их однородностью, и решить эти уравнения:

1. $x^2yy''-2x^2y'^2+xyy'+y^2=0$
2. $x^2yy''=\left(y'-xy'\right)^2$
3. $x^2\left(yy''-y'^2\right)+xyy'=y\sqrt{x^2y'^2+y^2}$
4. $xyy''+xyy'^2-yy'=0$
5. $xyy''-xy'^2=yy'$
6. $yy''=y'^2+15y^2\sqrt{x}$
7. $\left(x^2+1\right)\left(y'^2-yy''\right)=xyy'$
8. $xyy''+xy'^2=2yy'$
9. $x^2yy''=\left(y-xy'\right)^2$
10. $y\left(xy'+y'\right)=xy'^2\left(1-x\right)$
11. $x^2yy''+y'^2=0$
12. $xyy''=y'\left(y+y'\right)$
13. $x^3y''=\left(y-xy'\right)\left(y-xy'-x\right)$
14. $x^2\left(2yy''-y'^2\right)=1-2xyy'$

15. $x^2\left(yy''-y'^2\right)+xyy'=\left(2xy'-3y\right)\sqrt{x^3}$

16. $x^4\left(y'^2-2yy''\right)=4x^3yy'+1$

17. $yy'+xyy''-y'^2=x^3$

18. $\left(2y+y'\right)y''=y'^2$

19. $y''+2xy'^2=0$

20. $xyy''+xy'^2=2yy'$

21. $2yy''-3y'^2=4y^2$

22. $y''+y'/x+y/x^2=y'^2/y$

23. $y^2/x^2+y'^2=3xy''+2yy'$

24. $y''=\left(2xy-5/x\right)y'+4y^2-4y/x^2$

25. $y''x^2=y-xy'$

I. Линейные дифференциальные уравнения

1. Следующие теоремы являются основными в теории линейных дифференциальных уравнений.

   Общее решение линейного однородного уравнения n - ого порядка имеет вид

   $y=c_1y_1+...+c_ny_n$,

   где $y_1...,y_n$ - линейно-независимые решения, $c_1...,c_n$ - произвольные постоянные.

   Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме его частного решения и общего решения линейного однородного уравнения.

   Аналогичные теоремы справедливы для линейных систем.

2. Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

   $$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (1)$$

   надо найти все корни λ характеристического уравнения

   $$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda'+a_n=0 \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (1) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $c_j e^{\lambda jx}$ для каждого простого корня λ_j, уравнения (2) и слагаемых вида

$$\left(C_{m+1}+C_{m+2}x+\ldots+C_{m+k}x^{k-1}\right)e^{\lambda x} \qquad (3)$$

для каждого кратного корня λ уравнения (2), где k - кратность этого корня. Все c_j - произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (1) и корни λ здесь могут быть вещественными или комплексными.

Если же все коэффициенты в (1) вещественные, то решение можно написать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ. Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda=\alpha\pm\beta i$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$C_{m+1}e^{dx}\cos\beta x+C_{m+2}e^{dx}\sin\beta x$,

если эти корни простые, и слагаемые

$P_{k-1}(x)e^{dx}\cos\beta x+Q_{k-1}(x)e^{dx}\sin\beta x$,

если каждый из этих двух корней имеет кратность k. Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} - многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (3), их коэффициенты – произвольные постоянные.

Пример 1. Решить уравнение $y^5-2y^4-16y'+32y=0$.

Пишем характеристическое уравнение

$\lambda^5-2\lambda^4-16\lambda+32=0$.

Находим его корни: $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=2$, $\lambda_4=2i$, $\lambda_5=-2i$.

По изложенным выше правилам пишем общее решение

$y=\left(c_1+c_2x\right)e^{2x}+c_3e^{-2x}+c_4\cos 2x+c_5\sin 2x$

(степень многочлена c_1+c_2x на 1 меньше кратности корня, а члены $\cos$ и $\sin$ соответствует корням $\pm 2i$).

3. Для линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций

$b_0+b_1x+...+b_mx^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью $P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m$, частное решение имеет вид

$$y_1=x^sQ_m(x)e^{\gamma x} \tag{4}$$

где $Q_m(x)$ - многочлен той же степени m. Число $s=0$, если γ - не корень характеристического уравнения (2), а если γ - корень, то s равно кратности этого корня.

Для уравнений с вещественными коэффициентами и первой частью вида

$$e^{dx}\left(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\right) \tag{5}$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1=x^se^{dx}\left(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right) \tag{6}$$

где $s=0$, если $\alpha+\beta i$ не корень характеристического уравнения и s равно кратности корня $\alpha+\beta i$ в противном случае, а R_m и T_m - многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов P и Q в (5). Чтобы найти коэффициенты многочленов в (4) или (6), надо подставить решение y_1 в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1(x)+...+f_p(x)$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1(x),...,f_p(x)$.

Пример 2. Решить уравнение

$$y'''-6y''+9y'=xe^{3x}+e^{3x}\cos 2x \tag{7}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=0$ имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=0$. Поэтому обще решение однородного уравнения имеет вид

$y_0=(c_1+c_2x)e^{3x}+c_3$.

Правая часть (7) состоит из двух слагаемых. Ищем отдельно частные решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} \qquad (8)$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}\cos 2x \qquad (9)$$

Число $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ не является корнем, поэтому для уравнения (8) частное решение, согласно (4) имеет вид $y_1 = x^2(ax+b)e^{3x}$.

Подставив его в (8), найдем $a = 1/18$, $b = -1/18$.

Число $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ не является корнем, поэтому для уравнения (9) частное решение, согласно (6), имеет ид $y_2 = e^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x)$.

Подставив его в (9), найдем $c = -3/52$, $d = -1/26$.

Общее решение уравнения (7) равно $y_0 + y_1 + y_2$.

4. Линейное уравнение с постоянными или переменными коэффициентами и с любой правой частью $f(x)$ модно решить методом вариации постоянных, если известно общее решение $y_0 = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$ линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда решение линейного неоднородного уравнения ищется в виде $y = c_1(x)y_1 + \ldots + c_n(x)y_n$. Функции $c_i(x)$ определяются из системы (где a_0 - коэффициент при $y^{(n)}$ уравнении).

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)y_1 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0;\\
&c_1'(x)y_1' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_1'(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0; \qquad (10)\\
&a_0\left(c_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}\right) = f(x).
\end{aligned}$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \qquad (11)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda = 1$ кратности 2. Общее решение однородного уравнения

$y_0 = (c_1 + c_2 x)e^{2x} = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Ищем решение уравнения (11) в виде

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x \qquad (12)$$

Функция $c_1(x)$, $c_2(x)$ определяются из системы вида (10)

$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$;

$c_1' e^x + c_2'\left(xe^x + e^x\right) = \dfrac{e^x}{x}$.

Из этой системы получаем

$c_2' = \dfrac{1}{x}$, $c_1' = -1$, $c_2'(x) = \ln|x| + \overline{c}_2$, $c_1'(x) = -x + \overline{c}_1$.

Подставляя $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (12), находим общее решение

$y = (\overline{c}_1 - x)e^x + \left(\ln|x| + \overline{c}_2\right)xe^x$.

5. Уравнение Эйлера

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \qquad (13)$$

Сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$). Чтобы сразу написать характеристическое уравнение, надо каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в (13) заменить на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)$.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 8x^3 \qquad (14)$$

Сразу пишем характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 = 0 \qquad (15)$$

Его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Поэтому общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$y_0 = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t}$.

Чтобы решить неоднородное уравнение (14), сначала раскроем скобки в (15): $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. По этому характеристическому уравнению составляем левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получаем из правой части (14) заменой $x = e^t$:

$$y_t''' - 4y_t'' + 5y_t' - 2y = 8e^{3t} \qquad (16)$$

Число 3 – не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде $y_1 = ae^{3t}$. Подставляя в (16), находим $a = 2$. Итак, общее решение имеет вид

$y = y_0 + y_1 (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t} + 2e^{3t} = (c_1 + c_2 \ln|x|)x + c_3 x^2 + 2x^3$.

6. Общего метода решения линейных уравнений с переменными коэффициентами не существует. в некоторых случаях частное решение удается найти путем подбора, например, в виде многочлена $y = x^m + ax^{n-1} + \ldots + d$ или в виде $y = e^{ax}$ и т.п.

   Если не известно частное решение y_1 линейного однородного уравнения n- ого порядка, то порядок уравнения можно понизить, сохраняя линейность уравнения. Для этого в уравнение надо подставить $y = y_1 z$ и затем понизить порядок заменой $z' = u$.

   Пример 4. Решить уравнение

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0 \qquad (17)$$

   Ищем частное решение в виде многочлена $y = x^m + ax^{m-1} + \ldots$. Сначала найдем его степень. Подставляем $y = x^m + \ldots$ в (17) и выписываем только члены старшей степени:

   $xm(m-1)x^{m-2} + \ldots - (m+1)mx^{m-1} - \ldots + x^m + \ldots = 0$.

   Приравниваем нулю коэффициент при старшей степени x

   $-m + 1 = 0$, $m = 1$.

   Следовательно, многочлен может быть только первой степени.

   Подставляя $y_1 = x + a$ в (17), находим $a = 1$. Значит, $y_1 = x + 1$ - частное решение.

   Чтобы найти общее решение, делаем в (19) замену $y = (x+1)z$.

   Получаем после упрощений

$$x(x+1)z''-(x^2+1)z'=0.$$

Понижаем порядок заменой $z'=u$ и решаем уравнение

$$x(x+1)u'=(x^2+1)u;\ \frac{du}{u}=\frac{x^2+1}{x(x+1)}dx;\ u=\frac{cxe^x}{(x+1)^2}.$$

Так как $z'=u$, а

$$\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=-\int xe^x d\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{xe^x}{x+1}+\int\frac{(xe^x)'}{x+1}dx=\frac{e^x}{x+1}+c,$$

то

$$z=\frac{c_1e^x}{x+1}+c_2,\ y=(x+1)z=c_1e^x+c_2(x+1).$$

7. Варианты аудиторных (домашних) контрольных работ по теме: «Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами».

Вариант 1.

7) $y'''-3y''+3y'-y=0$.

8) $y''+y'=\dfrac{1}{\sin x}$.

9) $y''-4y'+5y=1+8\cos x+e^{2x}$.

10) $y''-2y'+2y=(x+e^x)\sin x$.

11) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, $\lambda_4=\lambda_5=i$, $\lambda_6=\lambda_7=-i$.

12) $\lambda_1=\lambda_2=-12$, $\lambda_3=12=13i$, $\lambda_4=12-13i$, $y=\dfrac{6}{x^4}+3x^4$.

Вариант 2.

1) $y''''-5y''+4y=0$.

2) $y''-y'=\dfrac{1}{e^x+1}$.

3) $y''+4y=e^x+4\sin 2x+2\cos^2 x$.

4) $y'''+y'=\sin x\ x\cos x$.

5) $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=1+i$, $\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=1-i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 12 + 12i$, $\lambda_4 = 12 - 12i$, $y = \dfrac{5}{x^4} + \cos 4x$.

Вариант 3.

1) $y''' - 3y' + 2y = 0$.

2) $y''' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

3) $y'' - 2y' - 3y = 2x + e^{-x} - 2e^{3x}$.

4) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} \sin 2x + 2x^2$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 1 + 2i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 1 - 2i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = 11 + 12i$, $\lambda_4 = 11 - 12i$, $y = \dfrac{4}{x^4} + \sin 3x$.

Вариант 4.

1) $y''' - 8y = 0$.

2) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cdot \cos x}}$.

3) $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^{x}$.

4) $y'''' + y'' = 7x - 3\cos x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 2i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = -2i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 11$, $\lambda_3 = 11 + 11i$, $\lambda_4 = 11 - 11i$, $y = -\dfrac{1}{x^4} + e^{4x}$.

Вариант 5.

1) $y''''' - 6y' + 9y''' = 0$.

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

3) $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + e^2$.

4) $y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x \sin x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 3i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = -3i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$, $\lambda_3 = 10 + 11i$, $\lambda_4 = 10 - 11i$, $y = -\dfrac{1}{x^3} + 3x^2$.

Вариант 6.

1) $y'''' + 2y'' + y = 0$.

2) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$.

3) $y'' + 4y = x\sin^2 x$.

4) $y'''' + 2y''' - y' = xe^{-x}$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 2 + i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 2 - i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 10 + 10i$, $\lambda_4 = 10 - 10i$, $y = \dfrac{4}{x^3} + \cos 2x$.

Вариант 7.

1) $y''' - y'' - y' + y = 0$.

2) $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$.

3) $2y'' - 3y' - 2y = 5e^x chx$.

4) $y'''' + 4y'' + 4y = \cos x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 4i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = -4i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 9 + 10i$, $\lambda_4 = 9 - 10i$, $y = \dfrac{3}{x^3} + \sin 2x$.

Вариант 8.

1) $y'''' + 8y''' + 16y' = 0$.

2) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.

3) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x$.

4) $y'''' + 4y'' + 4y = x\sin 2x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 2 + 2i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 2 - 2i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 9 + 9i$, $\lambda_4 = 9 - 9i$, $y = \dfrac{2}{x^3} + e^{3x}$.

Вариант 9.

1) $y'''' + 4y'' + 3y = 0$.

2) $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$.

3) $y'' + 2y' + 2y = (5x + 4)e^x + e^{-x}$.

4) $y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = xe^x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 3 + i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 3 - i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -8$, $\lambda_3 = 8 + 9i$, $\lambda_4 = 8 - 9i$, $y = \dfrac{5}{x^2} + \cos 4x$.

Вариант 10.

1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

2) $y'' + y = tgx$.

3) $y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x$.

4) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 2x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 3 + 2i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 3 - 2i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = 8 + 8i$, $\lambda_4 = 8 - 8i$, $y = \dfrac{3}{x^2} + \sin 4x$.

Вариант 11.

1) $y''' - y'' + 3y' + 4y = 0$.

2) $y' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

3) $y'' - 3y' = 18x - 10\cos x$.

4) $y'' - 3y' + 2y = xe^x + \sin x \cdot e^{2x}$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 3 + 3i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 3 - 3i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -7$, $\lambda_3 = 7 + 8i$, $\lambda_4 = 7 - 8i$, $y = \dfrac{2}{x^2} + e^{2x}$.

Вариант 12.

1) $y''''' - y'''' + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$.

2) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

3) $y'' - y' = 4x - 2e^x$.

4) $y'' + 16y = \sin(4x + \alpha)$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 4 + i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 4 - i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = 7 + 7i$, $\lambda_4 = 7 - 7i$, $y = \dfrac{4}{x} + 2x$.

Вариант 13.

1) $y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$.

2) $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$.

3) $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$.

4) $y'''-6y''+12y'-8y=3xe^{2x}+\left(x^2+1\right)\sin 2x$.

5) $\lambda_1=\lambda_2=-5$, $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=4+2i$, $\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=4-2i$.

6) $\lambda_1=\lambda_2=-6$, $\lambda_3=6+7i$, $\lambda_4=6-7i$, $y=\dfrac{2}{x}+\cos 4x$.

Вариант 14.

1) $y'''-4y''+5y'-2y=0$.

2) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$.

3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$.

4) $y''+4y'+8y=e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)$.

5) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=6$, $\lambda_4=\lambda_5=4+3i$, $\lambda_6=\lambda_7=4-3i$.

6) $\lambda_1=\lambda_2=6$, $\lambda_3=6+6i$, $\lambda_4=6-6i$, $y=\dfrac{4}{x}+\sin 4x$.

Вариант 15.

1) $y'''-5y''+8y'-4y=0$.

2) $y''+y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

3) $2y''+5y'=0{,}1e^{-2{,}5x}-25\sin 2{,}5x$.

4) $y'''+2y'-2y=(x+1)e^{-2x}+\cos x\cdot e^{x}$.

5) $\lambda_1=\lambda_2=-6$, $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=4+4i$, $\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=4-4i$.

6) $\lambda_1=\lambda_2=-5$, $\lambda_3=5+6i$, $\lambda_4=5-6i$, $y=\dfrac{2}{x}+e^{-x}$.

Вариант 16.

1) $y'''-4y''+7y'-3y=0$.

2) $y''+y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3) $2y''+5y'=3ch\dfrac{5}{2}x$.

4) $y''+3y'+2y=x^2e^{-x}+2\sin x$.

5) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=7$, $\lambda_4=\lambda_5=5+i$, $\lambda_6=\lambda_7=5-i$.

6) $\lambda_1=\lambda_2=5$, $\lambda_3=5+5i$, $\lambda_4=5-5i$, $y=\dfrac{3}{x}$.

Вариант 17.

1) $y'''-7y''+16y'-12y=0$.

2) $y''+y=ctgx$.

3) $y''-3y'+2y=3e^{2x}$.

4) $y'''+y'=x^2+2\sin x$.

5) $\lambda_1=\lambda_2=-7$, $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=5+2i$, $\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=5-2i$.

6) $\lambda_1=\lambda_2=-4$, $\lambda_3=4+5i$, $\lambda_4=4-5i$, $y=5x+\cos 2x$.

Вариант 18.

1) $y'''+4y''+5y'+2y=0$.

2) $y''-y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$.

3) $y''-3y'+2y=e^x(3-4x)$.

4) $y''-y'=x+1+xe^x$.

5) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=8$, $\lambda_4=\lambda_5=5+3i$, $\lambda_6=\lambda_7=5-3i$.

6) $\lambda_1=\lambda_2=4$, $\lambda_3=4+4i$, $\lambda_4=4-4i$, $y=-x+\sin 4x$.

Вариант 19.

1) $y'''-3y'-2y=0$.

2) $y''-y=\dfrac{1}{e^{-2x}+1}$.

3) $y''-3y'+2y=2e^x-e^{-2x}$.

4) $y''''+y''=x^2+x\cos x$.

5) $\lambda_1=\lambda_2=-8$, $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=5+4i$, $\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=5-4i$.

6) $\lambda_1=\lambda_2=-3$, $\lambda_3=3+4i$, $\lambda_4=3-4i$, $y=2x+e^{-x}$.

Вариант 20.

1) $y'''+3y''-4y'+2y=0$.

2) $y''-y=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$.

3) $y''-3y'+2y=shx$.

4) $y''' + 2y'' + y' = xe^{-x} + x^2$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 9$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 5 + 5i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 5 - 5i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 3 + 3i$, $\lambda_4 = 3 - 3i$, $y = e^{3x} + \cos 4x$.

Вариант 21.

1) $y''' + 5y'' + 8y' + 4y = 0$.

2) $y'' - y' = e^{2x} \sin e^x$.

3) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

4) $y''' - 2y' + y = (x+1)e^x + 5$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 6 + i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 6 - i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2 + 3i$, $\lambda_4 = 2 - 3i$, $y = e^{-x} + \sin 2x$.

Вариант 22.

1) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = 0$.

2) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$.

3) $y'' - 4y' + 4y = 8\left(x^2 + e^{2x} + \sin 2x\right)$.

4) $y''' + 4y'' = x\cos 2x + 7$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 10$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 6 + 2i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 6 - 2i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2 + 2i$, $\lambda_4 = 2 - 2i$, $y = e^{5x}$.

Вариант 23.

1) $y''' + 7y'' + 16y' + 12y = 0$.

2) $y'' - 2y' + y = -\dfrac{e^{-x}}{(x+1)^2}$.

3) $y'' - 4y' + 4y = sh2x$.

4) $y''' + 9y' = x^2 + x\sin 3x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 6 + 3i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 6 - 3i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1 + 2i$, $\lambda_4 = 1 - 2i$, $y = \sin x + \cos 3x$.

Вариант 24.

1) $y''' + y'' - 8y' - 12y = 0$.

2) $y'' - 2y' + y = e^x \dfrac{\ln x}{x^3}$.

3) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$.

4) $y''' + y' + y = xe^{-1/2x} + 2x^{-1/2x} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 11$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 6 + 4i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 6 - 4i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + i$, $\lambda_4 = 1 - i$, $y = \cos 2x$.

Вариант 25.

1) $y''' + 2y'' + 2y' + 4y = 0$.

2) $y'' - 2y' + y = e^x \cdot x \cdot \ln x$.

3) $5y'' - 6y' + 5y = e^{3/5x} \cdot \sin \dfrac{4}{5} x$.

4) $y''' - 2y'' + y' = 2x^2 + xe^x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 6 + 5i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 6 - 5i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$, $y = \sin 3x$.

Вариант 26.

1) $y''' - y'' + 2y' - 2y = 0$.

2) $y'' - 2y' + y = e^x arctgx$.

3) $y'' - y' = 2(1 - x)$.

4) $y'' - 2y' = e^x (x^2 + x - 3)$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = \lambda_5 = i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = -i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4 + 5i$, $\lambda_4 = 4 - 5i$, $y = e^{x^2}$.

Вариант 27.

1) $y'''' + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

2) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \arcsin x$.

3) $y'' + 4y = x \sin 2x$.

4) $y'' + y' + y = e^{-x/2} \cdot \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 4i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = -4i$.

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1+i$, $\lambda_4 = 1-i$, $y = \sin x^2$.

Тесты:

1. Что понимается под дифференциальным уравнением?

+ уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала;

- уравнение, в котором неизвестная функция есть y;

- уравнение, в котором неизвестная функция есть x;

- уравнение, в которое входит dx и dy.

2. Какое дифференциальное уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением?

- дифференциальное уравнение вида $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

- дифференциальное уравнение вида $\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

+ дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком обычной производной или дифференциала.

3. Что называется порядком дифференциального уравнения?

+ порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение;

- порядок переменной x, входящей в это уравнение;

- порядок y, входящего в это уравнение;

- порядок производной, входящей в это уравнение.

4. Понятие общего решение О.Д.У. I порядка $y' = f(x, y)$.

+ $y = \varphi(x, c)$ называется общим решением уравнения $y' = f(x, y)$, если для любой константы c – это решение данного уравнения и для для любой точки (x_0, y_0) найдется константа $c = c_0$ такая, что $y_0 = \varphi(x_0, c_0)$;

- $y = \varphi(x, c)$ называется общим решением уравнения $y' = f(x, y)$, если для любой константы c – это решение данного уравнения;

- $y = \varphi(x, c)$ называется общим решением уравнения $y' = f(x, y)$, если оно проходит через любую начальную точку.

5. Что такое частное решение уравнения $y' = f(x, y)$?

+ это решение, которое получается из общего с учетом начальных данных при конкретной константе c;

- это решение, которое содержится, в общем;

- это решение, которое получается из общего при некоторой константе c;

- это решение, которое отвечает своим начальным значениям.

6. Какое из нижеперечисленных уравнений является уравнением с разделяющимися переменными?

- $dy = \frac{5x-y}{dx}$;

+ $ydy = xdx$;

-$y' \tan(xy) = y$;

- $xdx = \frac{y^2+1}{dy}$

7. Функция двух переменных $z = f(x,y)$ называется однородной измерения k, если

- $f(tx,y) = t^k f(x,y)$;

- $f(x,ty) = t^k f(x,y)$;

+ $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$;

- $f(tx,y) = t^k f(x,y)$ или $f(x,ty) = t^k f(x,y)$;

8. Какой подстановкой однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными?

- $\frac{x}{y} = z(x)$;

- $x \cdot y = z(x)$;

- $x - y = z(x)$;

+ $\frac{y}{x} = z(x)$.

9. Какой подстановкой уравнение $y' = f(\frac{ax+by+c}{ax_1+by_1+c_1})$ при $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ приводится к однородному уравнению?

- $a_1x + b_1y = z$;

- $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ a_1x + b_1y = \beta \end{cases}$;

+ $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$;

- $\begin{cases} ax + by + c = u \\ a_1x + b_1y + c_1 = v \end{cases}$.

10. Какой подстановкой уравнение $y' = f(\frac{ax+by+c}{ax_1+by_1+c_1})$ при $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными?

+ $a_1x + b_1y = z$;

- $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ a_1x + b_1y = \beta \end{cases}$;

- $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$;

- $\begin{cases} ax + by + c = u \\ a_1x + b_1y + c_1 = v \end{cases}$.

11. Какое дифференциальное уравнение I порядка называют линейным?

+ дифференциальное уравнение I порядка, линейное относительно y и y' с коэффициентами, зависящими от x: $A(x)y' + B(x)y = C(x)$;

- дифференциальное уравнение вида: $ax + by = y'$, где a, b - некоторые константы;

- дифференциальное уравнение, линейное относительно x и y', например $5x + 2y' = 3y^2$;

- дифференциальное уравнение, линейное относительно x и y, например $2x + 5y = yy'$.

12. В чем заключается суть метода вариации произвольной постоянной в решении неоднородных уравнений?

- решаем соответствующее однородное уравнение и варьируем произвольную константу с в ответе;

- решаем соответствующее однородное уравнение и объявляем константу c функцией от x, полученное решение и есть искомое решение исходного неоднородного уравнения;

+ решаем соответствующее однородное уравнение, затем ищем решение неоднородного уравнения в таком же виде, считая константу c функцией от x, затем подставляем это решение в исходное уравнение и находим $c(x)$.

13. Какое из нижеперечисленных уравнений I порядка является уравнением Бернулли?

- $2y' - \frac{4}{x}y = x^2 y$;

+ $xy' + y = \sqrt{y}$;

- $xy' + 2y = 0$;

- $x(y')^2 - y = \sqrt{y}$;

- $y(y')^2 + y^2 = x\sqrt{y}$.

14. Какое уравнение I порядка называется уравнением в полных дифференциалах?

- уравнение вида $du = 0$;

+ уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, левая часть которого есть полный дифференциал некоторой функции двух переменных $z = z(x, y)$;

- уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$;

- уравнение вида $dy = f(x, y)dx$, где правая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции dz.

15. Каков критерий того, что уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах?

- $\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}$;

- $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$;

+ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$;

- $\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$;

- $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}$.

16. Какая функция $\mu = \mu(x, y)$ называется интегрируемым множителем для уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$?

- такая, что левая часть уравнения есть $d\mu$;

+ такая, что после домножения на μ левая часть уравнения станет полным дифференциалом;

- такая, что после домножения на $\mu(x, y)$получится уравнение вида $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$;

- такая, что $\mu M(x, y)dx = -\mu N(x, y)dy$.

17. Какое уравнение $F(x, y, y') = 0$ называется уравнением Лагранжа?

- линейное, относительно y, y', с коэффициентами, зависящими от y;
- линейное, относительно x, y', с коэффициентами, зависящими от y;
+ линейное, относительно x, y, с коэффициентами, зависящими от y';
- линейное, относительно y', с коэффициентами, зависящими от x, y.

18. Какое уравнение $F(x, y, y') = 0$ называется уравнением Клеро?

- линейное, относительно y, y', с коэффициентами, зависящими от y;
- линейное, относительно x, y', с коэффициентами, зависящими от y;
+ линейное, относительно x, y: $y = xy' + \varphi(y')$;
- линейное, относительно y', с коэффициентами, зависящими от x, y'.

19. Как выглядит общее решение уравнения Клеро?

- $y = 2x + c$;
- $y = 2c + \varphi(c)$;
- $y = \varphi(c)$;
+ $y = xc + \varphi(c)$;
- $y = x + \varphi(c)$.

Уравнения высших порядков

20. В чем смысл теоремы Коши о существовании и единственности решения задачи Коши уравнения первого порядка?

1) Пусть дано уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ и даны начальные значения (x_0, y_0). Предположим, что $f(x, y)$ есть непрерывная функция двух переменных в замкнутой области R: $x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b)$, тогда существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее $y(x_0) = y_0$

2) + Пусть дано уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ и даны начальные условия (x_0, y_0). Предположим, что $f(x, y)$ есть непрерывная функция двух переменных в замкнутой области R: $x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b)$ и в силу непрерывности $|f(x, y)| \le M$. Кроме того $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица: $\exists\ N > 0\ :\forall\ x:\ |x - x_0| \le a,\ \forall\ y', y'' : |y' - y_0| \le b, |y'' - y_0| \le b$ выполнено $|f(x, y') - f(x, y'')| \le N|y' - y''|$. Тогда существует единственное решение уравнения, определенное и непрерывное для значений x, y интервала $x_0 - h \le x \le x_0 + h,$ где $h = \min(a, \frac{b}{M})$, принимающее при $x = x_0$ значение y_0

3) Пусть дано уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ и даны начальные значения (x_0, y_0). Предположим, что $f(x, y)$ есть непрерывная функция двух переменных в замкнутой области R: $x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b)$, тогда существует решение y(x), определенное и непрерывное для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min(a, \frac{b}{M})$, принимающее при $x = x_0$ значение y_0

4) Пусть уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица: $\exists\ N > 0\ :\forall\ x:\ |x - x_0| \le a,\ \forall\ y', y'' : |y' - y_0| \le b, |y'' - y_0| \le b$ выполнено $|f(x, y') - f(x, y'')| \le N|y' - y''|$. Тогда существует единственное решение уравнения, определенное и непрерывное для значений x, y интервала $x_0 - h \le x \le x_0 + h,$ где $h = \min(a, \frac{b}{M})$, принимающее при $x = x_0$ значение y_0

21. Классификация особых точек.

1 корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - действительные и одного знака – седловина

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - комплексные – фокус

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - чисто мнимые – центр

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - действительные и разных знаков - узел

2 корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - действительные и одного знака – фокус

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - комплексные – центр

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - чисто мнимые – фокус

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - действительные и разных знаков – узел

+3 корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - действительные и одного знака – узел

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - комплексные – фокус

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - чисто мнимые – центр

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - действительные и разных знаков - седловина

4 корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - действительные и одного знака – фокус

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - комплексные – центр

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - чисто мнимые – седловина

корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ - действительные и разных знаков - узел

22. Уравнения n-го порядка, интегрируемые в квадратурах

1) $F(x, y', y^{(n)}) = 0,\ F(y, y^{(n)}) = 0,\ F(y', y^{(n-2)}) = 0,$

+2) $y^{(n)} = f(x),\ F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,\ F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0,$

3) $F(x, y^{(n)}) = 0,\ F(y, y^{(n)}) = 0,\ F(y', y^{(n-2)}) = 0,$

4) $F(y, y^{(n)}) = 0,\ F(x, y', y^{(n)}) = 0,\ F(y', y^{(n-2)}) = 0,$

23. Уравнения, допускающие понижения порядка

+1 в уравнениях нет явно x, т.е. они имеют вид $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$

+2 в уравнениях нет явно y и его “k-1” производной, т.е. они имеют вид $F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0,$

+3 левая часть уравнения – однородная функция относительно $y, y', ..., y^{(n)}$,

+4 левая часть уравнения – однородная функция относительно x, dx, y, dy, …

24. Определение линейной зависимости функций $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$

1) $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ линейно зависимы в интервале (а, в), если существуют постоянные $\alpha_1, ..., \alpha_n$ не все равные нулю одновременно, такие, что выполнено $\alpha_1\varphi_1(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) = 0$

+2) $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ линейно зависимы, если существуют постоянные $\alpha_1,...,\alpha_n$ не все равные нулю одновременно, такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождественное отношение $\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0$

3) $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ линейно зависимы, если существуют постоянные $\alpha_1,...,\alpha_n$, такие, что выполнено $\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)=0$

4) $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ линейно зависимы, если существуют постоянные $\alpha_1,...,\alpha_n$ все равные нулю одновременно, такие, что выполнено $\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)=0$

25. Какой определитель называется определителем Вронского для n функций относительно x: $y_1,...,y_n$, имеющих непрерывные производные до n-1 порядка?

1 $W[y_1,...,y_n]=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \\ y_1 & y_2 & ... & y_n \end{vmatrix}$

+2 $W[y_1,...,y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

3 $W[y_1,...,y_n]=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

4 $W[y_1,...,y_n]=\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & ... & y_n^{(n-2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1 & y_2 & ... & y_n \end{vmatrix}$

26. Функции $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ называются линейно независимыми, если

+1 $\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i=0$

2 $\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i\neq 0$

3 $\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0$, если $\alpha_i=0$

4 $\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0$, если $\alpha_i \neq 0$

27. Какая система решений называется фундаментальной?

1 система независимых частных решений

2 система зависимых частных решений

+3 система n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения

4 система n одинаковых решений линейного однородного уравнения

28. Теорема о структуре общего решения однородного уравнения

1 общее решение – это линейная комбинация частных решений

2 общее решение – это линейная комбинация частных решений посредством произвольных постоянных

+3 общее решение – это линейная комбинация фундаментальной системы частных решений посредством произвольных постоянных

4 общее решение – это линейная комбинация фундаментальной системы решений

29. Теорема о структуре общего решения неоднородного уравнения

1 общее решение – это сумма его частного и общего решения

+2 общее решение – это сумма его частного и общего решения соответствующего однородного уравнения

3 общее решение – это линейная комбинация его фундаментальной системы решений

4 общее решение – это сумма его частных решений

30. Какой подстановкой понижается порядок линейного однородного уравнения?

1 $U=\frac{y}{y_1}$

+2 $U=(\frac{y}{y_1})'$

3 $U=y_1U$

4 $U=(\frac{y_1}{y})'$

31. В каком виде частное решение дифференциального уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами?

+ $y = e^{kx}$;

- $y = xe^{x}$;

- $y = x^2e^{x}$;

- $y = x\cos x + \sin x$.

32. Какой общий вид имеет линейное дифференциальное уравнение второго порядка?

- $xy'' = 0$;

- $(x+1)y' - y = 0$;

+$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t)$;

- $xx' = 2x - t$;

- $x'^2 = x' + x$.

33. В каком случае линейное дифференциальное уравнение второго порядка называется неоднородным?

- если левая часть уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ неоднородна;

- если в уравнении есть производная второго порядка;

- если в уравнении нет функции;

+ если правая часть уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ неоднородна;

- если оно имеет вид: $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.

34. В каком случае линейное дифференциальное уравнение второго порядка называется однородным?

- если оно имеет вид: $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$;

- если левая часть уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ однородна;

- если в уравнении есть производная второго порядка;

- если оно имеет вид: $y'' + y' + y = 0$.

35. Общее решение линейного неоднородного уравнения есть

- линейная функция произвольных постоянных;

- комбинация его частных решений;

+сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

- сумма двух независимых частных решений неоднородного уравнения.

36. Что называется задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка?

- задача отыскания решения, подчиненного заданному уравнению;

- задача отыскания решения, удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0$;

+ задача отыскания решения, удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_0$;

- задача нахождения общего решения уравнения;

37. Что называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $x'' + ax' + bx = f(t)$?

- уравнение $x'' + ax' + bx = 0$;

+ уравнение $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$;

- уравнение $t^2 + at + b = f(t)$;

- уравнение $\lambda^2 = b$.

38. Как выглядит общее решение линейного однородного диф. уравнения 2 порядка в случае, когда характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня?

- $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t}$;

- $x(t) = t(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t})$;

- $x(t) = c_1 \sin \lambda_1 t + c_2 \cos \lambda_2 t$;

+ $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$;

- $\mathrm{x(t)} = \mathrm{c_1 t^{\lambda_1}} + \mathrm{c_2 t^{\lambda_2}}$;

39. Как выглядит общее решение линейного однородного диф. уравнения 2 порядка в случае, когда характеристическое уравнение имеет один действительный кратный корень?

+ $x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$;

- $x(t) = (c_1 + c_2) t e^{\lambda t}$;

- $x(t) = c e^{\lambda t}$;

- $x(t) = c_1 \sin \lambda t + c_2 \cos \lambda t$;

40. Как выглядит общее решение линейного однородного диф. уравнения 2 порядка в случае, когда характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня?

- $x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\beta t}$;

- $x(t) = t(c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t})$;

+ $x(t) = c_1\, e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 e^{\alpha t} \cos \beta t$;

- $x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t}$;

- $x(t) = c_1 \sin \alpha t + c_2 \cos \beta t$

41. В каком виде искать частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть этого уравнения есть функция $P_m(t) e^{\gamma t}$, где $P_m(t)$ - полином степени m, а γ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения?

- $y = c e^{\gamma t}$;

- $y = Q_m(t)$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

+ $y = Q_m(t) e^{\gamma t}$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

- $y = Q_m(t) t$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

- $y = Q_m(t) t e^{\gamma t}$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

42. В каком виде искать частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть этого уравнения есть функция

$P_m(t)e^{\gamma t}$, где $P_m(t)$ - полином степени m, а γ совпадает с одним из корней характеристического уравнения?

- $y = cte^{\gamma t}$;

- $y = Q_m(t)$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

- $y = Q_m(t)e^{\gamma t}$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

- $y = Q_m(t)t$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

+ $y = Q_m(t)te^{\gamma t}$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами.

43. В каком виде искать частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть этого уравнения есть функция $P_m(t)e^{\gamma t}$, где $P_m(t)$ - полином степени m, а γ совпадает с кратным корнем характеристического уравнения?

- $y = ct^2e^{\gamma t}$;

- $y = Q_m(t)$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

+ $y = Q_m(t)t^2e^{\gamma t}$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

- $y = Q_m(t)t$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами;

- $y = Q_m(t)te^{\gamma t}$, где $Q_m(t)$ – полином степени m с неизвестными коэффициентами.

44. Каким способом понижается порядок в дифференциальном уравнении высшего порядка?

+ заменой младшей производной за новую функцию и многократным интегрированием;

- заменой старшей производной за новую функцию и многократным интегрированием;

- вынесением старшей производной за скобку;

- разложением на 2 уравнения меньшего порядка;

- сведением к уравнению Эйлера.

45. Какой общий вид имеет уравнение Эйлера?

- $y'' + a(x)y' + b(x) = c(x)$;

- $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = f(x)$;

+ $(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = f(x)$;

- $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$;

46. Какой заменой интегрируется уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = 0?$$

- $y = \sqrt{x}$;

+ $y = x^k$;

- $y = x^2$;

- $y = e^{kx}$;

- $y = xe^{kx}$.

47. Каким методом система дифференциальных уравнений приводится к одному уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией?

- методом замены переменных;

- метод понижения порядка;

-метод исключения неизвестных;

- метод вариации произвольных постоянных.

48. Какой вид имеет уравнение Бесселя?

1 $xy'' + y' + (x^2 - v^{2)} = 0$

2 $xy'' + (x^2 - v^2)y = 0$

3 $xy'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$

4 $xy'' + y' + (x^2 - v^2)y = 0$