

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДФУ)

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

«СОГЛАСОВАНО»  
Руководитель ОП



Голик С.С.

«УТВЕРЖДАЮ»



Заведующий кафедрой общей и экспериментальной  
физики

Короченцев В.В.

Подпись

01.2020 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление

**Направление – 03.03.02 «Физика»**

Специализация «Фундаментальная и прикладная физика»

**Форма подготовки очная**

курс 2 семестр 3

лекции 16 час.

практические занятия 16 час.

лабораторные работы 0 час.

в том числе с использованием МАО лек. 0 /пр. 0 /лаб. 0 час.

всего часов аудиторной нагрузки 36 час.

в том числе с использованием МАО 0 час.

самостоятельная работа 148 час.

в том числе на подготовку к экзамену 54 час.

контрольные работы 2

расчётно-графические работы 2

зачёт не предусмотрен

экзамен 3 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями собственного образовательного стандарта ДВФУ, утвержденного приказом ректора № 12-13-1282 от 07.07.2015г.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры теоретической и экспериментальной физики, протокол № 4 от «12» декабря 2019 г.

Заведующий кафедрой теоретической и экспериментальной физики к. х. н., доцент Короченцев В.В.  
Составитель (ли): к.ф.-м.н., доцент А.И. Гудименко

**Оборотная сторона титульного листа РПУД**

**I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

## Аннотация дисциплины

### «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление»

Рабочая программа дисциплины «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление» разработана для студентов 2 курса направления 03.03.02 «Физика» профиль «Фундаментальная и прикладная физика» в соответствии с требованиями ОС ВО ДВФУ по данному направлению.

Дисциплина «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление» относится к базовой части учебного плана.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов. Учебным планом предусмотрены лекционные занятия (16 час.) и практические занятия (16 час.), самостоятельная работа (148 час., в том числе 54 час. на подготовку к экзамену). Дисциплина реализуется в 3 семестре 2 курса.

Курс «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление» опирается на содержание дисциплин «Математический анализ», «Линейная алгебра и Аналитическая геометрия».

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, необходимый для дальнейшего усвоения цикла специальных дисциплин по теоретической физике и математике, таких как «Электродинамика», «Квантовая механика», «Термодинамика, статистическая физика», «Физика конденсированного состояния и других дисциплин, активно использующих математический аппарат.

В дисциплине рассмотрены представления об основных структурах и методах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.

**Цель** освоения дисциплины «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление» - формирование представления об основных структурах и методах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, ее месте и роли в системе естественных наук, формирование профессиональных компетенций, связанных с применением аппарата теории для решения при-

кладных задач, развитие логического мышления, повышение уровня математической культуры.

**Задачи:**

- приобретение умения интегрировать дифференциальные уравнения первого и высших порядков и системы уравнений, решать задачу Коши;
- приобретение умения поставленную задачу представить в виде дифференциального уравнения с начальными условиями;
- приобретение умения провести качественный анализ полученных решений, решить вопрос об их устойчивости.

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие общепрофессиональные компетенции (элементы компетенций):

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-2, способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей	Знает	основные типы и методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационных задач.
	Умеет	использовать указанные методы для решения дифференциальных уравнений и вариационных задач.
	Владеет	навыками решения дифференциальных уравнений и вариационных задач.

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление» применяются методы активного/интерактивного обучения: лекция-консультация, лекция-беседа.

**I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

**Раздел I. Дифференциальные формы, уравнения первого порядка, векторные поля и системы (18 час.)**

**Тема 1. Дифференциальные формы (лекция-беседа)(4,5 час.)**

Определение дифференциальных форм, их свойства и примеры  
Определение и свойства алгебры дифференциальных форм. Замена координат в дифференциальной форме. Интегрирование форм. Точные и замкнутые формы. Теорема Фробениуса. Геометрический смысл 1-формы. Уравнения Максвелла. Оператор Ходжа.

### **Тема 2. Уравнения первого порядка (5,5 час.)**

Уравнение первого порядка как дифференциальная система. Уравнения в дифференциалах. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным. Метод параметризации. Особые решения. Линейные уравнения.

### **Тема 3. Векторные поля и потоки (3,5 час.)**

Касательный вектор. Касательное расслоение. Векторные поля. Замена координат. Интегральные кривые. Теорема о существовании и единственности. Особые точки векторного поля. Поток векторного поля, свойства потока.

### **Тема 4. Линейные векторные поля и системы (лекция-консультация)(4,5 час.)**

Определение и свойства линейных векторных полей и систем. Пример решения линейной системы. Общее решение в случае, когда собственные векторы образуют базис. Выделение действительных решений. Теорема о жордановом базисе. Жорданова нормальная форма матрицы. Общее решение линейной системы. Матричная экспонента, её свойства.

## **Раздел II. Производная Ли, линейные уравнения, вариационные методы (18 час.)**

### **Тема 1. Производная Ли и её приложения (лекция-беседа)(3 час.)**

Производная Ли функции. Индуцированное отображение форм. Производная Ли формы. Формула Лиувилля. Симметрии и интегрирование уравнений.

### **Тема 2. Линейные уравнения (5 час.)**

Уравнения с постоянными коэффициентами. Операторное представление. Сопутствующий метод интегрирования. Интегрирование однородного уравнения. Интегрирование неоднородного уравнения с правой частью – квазимногочленом.

### **Тема 3. Вариационное исчисление (10 час.)**

Вариационная задача. Вариационная производная. Необходимое условие экстремума. Оператор Эйлера. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Условный экстремум. Гамильтонова система уравнений. Вариационные симметрии и законы сохранения. Продолжение векторного поля. Теорема Эммы Нётер.

## **II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

**Практические занятия (36 час.)**

## **Раздел I. Дифференциальные формы, уравнения первого порядка, векторные поля и системы (18 час.)**

### **Занятие 1-4. Дифференциальные формы (4 час.)**

1. Алгебра дифференциальных форм.
2. Замена координат в дифференциальной форме.
3. Дифференцирование форм. Интегрирование форм.
4. Точные и замкнутые формы.
5. Теорема Фробениуса. Геометрический смысл 1-формы.
6. Уравнения Максвелла. Оператор Ходжа.

### **Занятие 5-8. Уравнения первого порядка (4 час.)**

1. Уравнение первого порядка как дифференциальная система.
2. Уравнения в дифференциалах. Уравнения в полных дифференциалах.
3. Уравнения с разделяющимися переменными.
4. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям.
5. Метод параметризации. Особые решения.
6. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли.
7. Некоторые приёмы понижения порядка.

### **Занятие 9-13. Векторные поля и потоки (5 час.)**

1. Касательный вектор.
2. Касательное расслоение.
3. Векторные поля.
4. Замена координат.
5. Интегральные кривые.
6. Теорема о существовании и единственности.
7. Особые точки векторного поля.
8. Поток векторного поля. Свойства потока.

### **Занятие 14-18. Линейные векторные поля и системы (5 час.)**

1. Разбор определений.
2. Пример решения линейной системы.
3. Общее решение в случае, когда собственные векторы образуют базис.
4. Выделение действительных решений.
5. Теорема о жордановом базисе.
6. Жорданова нормальная форма матрицы.
7. Общее решение линейной системы.
8. Матричная экспонента.
9. Свойства матричной экспоненты. Вычисление матричной экспоненты.
9. Двумерная линейная система.

## **Раздел II. Производная Ли, линейные уравнения, вариационные методы (18 час.)**

### **Занятие 1-4. Производная Ли и её приложения (4 час.)**

1. Производная Ли функции.
2. Индуцированное отображение форм.

3. Производная Ли формы.
4. Формула Лиувилля.
5. Симметрии и интегрирование уравнений первого порядка.

#### **Занятие 5-9. Линейные уравнения (5 час.)**

1. Уравнения с постоянными коэффициентами.
2. Операторное представление.
3. Сопутствующий метод интегрирования.
4. Интегрирование однородного уравнения.

5. Интегрирование неоднородного уравнения с правой частью – квазимногочленом.

#### **Занятие 10-18. Вариационное исчисление (9 час.)**

1. Вариационная задача. Примеры вариационных задач.
2. Вариационная производная.
3. Необходимое условие экстремума.
4. Оператор Эйлера.
5. Уравнения Эйлера–Лагранжа.
6. Условный экстремум.
7. Гамильтонова система уравнений.
8. Вариационные симметрии и законы сохранения.
9. Продолжение векторного поля.
10. Теорема Эммы Нётер.

### **III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

- план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;
- характеристика заданий для самостоятельной работы студентов и методические рекомендации по их выполнению;
- требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;
- критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

### **IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА**

#### **V.**

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства		
			текущий контроль	промежуточная аттестация	
1	Раздел I. Дифференциальны	ОПК-1	знает	Устный опрос (УО-1)	Вопросы к зачету 3 семестра № 1-21
			умеет	Выполнение индивидуальных заданий 1-4	
			владеет		

	е формы, уравнения первого порядка, векторные поля и системы			(ПР-11)Расчётно- графическая работа 1 (ПР-12) Контрольная работа 1 (ПР-2)	
2	РазделII. Производная Ли, линейные уравне- ния, вариационные методы	ОПК-1	знает	Расчётно-графическая работа 2 (ПР-12)	Вопросы к зачету 4 семестра № 1-62
			умеет	Выполнение индиви- дуальных заданий 5-8 (ПР-11)Расчётно- графическая работа 2 (ПР-12) Контрольная работа 2 (ПР-2)	
			владеет		

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

## **VI. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Основная литература**

*(печатные и электронные издания)*

1. Егоров, А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями [Электронный ресурс] : учеб.пособие / А. И. Егоров. – М. :Физматлит, 2007. – 448 с.

ЭБС «Elanbook.com»:

<https://e.lanbook.com/book/59460>

2. Егоров, А.И. Классификация решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [Электронный ресурс] : учеб.пособие / А. И. Егоров. – М. :Физматлит, 2013. – 108 с.

ЭБС «Elanbook.com»:

<https://e.lanbook.com/book/59690>

3. Романко, В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Электронный ресурс] : учеб.пособие / А. И. Егоров.– М. : Издательство "Лаборатория знаний", 2015. – 347 с.

ЭБС «Elanbook.com»:

<https://e.lanbook.com/book/70785>

### **Дополнительная литература**

*(печатные и электронные издания)*



1. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]: учебное пособие / М. В. Федорюк. – М. : Наука, 1985. – 448 с.

ЭК НБ ДВФУ:

<https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:246217>

2. Арнольд, В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : учеб.пособие / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2012. – 384 с.

ЭБС «Elanbook.com»:

<https://e.lanbook.com/book/56388>

3. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : учеб. / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2012. – 341 с.

ЭБС «Elanbook.com»:

<https://e.lanbook.com/book/56392>

4. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст]: учебное пособие для вузов / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1992. – 128 с.

ЭК НБ ДВФУ:

<https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:37693>

## **VII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

В рамках данной дисциплины предусмотрено 108 часов самостоятельной работы, которая необходима при проработке материала лекции, выполнении индивидуальных заданий, оформлении расчётно-графической работы, подготовке к контрольным работам, зачёту, экзамену.

В самостоятельную работу по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление» включены следующие виды деятельности:

В процессе изучения дисциплины студент должен решить все индивидуальные домашние задания в семестре; написать 2 контрольные работы, после этого получает допуск к сдаче теоретической части зачета. Оценивание идет по бально-рейтинговой системе.

Для успешного освоения рассматриваемой дисциплины необходимо:

- посещение лекционных и практических занятий;
- ведение конспекта лекций и практических занятий;
- своевременное решение индивидуальных домашних заданий;
- посещение консультаций, в случае каких-либо сомнений в знании текущего материала;
- при подготовке к практическим занятиям необходимо читать лекционный материал, пересматривать практические занятия.

Студенту следует тщательно планировать и организовывать время, необходимое для изучения дисциплины. Недопустимо откладывать ознакомление с

теоретической частью и выполнение индивидуальных заданий и расчётно-графических работ, поскольку это неминуемо приведет к снижению качества освоения материала. Все виды работ по дисциплине рекомендуется выполнять по календарному плану, приведенному в приложении 1.

### **VIII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление» необходима аудитория, доска.



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ  
РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**  
по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения,  
вариационное исчисление»  
Направление подготовки – 03.03.02 Физика  
Фундаментальная и прикладная физика  
**Форма подготовки очная**

**Владивосток  
2020**

## План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения, неделя	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение, час	Форма контроля
3 семестр				
1	1-3	Выполнение индивидуальных заданий	3	Защита индивидуальных заданий 1 (УО-1)
2	4-6	Выполнение индивидуальных заданий	3	Защита индивидуальных заданий 2 (УО-1)
3	7-11	Выполнение индивидуальных заданий	3	Защита индивидуальных заданий (УО-1)
4	12-16	Выполнение индивидуальных заданий	3	Защита индивидуальных заданий (УО-1)
5	17	Выполнение расчётно-графической работы	2	Защита РГР 1 (УО-1)
6	18	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	2	Контрольная работа 1 (ПК-2)
7	1-18	Подготовка к зачёту	2	Зачёт
4 семестр				
1	1-3	Выполнение индивидуальных заданий	3	Защита индивидуальных заданий (УО-1)
2	4-6	Выполнение индивидуальных заданий	3	Защита индивидуальных заданий (УО-1)
3	7-11	Выполнение индивидуальных заданий	3	Защита индивидуальных заданий (УО-1)
4	12-16	Выполнение индивидуальных заданий	3	Защита индивидуальных заданий (УО-1)
5	17	Выполнение расчётно-графической работы	2	Защита РГР (УО-1)
6	17	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	2	Контрольная работа 2 (ПК-2)
7	18	Подготовка к зачету	2	зачет

## **Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению**

В рамках данной дисциплины предусмотрено 72 часа самостоятельной работы, которая необходима при проработке материала лекции, выполнении индивидуальных заданий, оформлении расчётно-графической работы, подготовке к контрольным работам, зачёту, экзамену.

В самостоятельную работу по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление» включены следующие виды деятельности:

- поиск информации по темам для самостоятельного изучения;
- разбор теоретических аспектов практических работ;
- подготовка к текущему и промежуточному контролю.

Для закрепления навыков и знаний студента, полученных на практических и лекционных занятиях, студенту в течение курса выдаются индивидуальные задания и расчётно-графические работы. Для выполнения индивидуальных заданий и расчётно-графических работ необходимо использовать все полученные знания и умения.

Студенту следует тщательно планировать и организовывать время, необходимое для изучения дисциплины. Недопустимо откладывать ознакомление с теоретической частью и выполнение индивидуальных заданий и расчётно-графических работ, поскольку это неминуемо приведет к снижению качества освоения материала. Все виды работ по дисциплине рекомендуется выполнять по календарному плану.

Приведенные ниже комплекты вариантов задач для самостоятельного решения охватывают все разделы курса. Для успешного выполнения заданий необходимо изучить соответствующие материалы лекционного курса и материалы практических занятий.

### **Требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы**

Сроки выдачи индивидуальных заданий (ИДЗ) привязываются ко времени изучения соответствующего материала на лекциях и практических занятиях. Решения типовых задач и упражнений рассматриваются на практических занятиях. Защита ИДЗ состоит в проверке самостоятельности решения задач. С этой целью предлагается решить 1-3 типовые задачи равносильные задачам ИДЗ и/или объяснить способ, метод, прием и т.д., использованный для решения какой-либо из задач, выполнить дополнительные задания в рамках представленного ИДЗ.

## Пример индивидуальных заданий 1

1. Вычислить форму объёма  $dx \wedge dy$  в полярных координатах, а затем – интеграл  $\int dx dy / \sqrt{(x^2 + y^2)}$  по кругу радиуса  $R$  с центром в начале координат.
2. Перейти к сферическим координатам в форме работы электрического поля точечного заряда и к цилиндрическим – в форме потока магнитного поля движущегося заряда. В последнем случае ось цилиндрической системы координат направить вдоль движения заряда.
3. В пространстве  $\mathbb{R}^3$  имеется координатный базис 2-форм:  $dx \wedge dy$ ,  $dy \wedge dz$ ,  $dz \wedge dx$ . Разлагая поле точечного заряда по этому базису, получаем  $E = (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) / r^3$ . Вычислить  $dE$ .
4. Вычислить интеграл от 1-формы  $\alpha = x dx + y dy$  по полуокружностям  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .
5. Проверить, что форма работы проводника с током замкнута. Следует ли отсюда её точность?
6. Проверить замкнутость формы и найти её потенциал:
  - а.  $2xy dx + (x^2 - y^2) dy$ ;
  - б.  $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy$ ;
  - в.  $y dx - (2y \ln y - x) dy$ ;
  - г.  $(2 - 9xy^2) x dx + (4y^2 - 6x^3) y dy$ ;
  - д.  $(y/x) dx + (y^3 + \ln x) dy$ ;
  - е.  $(2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2 y) dy$ .

## Пример индивидуальных заданий 2

1. Решить систему линейного маятника:  $dx/dt = y$ ,  $dy/dt = -x$ .
2. Решить уравнения:
  - а.  $(x + y) dx + (x - y) dy = 0$ ;
  - б.  $\dot{y} = \sin y$ ;
  - в.  $(\operatorname{tg} x + \operatorname{tgy}) dx + x dy / \cos^2 y = 0$ ;
  - г.  $2x^4 y \dot{y} + y^4 = 4x^6$ ;
  - д.  $x \dot{y} + y - e^x = 0$ ;
  - е.  $y = x \dot{y} - \dot{y}^4$ ;
  - ё.  $\dot{y}^3 - y + x = 0$ ;
  - ж.  $\ddot{y} + \dot{y} + y^3 = 0$ .
3. Определить тип уравнения:
  - а.  $\dot{y} \operatorname{ctg} x + y = 2$ ;
  - б.  $y dx + (\sqrt{(x^2 + y^2)} - x) dy = 0$ ;
  - в.  $3y^3 - x \dot{y} + 1 = 0$ ;
  - г.  $x \dot{y} = x \sqrt{(y - x^2)} + 2y$ ;
  - д.  $y = x \dot{y} - \dot{y}^4$ ;
  - е.  $4\dot{y} - y \operatorname{ctg} x = y^5 e^{\cos x}$ ;
  - ё.  $(x y e^{x/y} + y^2) dx = x^2 e^{x/y} dy$ ;
  - ж.  $(2x - 1 - y/x^2) dx - (2y - 1/x) dy = 0$ ;
  - з.  $(x^2 + y^2) y \dot{y} + (x^2 - y^2) x = 0$ ;
  - и.  $\dot{y} + \operatorname{tgy} = x / \cos y$ .

## Пример индивидуальных заданий 3

1. Построить касательные вектора к параболе  $y = x^2$ .
2. Записать в полярных координатах поле  $u = y \partial_x + x \partial_y$ .
3. Вычислить поток и проверить его свойства для поля  $u = x^2 \partial_x$ .
4. Вычислить поток поля  $u = \partial_x$  (группа сдвигов плоскости) и  $u = ax \partial_x + by \partial_y$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  (группа растяжений плоскости).

## Пример индивидуальных заданий 4

1. Привести к жордановой нормальной форме матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить жордановы цепочки  $n$ -мерного жорданова блока.

3. Вычислить жордановы цепочки матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. Найти общее комплексное и общее действительное решение системы:

а.  $\dot{x} = 5x + 2y + 2z, \quad \dot{y} = x + 6y + 2z, \quad \dot{z} = -5x - 7y - 3z;$

б.  $\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x + z, \quad \dot{z} = -x - y + 2z;$

в.  $\dot{x} = 2x + 2y - 2z, \quad \dot{y} = 2x + 5y - 4z, \quad \dot{z} = -2x - 4y + 5z \quad (\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 10);$

г.  $\dot{x} = -5x - 4y + 9z, \quad \dot{y} = 10x + 9y - 10z, \quad \dot{z} = x + y + 3z \quad (\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 4).$

5. Решить системы, используя матричную экспоненту:

а.  $\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = x + 2y;$

б.  $\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = x - 3y.$

6. Найти и исследовать особые точки:

а.  $\dot{x} = x^2 - y, \quad \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3;$

б.  $\dot{x} = \ln(2 - y^2), \quad \dot{y} = e^x - e^y;$

в.  $\dot{x} = (2x - y)(x - 2), \quad \dot{y} = xy - 2;$

г.  $\dot{x} = x^2 - y, \quad \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2;$

д.  $\dot{x} = \sqrt{(x^2 - y + 2)} - 2, \quad \dot{y} = \arctg(x^2 + xy);$

е.  $\dot{x} = \ln[(y^2 - y + 1)/3], \quad \dot{y} = x^2 - y^2.$

### Пример индивидуальных заданий 5

1. Вычислить первые интегралы:

а.  $u = (z + y - x)\partial_x + (z + x - y)\partial_y + (x + y - z)\partial_z;$

б.  $u = (z + x)x\partial_x + (z + y)y\partial_y + (z^2 - xy)\partial_z;$

в.  $u = (z + e^x)\partial_x + (z + e^y)\partial_y + (z^2 - e^{x+y})\partial_z;$

г.  $u = x\partial_x + (z + w)\partial_y + (y + w)\partial_z + (y + z)\partial_w.$

2. Вычислить поток и первые интегралы векторного поля. Проверить, что интегралы действительно сохраняются на интегральных кривых поля.

а.  $u = x^n \partial_x;$

б.  $u = \sin x \partial_x;$

в.  $u = e^x \partial_x;$

г.  $u = \partial_x + x\partial_y;$

д.  $u = y\partial_x + x\partial_y;$

е.  $u = y^{-1}\partial_x + x^{-1}\partial_y, \quad x, y > 0.$

3. Показать, что поле является инфинитезимальной симметрией уравнения (если уравнения нет – найти). Решить это уравнение.

а.  $u = y\partial_x, \quad ydx + (y^3 - x)dy = 0;$

б.  $u = y\partial_x - x\partial_y, \quad (xf(r) + y)dx + (yf(r) - x)dy = 0, \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2)};$

в.  $u = y^3 \partial_x.$

### Пример индивидуальных заданий 6

Найти общее действительное решение:

1.  $y^{(3)} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = 0;$

2.  $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 1 + 3\cos x + e^{2x};$

3.  $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = (x + e^x)\sin x;$

4.  $\ddot{y} + 4y = e^x + 4\sin 2x + 2\cos^2 x;$

5.  $y^{(3)} + \dot{y} = \sin x + x \cos x$ .

### Пример индивидуальных заданий 7

1. Вычислить вариационную производную для вариационного функционала:

$$L(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_a^b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt .$$

2. Решить вариационные задачи о нахождении:

- а. кривой минимальной длины, соединяющей две точки плоскости;
- б. траектории материальной точки в поле силы тяжести.

3. Найти уравнения лучей света, распространяющегося в плоской среде с неоднородной скоростью света  $c(x, y)$ .

4. Вывести уравнение малых колебаний мембраны.

5. Решить вариационную задачу о нахождении экстремальной площади поверхности вращения с заданной образующей.

6. Задача на условный экстремум. Решить задачу: среди кривых  $y = y(x)$  длины  $l$ , таких, что  $y(a) = y(b) = 0$ , найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

7. Найти экстремумы функционалов в классе гладких функций на отрезке  $[0; 1]$ , удовлетворяющих граничным условиям  $y(0) = y(1) = 0$ :

- а.  $S[y] = \int_0^1 (y_x^2 + y + 1) dx$ ;
- б.  $S[y] = \int_0^1 (y_x^2 + xy + 1) dx$ ;
- а.  $S[y] = \int_0^1 (y_x^2 + y_x y^n + 1) dx$ .

8. В релятивистской механике интервал  $ds$  (аналог элемента длины в евклидовом пространстве) задаётся выражением  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ . Действие для свободной релятивистской частицы определяются формулой:

$$S = -mc \int_a^b ds = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} dt ,$$

где первый интеграл берётся вдоль мировой линии частицы. Выписать уравнения движения частицы.

9. Найти уравнение кривой наименьшей длины, соединяющей точки  $(0; 0)$  и  $(1; 0)$  и имеющей фиксированную площадь.

10. Решить вариационную задачу:

- а.  $S[y] = \int_0^1 (y_x^2 + x) dx, \int_0^1 (y + x^2) dx = 1, y(0) = y(1) = 0$ ;
- б.  $S[y] = \int_0^1 (y_x^2 + 2y) dx, 2 \int_0^1 xy dx = 1, y(0) = y(1) = 0$ .

11. По параболическому жёлобу  $x(s) = s, y(s) = -s^2/2$  под действием силы тяжести  $mg$  соскальзывает без трения материальная точка. Показать, что её скорость в горизонтальном направлении стабилизируется.

### Пример индивидуальных заданий 8

1. Покажите, что поле  $\xi = x\partial_x + y\partial_y$  является инфинитезимальной симметрией формы  $\mathcal{L} = L(x, y, y_x) dx$  в том и только том случае, когда  $y\partial_y L + L + x\partial_x L = 0$ .



Постройте соответствующий заданию закон сохранения, когда  $L = y_x^2/y$ . Выпишите уравнение Эйлера для лагранжиана  $L = y_x^2/y + y_x/x$ . Понизьте порядок уравнения, вычислив закон сохранения.

4. Покажите, что поле  $\xi = \partial_x$  – инфинитезимальная симметрия формы  $\mathcal{L} = L(x, y, y_x) dx$  тогда и только тогда, когда  $\partial_x L = 0$ . Постройте соответствующий закон сохранения.

### **Критерии оценки выполнения индивидуальных заданий**

#### **Критерии оценки выполнения самостоятельной работы**

Выполнение ИЗ и РГР и их защита оцениваются по пятибалльной шкале. Без защиты оценка за ИЗ или РГР не выставляется. Количество баллов соответствует уровню выполнения заданий. Пять баллов соответствует самостоятельному верному выполнению всех заданий. Четыре бала самостоятельному верному выполнению заданий на 76-85%. Три бала – 61-75%. Два балла – менее 60%. Подробно критерии выставления оценок приведены в Приложении 2.

Приведенные в Приложении 2 варианты ИЗ и РГР для самостоятельного выполнения охватывают все разделы курса. Для успешного их выполнения необходимо изучить соответствующие материалы лекционного курса и материалы практических занятий.



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление»

Направление подготовки – 03.03.02 Физика  
Фундаментальная и прикладная физика

**Форма подготовки очная**

**Владивосток**  
**2020**

## Паспорт ФОС

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-1 способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования	Знает	основные типы и методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационных задач.
	Умеет	использовать указанные методы для решения дифференциальных уравнений и вариационных задач.
	Владеет	навыками решения дифференциальных уравнений и вариационных задач.

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства		
			текущий контроль	промежуточная аттестация	
1	Раздел I. Дифференциальные формы, уравнения первого порядка, векторные поля и системы	ОПК-1	знает	Устный опрос (УО-1)	Вопросы к зачету № 1-21
			умеет	Выполнение индивидуальных заданий 1-4 (ПР-11) Расчётно-графическая работа 1 (ПР-12) Контрольная работа 1 (ПР-2)	
			владеет		
2	Раздел II. Производная Ли, линейные уравнения, вариационные методы	ОПК-1	знает	Расчётно-графическая работа 2 (ПР-12)	Вопросы к зачету № 1-62
			умеет	Выполнение индивидуальных заданий 5-8 (ПР-11) Расчётно-графическая работа 2 (ПР-12) Контрольная работа 2 (ПР-2)	
			владеет		

### Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		критерии	показатели
ОПК-1 способностью использовать	знает (пороговый уровень)	основные понятия и методы теории дифференциальных урав-	Знание основных понятий теории дифференциаль-	Умение применять методы теории дифференциальных уравне-

основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования		нений и вариационного исчисления.	ных уравнений и вариационного исчисления.	ний и вариационного исчисления.
	умеет (продвинутый)	применять методы и аппарат теории дифференциальных уравнений в процессе решения физических и математических задач.	Умение проводить вычисления методами теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.	Способность решать задачи теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.
	владеет (высокий)	методологией и понятийным аппаратом теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления для постановки и решения теоретических и практических задач естественного происхождения.	Владеет методами теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.	Свободно пользуется методами теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления при постановке и решении научно-технических, математических и физических задач.

### **Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины**

Промежуточная аттестация обучающихся по учебной дисциплине осуществляется в рамках завершения изучения данной дисциплины и позволяет определить качество и уровень ее освоения. Предметом оценки освоения являются умения и знания.

Промежуточная аттестация обучающихся осуществляется в форме зачета в 3 и 4 семестрах и позволяет определить развитие общих компетенций, предусмотренных для ОПОП. Условием допуска к зачету является успешное освоение обучающимися всех элементов дисциплины (выполнение и сдача всех индивидуальных заданий и контрольных работ).

Текущий контроль успеваемости осуществляется в ходе повседневной учебной работы по курсу дисциплины. Данный вид контроля стимулирует обучающихся стремление к систематической самостоятельной работе по изучению учебной дисциплины, овладению общими компетенциями.

### **Оценочные средства для промежуточной аттестации**

#### **Вопросы к зачёту (3 семестр)**

1. Как выглядит произвольная  $p$ -форма в  $\mathbb{R}^4$ ?
2. Дать определение интеграла от дифференциальной 1-формы
3. Дать определение точной и замкнутой формы. Сформулировать и доказать интегральный признак точности 1-формы.

4. Сформулировать и доказать лемму Пуанкаре.
5. Описать уравнения первого порядка как дифференциальную систему. Дать определение решения.
6. Что такое уравнение в полных дифференциалах, каково его решение?
7. Что такое уравнение с разделяющимися переменными, однородные уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям?
8. Что такое метод параметризации? Что такое уравнения Лагранжа и Клеро?
9. Что такое особые решения?
10. Что такое линейные уравнения? Что такое уравнение Бернулли?
11. Дать определение касательного вектора, касательного пространства и касательного расслоения.
12. Показать, что касательное пространство удовлетворяет аксиомам векторного пространства.
13. Что представляет собой база и слой касательного расслоения?
14. Что такое особые точки, фазовые кривые и фазовый портрет? Каков фазовый портрет нелинейного маятника?
15. Что такое поток векторного поля и каковы его свойства? Что есть область определения потока?
16. Сформулировать теорему о жордановом базисе. Что такое нормальная жорданова форма матрицы?
17. Дать определение линейной системы. Сформулировать теорему об общем решении в случае, когда собственные векторы образуют базис. Как выделить действительные решения?
18. Сформулировать теорему об общем решении линейной системы.
19. Дать определение матричной экспоненте. Что такое равномерная сходимость ряда для экспоненты?
20. Как представить решение начальной задачи для линейной системы через матричную экспоненту? Каковы свойства матричной экспоненты? Какова её связь с потоком линейного векторного поля?
21. Каковы особые точки двумерной линейной системы?

### **Вопросы к зачету (4 семестр)**

1. Алгебра дифференциальных форм.
2. Замена координат в дифференциальной форме.
3. Дифференцирование форм.
4. Интегрирование форм.
5. Точные и замкнутые формы.
6. Теорема Фробениуса.
7. Геометрический смысл 1-формы.
8. Уравнения Максвелла.
9. Оператор Ходжа.

10. Уравнение первого порядка как дифференциальная система.
11. Уравнения в дифференциалах.
12. Уравнения в полных дифференциалах.
13. Уравнения с разделяющимися переменными.
14. Однородные уравнения.
15. Уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям.
16. Метод параметризации.
17. Особые решения.
18. Линейные уравнения.
19. Уравнение Бернулли.
20. Некоторые приемы понижения порядка.
21. Касательный вектор.
22. Касательное расслоение.
23. Векторные поля.
24. Замена координат.
25. Интегральные кривые.
26. Теорема о существовании и единственности.
27. Особые точки векторного поля.
28. Поток векторного поля.
29. Свойства потока.
30. Определение.
31. Пример решения линейной системы.
32. Общее решение в случае, когда собственные векторы образуют базис.
33. Выделение действительных решений.
34. Теорема о жордановом базисе.
35. Жорданова нормальная форма матрицы.
36. Общее решение линейной системы.
37. Матричная экспонента.
38. Свойства матричной экспоненты.
39. Вычисление матричной экспоненты.
40. Двумерная линейная система.
41. Производная Ли функции.
42. Индуцированное отображение форм.
43. Производная Ли формы.
44. Формула Лиувилля.
45. Симметрии и интегрирование уравнений первого порядка.
46. Уравнения с постоянными коэффициентами.
47. Операторное представление.
48. Сопутствующий метод интегрирования.
49. Интегрирование однородного уравнения.
50. Интегрирование неоднородного уравнения с правой частью – квазимногочленом.
52. Вариационная задача.
53. Примеры вариационных задач.
54. Вариационная производная.

55. Необходимое условие экстремума.
56. Оператор Эйлера.
57. Уравнения Эйлера–Лагранжа.
58. Условный экстремум.
59. Гамильтонова система уравнений.
60. Производная Ли формы.
61. Продолжение векторного поля.
62. Теорема Эммы Нетер.

### **Критерии оценки ответа на зачетные вопросы**

5 баллов — если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.

4 баллов — знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.

3 балл — фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определено и последовательно изложить ответ.

2 баллов — незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

**Зачтено - 5,4 или 3 балла.**

**Не зачтено - 2 балла**

### **Оценочные средства для текущей аттестации**

#### **1. Индивидуальные домашние задания**

Примеры индивидуальных заданий и критерии оценивания приведены в приложении 1

## 2. Контрольная работа

### Пример заданий контрольной работы 1

Определить тип уравнения и метод решения. Найти общее решение уравнения:

1.  $(x\cos 2y + 1)dx - x^2\sin 2y dy = 0$ ;
2.  $x dx - 2y dy = 2yx^2 dy - xy^2 dx$ ;
3.  $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2 dy$ ;
4.  $y - xy' = x$ ;
5.  $y - xy' = -2\sqrt{y}$ ;
6.  $y' = (x + y + 1)^2$ ;
7.  $1 + y^2 = 2y y''$ ;
8.  $y'(e^x + 1) + y = 0$ ;
9.  $y'' + y = 1/\cos x$ ;
10.  $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$ ;
11.  $\dot{x} = -5x + 4y, \dot{y} = -9x + 7y$ ;
12.  $\dot{x} = x + y - z, \dot{y} = -x + 4y - 2z, \dot{z} = -2x + 5y - 2z$ .

### Пример заданий контрольной работы 2

1. Найти общее комплексное и общее действительное решение системы:  
 $\dot{x} = 6x - 7y + 4z, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = -2x + 3y$ .
2. Найти общее действительное решение:
  - а.  $y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = 0$ ;
  - б.  $y'' - y' = 1/(1 + e^x)$ ;
  - в.  $y'' + y' = 1/\sin x$ .
3. Найти экстремумы функционала  $S[y] = \int_0^1 (y_x^2 + y_x y^n + 1) dx$  в классе гладких функций на отрезке  $[0; 1]$ , удовлетворяющих граничным условиям  $y(0) = y(1) = 0$ .
4. Найти экстремум и определить его тип:
  - а.  $S[y] = \int_1^4 \left( y^2 + \frac{3y^2}{4x^2} \right) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(4) = 8$ ;
  - б.  $S[y] = \int_1^2 \left( 3x^2 y y' - x^3 y^2 + \frac{6y}{x} \right) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1/8$ ;
  - в.  $S[y] = \int_0^\pi \left( y^2 - \frac{9y^2}{4} + 18y \right) dx, \quad y(0) = 4, \quad y(\pi) = 0$ .

### Критерии оценки выполнения контрольной работы

*Отметка "Отлично"*

Верно выполнено более 85% заданий.



*Отметка "Хорошо"*

Верно выполнено 75-85% заданий.

*Отметка "Удовлетворительно"*

Верно выполнено 60-75% заданий.

*Отметка "Неудовлетворительно"*

Верно выполнено менее 60% заданий.

### 3. Расчётно-графическая работа

#### Пример заданий расчётно-графической работы 1

Построить изоклины, поле направлений, семейство решений, особые точки и особые решения для дифференциальных уравнений:

- а.  $y' = 1 + y^2$ ;      б.  $y' = x + y$ ;      в.  $y' = xy - 1$ ;      г.  $y' = (x - y)/(x + y)$ ;  
д.  $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ ;      е.  $xdx - (\sqrt{x^2 + y^2} + y)dy = 0$ ;  
ё.  $y' = (y/x)\ln(y/x)$ .      ж.  $y'^2 = y$ ;      з.  $y = xy' + 1/y'$ ;      и.  $y'^2(2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$ .

#### Пример заданий расчётно-графической работы 2

Построить изоклины, поле направлений, семейство решений, особые точки и особые решения для дифференциальных уравнений:

- а.  $y' = x + y$ ;      б.  $y' = (x - y)/(x + y)$ ;      в.  $xdx - (\sqrt{x^2 + y^2} + y)dy = 0$ ;  
г.  $y'^2 = y$ ;      д.  $y'^2(2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$ .

#### Критерии оценки выполнения расчётно-графической работы

*Отметка "Отлично"*

1. Верно выполнены все задания.
2. Дано верное пояснения выполнению каждого задания.
3. Дан верный ответ на дополнительный вопрос по теме задания.

*Отметка "Хорошо"*

1. Допущены небольшие недочёты в выполнении заданий или не выполнено менее 10% заданий.
2. Дано пояснения выполнению каждого задания с некоторыми недочётами.
3. Дан ответ на дополнительный вопрос по теме задания с некоторыми недочётами.

*Отметка "Удовлетворительно"*

1. Допущены существенные недочёты в выполнении заданий или не выполнено до 30% заданий.
2. Допущены существенные недочёты в пояснении по выполнению заданий.
3. Ответ на дополнительный вопрос содержит существенные недочёты.

*Отметка "Неудовлетворительно"*

1. Не выполнено или выполнено не верно более 30% задания.

2. Не может быть дано ясного пояснения к выполненным заданиям.

2. Не может быть дано ясного ответа на дополнительный вопрос по теме задания.