




МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

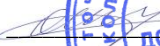
«СОГЛАСОВАНО»

Руководитель ОП  
«Вычислительная математика»

 Алексеев Г.В.  
(подпись) (Ф.И.О.)  
« 09 » \_\_\_\_\_ июля \_\_\_\_\_ 2018 г.

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой  
Информатики, математического и компьютерного  
моделирования

 Чеботарев А.Ю.  
(подпись) (Ф.И.О.)  
« 09 » \_\_\_\_\_ июля \_\_\_\_\_ 2018 г.



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Метод конечных разностей**

Направление подготовки *02.06.01 Компьютерные и информационные науки*

Профиль «*Вычислительная математика*»

Форма подготовки (очная)

курс 2 семестр 4

лекции 9 час.

практические занятия 9 час.

лабораторные работы не предусмотрены.

с использованием МАО лек. \_\_\_ / пр. \_\_\_ час.

всего часов контактной работы 18 час.

в том числе с использованием МАО \_\_\_ час., в электронной форме \_\_\_ час.

самостоятельная работа 90 час.

курсовая работа / курсовой проект нет семестр

зачет 4 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации), утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 30.07.2014 № 864

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры информатики, математического и компьютерного моделирования ШЕН ДВФУ, протокол № 18 от «09» июля 2018 г.

Заведующий кафедрой информатики, математического и компьютерного моделирования  
Чеботарев А.Ю.

Составитель: д.ф.-м.н., профессор кафедры информатики, математического и компьютерного моделирования Алексеев Г.В.

**I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры**

Протокол от «11» июня 2019 г. № 11

Заведующий кафедрой /директор академического департамента

  
\_\_\_\_\_

(подпись)

Чеботарев А.Ю.

(И.О. Фамилия)

**II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры**

Протокол от «18» января 2020 г. № 5

Заведующий кафедрой информатики, математического и компьютерного моделирования

  
\_\_\_\_\_

(подпись)

Чеботарев А.Ю.

(И.О. Фамилия)

**III. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры**

Протокол от «27» января 2021 г. № 4

Заведующий кафедрой информатики, математического и компьютерного моделирования

  
\_\_\_\_\_

(подпись)

Чеботарев А.Ю.

(И.О. Фамилия)

## **Аннотация рабочей программы учебной дисциплины «Метод конечных разностей»**

Дисциплина «Метод конечных разностей» предназначена для аспирантов, обучающихся по образовательной программе направления подготовки – 02.06.01 Компьютерные и информационные науки, профиль «Вычислительная математика», форма подготовки очная и входит в вариативную часть, обязательные дисциплины учебного плана: Б1.В.ДВ

Трудоемкость – 3 з.е. (108 часов). Дисциплина включает в себя 9 часов лекций, 9 часов практических занятий и 90 часов самостоятельной работы. Обучение осуществляется в 4 семестре. Формы промежуточной аттестации: зачет (4 семестр).

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации), утвержденного приказом министерства образования и науки РФ от 30 июля 2014 года № 864 и учебным планом подготовки аспирантов по профилю «Вычислительная математика».

**Целью** дисциплины является изучение основного численного метода нахождения приближенных решений начально-краевых задач математической физики - метода конечных разностей (или метода сеток).

**Задачи** дисциплины:

1. развить у аспирантов целостное представление об основных принципах применения численных методов для решения краевых задач математической физики и, в том числе, краевых задач гидродинамики;
  2. обобщить знания о классических разностных схемах, аппроксимирующих уравнение переноса, уравнение теплопроводности, волновое уравнение и уравнение Пуассона;
  3. научить аспирантов качественному анализу свойств разностных схем: определению порядка аппроксимации и исследованию их устойчивости методом гармоник или энергетическим методом;
  4. научить аспирантов методам решения систем разностных уравнений, возникающих при дискретизации краевых задач математической физики.
- Для успешного изучения дисциплины «Метод конечных разностей» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:
- способностью к абстрактному мышлению, анализу и синтезу
  - способностью создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках
  - готовностью к саморазвитию, самореализацию, использованию творческого потенциала
  - способностью находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики

В результате изучения дисциплины у аспирантов формируются следующие универсальные, общепрофессиональные и профессиональные компетенции:

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-1 Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Знает	современные методы исследования в области вычислительной математики и информационно-коммуникационные технологии
	Умеет	при решении исследовательских и практических задач генерировать новые идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений
	Владеет	Способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
ПК-1 Способность разрабатывать численные модели для решения научных проблем и задач	Знает	теоретические основы численного моделирования, численные методы решения задач математической физики
	Умеет	анализировать математические модели
	Владеет	Способностью разрабатывать численные модели для решения научных проблем и задач
ПК-2 Способность углубленного анализа проблем корректности численных алгоритмов для решения задач математической физики	Знает	методы, используемые для анализа корректности численных алгоритмов для решения задач математической физики
	Умеет	создавать и анализировать численные математические модели, разрабатывать численные методы и алгоритмы решения задач математической физики
	Владеет	Способностью углубленного анализа проблем корректности численных алгоритмов для решения задач математической физики
ПК-3 Способность к анализу задач математической физики, построению и исследованию соответствующих математических моделей	Знает	теоретические основы и методы, используемые для анализа задач математической физики, построения и исследования соответствующих математических моделей
	Умеет	анализировать задачи математической физики, разрабатывать и исследовать соответствующие математические модели
	Владеет	Способностью к анализу задач математической физики, построению и исследованию соответствующих математических моделей

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Метод конечных разностей» применяются следующие методы активного / интерактивного обучения: мини-лекции с актуализацией изучаемого содержания, презентации с использованием доски, книг, видео, слайдов, компьютеров и т.п., с последующим обсуждением материалов, обратную связь с формированием общего представления об уровне владения знаниями

аспирантов, актуальными для занятия, разминки с вопросами, ориентированными на выстраивание логической цепочки из полученных знаний (конструирование нового знания), коллективные решения творческих задач, которые требуют от аспирантов не простого воспроизводства информации, а творчества, поскольку задания содержат большой или меньший элемент неизвестности и имеют, как правило, несколько подходов, работу в малых группах (дает всем аспирантам возможность участвовать в работе, практиковать навыки сотрудничества, межличностного общения).

## **I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

**(9 час., в том числе 0 час. с использованием методов активного обучения)**

**Раздел 1. Основные модели математической гидродинамики, понятия метода конечных разностей (3 час.)**

**Тема 1. Сущность метода математического моделирования.**

**Использование законов сохранения (1 час.)**

Тема раскрывается с использованием интерактивной формы обучения - презентации с использованием доски и компьютера с последующим обсуждением материалов.

**Тема 2. Основные модели гидродинамики (1 час.)**

**Тема 3. Сущность метода сеток. Погрешность аппроксимации дифференциального оператора. Разностная задача и разностная схема. (2 час.)**

**Раздел 2. Основные модели математической гидродинамики, понятия метода конечных разностей. (3 час.)**

**Тема 1. Постановка начально-краевой задачи для уравнения переноса. Свойства точного решения. Построение разностных схем. Реализация разностной схемы. Исследование устойчивости на основе принципа максимума (1 час.)**

Тема раскрывается с использованием интерактивной формы обучения - мини-лекции с актуализацией изучаемого содержания.

*Интерактивная форма 2 часа.*

**Тема 2. Исследование устойчивости энергетическим методом. Исследование устойчивости методом гармоник. Явные и неявные схемы. Схемы повышенной точности. Классификация двухточечных разностных схем (1 час.)**

**Тема 3. Постановка начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Свойства точного решения. Построение разностных схем. Исследование устойчивости методом гармоник. Явные и неявные схемы. Схемы повышенной точности. Классификация двухслойных трехточечных разностных схем для уравнения теплопроводности (1 час.)**

**Раздел 3. Метод сеток дискретизации уравнения конвекции-диффузии, уравнения Пуассона (3 час.)**

**Тема 1. Постановка начально-краевой задачи для уравнения конвекции-диффузии. Свойства точного решения. Построение разностных схем. Реализация разностной схемы. Исследование устойчивости на основе принципа максимума (1 час.)**

**Тема 2. Исследование устойчивости энергетическим методом. Исследование устойчивости методом гармоник. Явные и неявные схемы. Схемы повышенной точности. Классификация трехточечных разностных схем (1 час.)**

Тема раскрывается с использованием интерактивной формы обучения – «обратную связь» с формированием общего представления об уровне владения знаниями аспирантов, актуальными для занятия.

**Тема 3. Употребительные разностные схемы для уравнения Пуассона. Аппроксимация краевой задачи. Исследование устойчивости решения задачи Дирихле методом априорных оценок. Схемы повышенной точности (1 час.)**

## **II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

**Практические занятия (9 час.). Все практические занятия проводятся в интерактивной форме**

**Занятие 1. Основные модели математической гидродинамики. (1 час)**

Излагается схема применения МММ для изучения процессов движения жидкостей и смежных явлений.

Занятие проводится в интерактивной форме разминки с вопросами, ориентированными на выстраивание логической цепочки из полученных знаний (конструирование нового знания).

*Интерактивная форма 2 часа.*

**Занятие 2. Основные понятия метода конечных разностей и метода конечных элементов. (1 час)**

Простейшие разностные аппроксимации первой и второй производной. Решение разностной схемы с трехдиагональной матрицей методом прогонки.

**Занятие 3. Метод сеток дискретизации уравнения переноса. (1 час)**

Постановка задачи. Выбор разностной схемы. Исследование свойств разностной схемы. Программная реализация разностной схемы. Проведение вычислительных экспериментов. Анализ полученных результатов.

Занятие проводится в интерактивной форме - коллективное решение творческой задачи, которое требует от аспирантов не простого воспроизводства информации, а творчества, поскольку задания содержат большой или меньший элемент неизвестности и имеют, как правило, несколько подходов.

*Интерактивная форма 2 часа.*

**Занятие 4. Метод сеток дискретизации уравнения теплопроводности. (2 час)**

Постановка задачи. Выбор разностной схемы. Исследование свойств разностной схемы. Программная реализация разностной схемы. Проведение вычислительных экспериментов. Анализ полученных результатов.

**Занятие 5. Метод сеток дискретизации уравнения конвекции-диффузии. (2 час)**

Постановка задачи. Выбор разностной схемы. Исследование свойств разностной схемы. Программная реализация разностной схемы. Проведение вычислительных экспериментов. Анализ полученных результатов.

**Занятие 6. Метод сеток дискретизации уравнения Пуассона. (2 час)**

Постановка задачи. Выбор разностной схемы. Исследование свойств разностной схемы. Программная реализация разностной схемы. Проведение вычислительных экспериментов. Анализ полученных результатов.

Занятие проводится в интерактивной форме работы в малых группах (дает всем аспирантам возможность участвовать в работе, практиковать навыки сотрудничества, межличностного общения).

*Интерактивная форма 2 часа.*

**Лабораторные работы (0/0 час.)**

Курс не предусматривает лабораторных работ.

### III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Метод конечных разностей» представлено в приложении 1 и включает в себя:

3 семестр					
№ п / п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды, наименование и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Раздел 1. Основные модели математической гидродинамики, понятия метода конечных разностей	ОПК-1 ПК-1, ПК-2, ПК-3	Знает	УО-1 Собеседование; контрольная работа	Зачет, вопросы 1-13
2	Раздел 2. Метод сеток дискретизации и уравнения переноса, уравнения теплопроводности	ОПК-1 ПК-1, ПК-5	Знает Умеет Владеет	Собеседование; Контрольная работа	Зачет, вопросы 14-19
3	Раздел 3. Метод сеток дискретизации и уравнения конвекции-диффузии, уравнения Пуассона	ОПК-1; ПК-4; УК-1	Умеет Владеет	Собеседование; доклад	Зачет, вопросы 20-32

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;  
характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;  
требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;  
критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

### IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ КУРСА

Фонд оценочных средств по дисциплине представлен в приложении 2.



## **V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Основная литература**

1. Шевцов, Г.С. Численные методы линейной алгебры / Г.С. Шевцов, О.Г. Крюкова, Б.И. Мызникова. – СПб.: Лань. 2011. – 496с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=1800](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=1800)
2. Калиткин, Н.Н. Численные методы: учеб. / Н.Н. Калиткин. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 586с. <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=350803>
3. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2012. – 636с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=4397](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4397)
4. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации. Кн.1. / Ф.П. Васильев. – М.: МЦНМО, 2011. – 624с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9304](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9304)
5. Волков, Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – СПб.: Лань, 2008. – 256с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=54](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=54)

### **Дополнительная литература**

1. Ольшанский, М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам / М.А. Ольшанский. – М.: Физматлит. 2005. – 168 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=59391](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59391)
2. Волков, К.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа / К.Н. Волков, В.Н. Емельянов. – М.: Физматлит, 2012. – 468с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=59637](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59637)
3. Колдаев, В.Г. Численные методы и программирование / В.Г. Колдаев. – М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. – 336с. <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370603>

### **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. База данных Scopus <http://www.scopus.com/home.url>
2. База данных Web of Science <http://apps.webofknowledge.com/>
3. База данных полнотекстовых академических журналов Китая <http://oversea.cnki.net/>
4. Электронная библиотека диссертаций Российской государственной библиотеки <http://diss.rsl.ru/>
5. Электронные базы данных EBSCO <http://search.ebscohost.com/>

6. <http://window.edu.ru/resource/041/74041> Фаддев М.А., Марков К.А. Численные методы: Учебное пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. - 158 с.
7. <http://window.edu.ru/resource/554/77554> Валов, А.В. Численные методы решения уравнений для инженеров: Учебное пособие / А.В. Валов. - Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. - 110 с.
8. <http://window.edu.ru/resource/218/77218> Семушин, И.В. Вычислительные методы алгебры и оценивания: учебное пособие / И.В. Семушин. - Ульяновск: УлГТУ, 2011. - 366 с.
9. <http://window.edu.ru/resource/673/76673> Репин С.И., Фролов М.Е. Математические методы в нелинейных задачах механики сплошных сред: Учебное пособие. - СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008.
10. <http://window.edu.ru/resource/455/79455> Бояршинов Б. Приближенные и численные методы решения дифференциальных уравнений.
11. Интернет-курс <http://www.intuit.ru/studies/courses/10971/1116/info>
12. <http://window.edu.ru/resource/650/75650> Рейзлин В.И. Численные методы оптимизации: учебное пособие / В.И. Рейзлин; Томский политехнический университет. - Томск: Изд-во ТПУ, 2011. - 105 с.

### Перечень информационных технологий и программного обеспечения

№ п/п	Место расположения компьютерной техники, на которой установлено программное обеспечение, количество рабочих мест	Перечень программного обеспечения
1.	690922, Приморский край, г. Владивосток, остров Русский, полуостров Саперный, поселок Аякс, 10, корпус D, ауд. D945. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.	Microsoft Office - лицензия Standard Enrollment № 62820593. Дата окончания 2020-06-30.
2.	690922, Приморский край, г. Владивосток, остров Русский, полуостров Саперный, поселок Аякс, 10, корпус D, ауд. D549. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.	Microsoft Office - лицензия Standard Enrollment № 62820593. Дата окончания 2020-06-30. Родительская программа Campus 3 49231495. Торговый посредник: JSC "Softline Trade" Номер заказа торгового посредника: Tr000270647-18. Photoshop CC for teams All Apps ALL Multiple Platforms Multi European Languages Team Licensing Subscription Renewal №ЭА-667-17 от 08.02.2018. 07, Adobe Creative Cloud for teams All Apps ALL Multiple Platforms Multi European Languages Team Licensing Subscription New Контракт №ЭА-667-17 от 08.02.2018. ESET NOD32 Secure Enterprise Контракт №ЭА-091-18 от 24.04.2018. AutoCAD Electrical 2015. Срок действия лицензии 10.09.2020. № договора 110002048940 в личном

		кабинете Autodesk. +2 Сублицензионное соглашение Blackboard № 2906/1 от 29.06.2012.
--	--	---

## **Перечень информационных технологий и программного обеспечения**

Лекции проводятся с использованием проектора и мультимедийного комплекса для проведения лекций внутренней системы портала ДВФУ. Практические занятия проводятся в специализированном компьютерном классе. Для составления документации используется текстовый процессор (LibreOffice или Microsoft Word).

## **VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

Дисциплина изучается в следующих организационных формах: лекции, практические занятия и самостоятельная работа аспиранта. Аспирант должен планировать график самостоятельной работы по дисциплине и придерживаться его.

Основной формой самостоятельной работы аспиранта является выполнение проекта, а также подготовка докладов для практических занятий.

К практическим занятиям следует готовиться. Для этого необходимо знать программу курса и рекомендованную литературу. Необходимо повторить основные разделы таких курсов, как «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», чтобы осваивать новый материал более эффективно. Аспиранту необходимо активно участвовать в дискуссиях, не бояться задавать вопросы преподавателю и другим участникам.

Контроль за выполнением самостоятельной работы аспиранта производится в виде контроля каждого этапа работы, отраженного в документации, и защиты проекта.

## **VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

№ п/п	Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы
1.	690922, Приморский край, г. Владивосток, остров Русский, полуостров Саперный, поселок Аякс, 10, корпус D, ауд. D945. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной	Мультимедийное оборудование: Экран проекционный ScreenLine Trim White Ice 50 см черная кайма сверху, размер рабочей области 236x147 см 1 шт; Документ-камера Avervision CP355AF - 1 шт; ЖК-панель 47", Full HD, LG M4716 CCBA - 1 шт; Мультимедийный проектор Mitsubishi EW330U, 3000 ANSI Lumen, 1280x800 - 1 шт;

	аттестации.	Сетевая видеочамера Multipix MP-HD718 - 1 шт.
2.	690922, Приморский край, г. Владивосток, остров Русский, полуостров Саперный, поселок Аякс, 10, корпус D, ауд. D549. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.	Компьютерный класс: Моноблок lenovo C360G-i34164G500UDK – 15 шт. Мультимедийное оборудование: Экран проекционный ScreenLine Trim White Ice 50 см черная кайма сверху, размер рабочей области 236x147 см - 1 шт; Документ-камера Avervision CP355AF - 1 шт; ЖК-панель 47", Full HD, LG M4716 CCBA - 1 шт; Мультимедийный проектор, Mitsubishi EW33OU, 3000 ANSI Lumen, 1280x800, Сетевая видеочамера Multipix MP-HD718" - 1 шт.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

**«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)**

---

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ  
РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

**по дисциплине «Метод конечных разностей»**

Направление подготовки *02.06.01 Компьютерные и информационные науки*

Профиль *«Вычислительная математика»*

Форма подготовки (очная)

**Владивосток  
2018**

## План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

### 3 семестр

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Виды СРС	Всего часов	Форма контроля
1.	1-5 неделя обучения	Изучение теоретического материала темы 1 по лекциям, решение задач ПЗ-1	30	Собеседование
2.	6-11 неделя обучения	Изучение теоретического материала темы 2 по лекциям, решение задач ПЗ-2-3	30	Собеседование
3.	12-17 неделя обучения	Изучение теоретического материала темы 3 по лекциям, решение задач ПЗ-4	30	Собеседование
4.		ВСЕГО	90	

### Рекомендации по самостоятельной работе студентов

#### Рекомендации по работе с литературой

Для более эффективного освоения и усвоения материала рекомендуется ознакомиться с теоретическим материалом по той или иной теме до проведения практического занятия. Всю учебную литературу желательно изучать «под конспект».

Цель написания конспекта по дисциплине – сформировать навыки по поиску, отбору, анализу и формулированию учебного материала.

Работу с теоретическим материалом по теме можно проводить по следующей схеме:

- название темы;
- цели и задачи изучения темы;
- основные вопросы темы;
- характеристика основных понятий и определений, необходимых для усвоения данной темы;
- краткие выводы, ориентирующие на определенную совокупность сведений, основных идей, ключевых положений, систему доказательств, которые необходимо усвоить.

При работе над конспектом обязательно выявляются и отмечаются трудные для самостоятельного изучения вопросы, с которыми уместно обратиться к преподавателю при посещении консультаций, либо в индивидуальном порядке.

### Методические указания по подготовке к практическим занятиям

Подготовку к каждому практическому занятию каждый студент должен начать с изучения теоретического материала и ознакомления с планом, который отражает содержание предложенной темы. Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса. Результат такой работы должен проявиться в способности студента свободно ответить на теоретические вопросы по теме задания, правильном выполнении лабораторной работы.

В процессе практического занятия студент должен создать требуемый документ с помощью предлагаемого программного средства и выполнить требуемые в задании операции, либо подготовить к дискуссии теоретический материал по предложенной теме.

### **Критерии оценки лабораторных(практических) работ**

– 100-86 - выполнены все задания практической (лабораторной) работы, студент четко и без ошибок ответил на все контрольные вопросы.

– 85-76 - выполнены все задания практической (лабораторной) работы; студент ответил на все контрольные вопросы с замечаниями.

– 75-61 выполнены все задания практической (лабораторной) работы с замечаниями; студент ответил на все контрольные вопросы с замечаниями.

- 60-50 баллов - студент не выполнил или выполнил неправильно задания практической (лабораторной) работы; студент ответил на контрольные вопросы с ошибками или не ответил на контрольные вопросы.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДВФУ)

---

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**по дисциплине «Метод конечных разностей»**

Направление подготовки *02.06.01 Компьютерные и информационные науки*  
Профиль «Вычислительная математика»

Форма подготовки (очная/заочная)

**Владивосток**  
**2018**



## Паспорт ФОС

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-1 Владение методологией теоретических и экспериментальных исследований в области профессиональной деятельности	Знает	методы исследования процессов и явлений, составляющих содержание прикладной математики и информатики.
	Умеет	анализировать математические модели, работать в электронно-библиотечных системах
	Владеет	методами исследования прикладной математики и информатики, современными информационно-коммуникационными технологиями в области прикладной математики и информатики
ПК-2 Способность углубленного анализа проблем корректности задач для дифференциальных уравнений	Знает	методы, используемые для анализа корректности динамических систем и оптимального управления, методы решения некорректных задач
	Умеет	разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач, обобщенных краевых задач
	Владеет	современными методами решения некорректных задач оптимального управления динамическими системами, основами численных методов решения некорректных краевых задач
ПК-3 Способность к анализу задач оптимального управления и созданию алгоритмов их решения	Знает	теоретические основы и методы, используемые для построения динамических систем и оптимального управления, методы решения обобщенных краевых задач
	Умеет	создавать математические модели динамических систем и оптимального управления, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач
	Владеет	современными методами решения задач оптимального управления динамическими системами, основами численных методов решения краевых задач
ПК-4 Способность использовать современные методы обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий	Знает	стратегию применения программных продуктов для обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий
	Умеет	создавать и анализировать существующие численные алгоритмы решения дифференциальных уравнений, интерпретировать полученные результаты с применением компьютерных технологий
	Владеет	навыками применения современных программных продуктов для обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий
ПК-5 Способность профессионально излагать результаты своих исследований и	Знает	требования оформления результатов своих исследований и представления их в виде научных публикаций и презентаций
	Умеет	профессионально излагать результаты своих

представлять их в виде научных публикаций и презентаций		исследований и представлять их в виде научных публикаций и презентаций
	Владеет	навыками изложения обладающих внутренним единством результатов своих исследований и представления их в виде научных публикаций и презентаций
УК-1 Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	Знает	
	Умеет	
	Владеет	

3 семестр					
№ п / п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды, наименование и этапы формирования компетенций	Оценочные средства		
			текущий контроль	промежуточная аттестация	
1	Раздел 1. Основные модели математической гидродинамики, понятия метода конечных разностей	ОПК-1 ПК-1, ПК-2, ПК-3	Знает	УО-1 Собеседование; контрольная работа	Зачет, вопросы 1-13
2	Раздел 2. Метод сеток дискретизации и уравнения переноса, уравнения теплопроводности	ОПК-1 ПК-1, ПК-5	Знает Умеет Владеет	Собеседование; Контрольная работа	Зачет, вопросы 14-19
3	Раздел 3. Метод сеток дискретизации и уравнения конвекции-диффузии, уравнения Пуассона	ОПК-1; ПК-4; УК-1	Умеет Владеет	Собеседование; доклад	Зачет, вопросы 20-32

## Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		критерии	показатели
ОПК-1 Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	знает (пороговый уровень)	методы исследования процессов и явлений, составляющих содержание фундаментальной и прикладной математики	владение методами исследования процессов и явлений, составляющих содержание фундаментальной и прикладной математики	способность владения методами исследования процессов и явлений, составляющих содержание фундаментальной и прикладной математики
	умеет (продвинутый)	анализировать математические модели; работать в электронно-библиотечных системах	умение анализировать математические модели; работать в электронно-библиотечных системах	способность анализировать математические модели; работать в электронно-библиотечных системах
	владеет (высокий)	методами исследования фундаментальной и прикладной математики; современными информационно-коммуникационными технологиями в области математики и механики	успешное и систематическое применение методов исследования фундаментальной и прикладной математики; современных информационно-коммуникационных технологий в области математики и механики	способность применения методов исследования фундаментальной и прикладной математики; современных информационно-коммуникационными технологиями в области математики и механики
ПК-1 Способность разрабатывать непрерывные математические модели решаемых научных проблем и задач	знает (пороговый уровень)	теоретические основы и методы решения дифференциальных уравнений, методы решения обобщенных краевых задач	владение теоретическими основами и методами решения дифференциальных уравнений и обобщенных краевых задач	способность владения теоретическими основами и методами решения дифференциальных уравнений и обобщенных краевых задач
	умеет (продвинутый)	создавать и анализировать непрерывные математические модели,	умение создавать непрерывные математические модели, разрабатывать	способность создавать непрерывные математические модели, разрабатывать

		разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач	методы и алгоритмы решения некорректных задач	методы и алгоритмы решения некорректных задач
	владеет (высокий)	современными методами решения дифференциальных уравнений, основами численных методов решения краевых задач	успешное и систематическое применение методов решения дифференциальных уравнений, основных численных методов решения краевых задач	способность применения методов решения дифференциальных уравнений, основных численных методов решения краевых задач
ПК-2 Способность углубленного анализа проблем корректности задач для дифференциальных уравнений	знает (пороговый уровень)	методы, используемые для анализа корректности динамических систем и оптимального управления, методы решения некорректных задач	владение методами исследования корректности задач оптимального управления, методах решения некорректных задач	способность владения методами исследования корректности задач оптимального управления, методах решения некорректных задач
	умеет (продвинутый)	разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач, обобщенных краевых задач	умение разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач, обобщенных краевых задач	способность разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач, обобщенных краевых задач
	владеет (высокий)	современными методами решения некорректных задач оптимального управления динамическими системами, основами численных методов решения некорректных краевых задач	успешное и систематическое применение методов решения некорректных задач оптимального управления динамическими системами, численных методов решения некорректных краевых задач	способность применения методов решения некорректных задач оптимального управления динамическими системами, численных методов решения некорректных краевых задач

ПК-3 Способность к анализу задач оптимального управления и созданию алгоритмов их решения	знает (пороговый уровень)	теоретические основы и методы, используемые для построения динамических систем и оптимального управления, методы решения обобщенных краевых задач	владение теоретическими основами и методами построения динамических систем и оптимального управления, методами решения обобщенных краевых задач	способность владения теоретическими основами и методами построения динамических систем и оптимального управления, методами решения обобщенных краевых задач
	умеет (продвинутый)	создавать математические модели динамических систем и оптимального управления, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач	умение создавать математические модели динамических систем и оптимального управления, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач	способность создавать математические модели динамических систем и оптимального управления, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач
	владеет (высокий)	современными методами решения задач оптимального управления динамическими системами, основами численных методов решения краевых задач	успешное и систематическое применение методов решения задач оптимального управления динамическими системами, численных методов решения краевых задач	способность применения методов решения задач оптимального управления динамическими системами, численных методов решения краевых задач
ПК-4 Способность использовать современные методы обработки и интерпретации данных с применением	знает (пороговый уровень)	стратегию применения программных продуктов для обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий	владение стратегиями применения методов обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий	способность владения стратегиями применения методов обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий
	умеет (продвинутый)	создавать и анализировать существующие численные	умение создавать и анализировать существующие численные	способность создавать и анализировать существующие

компьютерных технологий		алгоритмы решения дифференциальных уравнений, интерпретировать полученные результаты с применением компьютерных технологий	алгоритмы решения дифференциальных уравнений, интерпретировать полученные результаты с применением компьютерных технологий	численные алгоритмы решения дифференциальных уравнений, интерпретировать полученные результаты с применением компьютерных технологий
	владеет (высокий)	навыками применения современных программных продуктов для обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий	успешное и систематическое владение современными программными продуктами для обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий	способность владения современными программными продуктами для обработки и интерпретации данных с применением компьютерных технологий
ПК-5 Способность профессионально излагать результаты своих исследований и представлять их в виде научных публикаций и презентаций	знает (пороговый уровень)	требования оформления результатов своих исследований и представления их в виде научных публикаций и презентаций	владение навыками оформления результатов своих исследований и представления их в виде научных публикаций и презентаций	способность оформления результатов своих исследований и представления их в виде научных публикаций и презентаций
	умеет (продвинутый)	профессионально излагать результаты своих исследований и представлять их в виде научных публикаций и презентаций	профессиональное умение излагать результаты своих исследований и представлять их в виде научных публикаций и презентаций	способность излагать результаты своих исследований и представлять их в виде научных публикаций и презентаций
	владеет (высокий)	навыками изложения обладающих внутренним единством результатов своих исследований и представления их в виде научных публикаций и презентаций	успешное и систематическое владение навыками изложения обладающих внутренним единством результатов своих исследований и представления их в виде научных публикаций и презентаций	способность владения навыками изложения обладающих внутренним единством результатов своих исследований и представления их в виде научных публикаций и презентаций

			публикаций и презентаций	
УК-1 Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	знает (пороговый уровень)			
	умеет (продвинутый)			
	владеет (высокий)			

### Оценочные средства для промежуточной аттестации

#### Вопросы для подготовки к зачёту по дисциплине «Метод конечных разностей»

1. Сущность метода математического моделирования.
2. Использование законов сохранения.
3. Основные модели гидродинамики.
4. Сущность метода сеток. Погрешность аппроксимации дифференциального оператора.
5. Разностная задача и разностная схема.
6. Постановка начально-краевой задачи для уравнения переноса. Свойства точного решения.
7. Построение разностных схем.

8. Реализация разностной схемы. Исследование устойчивости на основе принципа максимума.
9. Исследование устойчивости энергетическим методом.
10. Исследование устойчивости методом гармоник.
11. Явные и неявные схемы.
12. Схемы повышенной точности.
13. Классификация двухточечных разностных схем.
14. Постановка начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Свойства точного решения.
15. Построение разностных схем.
16. Исследование устойчивости методом гармоник.
17. Явные и неявные схемы.
18. Схемы повышенной точности.
19. Классификация двухслойных трехточечных разностных схем для уравнения теплопроводности.
20. Постановка начально-краевой задачи для уравнения конвекции-диффузии. Свойства точного решения.
21. Построение разностных схем.
22. Реализация разностной схемы.
23. Исследование устойчивости на основе принципа максимума.
24. Исследование устойчивости энергетическим методом.
25. Исследование устойчивости методом гармоник.
26. Явные и неявные схемы.
27. Схемы повышенной точности.
28. Классификация трехточечных разностных схем.
29. Употребительные разностные схемы для уравнения Пуассона.
30. Аппроксимация краевой задачи.
31. Исследование устойчивости решения задачи Дирихле методом априорных оценок.
32. Схемы повышенной точности.

**Оценочные средства для текущего контроля  
Темы рефератов, докладов, сообщений  
по дисциплине «Метод конечных разностей»**

1. Сущность метода сеток дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений. Сущность интегро-интерполяционного метода. Метод Эйлера.
2. Метод Эйлера с пересчетом или метод Рунге–Кутта второго порядка точности.
3. Формулы разностного дифференцирования произведения и суммирования по частям.
4. Разностные формулы Грина.
5. Сеточная задача на собственные значения.



6. Сеточное преобразование Фурье.
7. Обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Суть интегро-интерполяционного метода. Двухточечные разностные схемы. Трехточечные разностные схемы.
8. Трехслойная разностная схема для одномерного волнового уравнения. Постановка задачи. Построение разностной схемы.
9. Исследование устойчивости разностных схем.
10. Некоторые методы решения сеточных уравнений.
11. Метод прогонки решения систем с трехдиагональной матрицей.
12. Метод разделения переменных решения разностных задач.

### **Вопросы для коллоквиумов**

по дисциплине «Метод конечных разностей»

**РАЗДЕЛ 1.** Основные модели математической гидродинамики, понятия метода конечных разностей.

1. Сущность метода математического моделирования.
2. Использование законов сохранения.
3. Сущность метода сеток.
4. Погрешность аппроксимации дифференциального оператора.
5. Разностная задача и разностная схема.

**РАЗДЕЛ 2.** Метод сеток дискретизации уравнения переноса, уравнения теплопроводности.

1. Постановка начально-краевой задачи для уравнения переноса. Свойства точного решения. Построение разностных схем.

2. Реализация разностной схемы.
3. Исследование устойчивости на основе принципа максимума.
4. Исследование устойчивости энергетическим методом.
5. Исследование устойчивости методом гармоник.
6. Явные и неявные схемы.
7. Схемы повышенной точности.
8. Классификация двухточечных разностных схем.

9. Постановка начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

10. Классификация двухслойных трехточечных разностных схем для уравнения теплопроводности.

**РАЗДЕЛ 3.** Метод сеток дискретизации уравнения конвекции-диффузии, уравнения Пуассона.

1. Постановка начально-краевой задачи для уравнения конвекции-диффузии. Свойства точного решения.

2. Построение разностных схем. Реализация разностной схемы.
3. Исследование устойчивости на основе принципа максимума.
4. Исследование устойчивости энергетическим методом.

5. Исследование устойчивости методом гармоник.
6. Явные и неявные схемы. Схемы повышенной точности.
7. Классификация трехточечных разностных схем.
8. Употребительные разностные схемы для уравнения Пуассона.
9. Аппроксимация краевой задачи.
10. Исследование устойчивости решения задачи Дирихле методом априорных оценок.
11. Схемы повышенной точности.

**Комплект заданий для контрольной работы**  
по дисциплине «Метод конечных разностей»

**Задание 1.** Исследовать и численно решить начально-краевую задачу для уравнения переноса.

1. Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \text{ в } Q = (0,1) \times (0,1), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u|_{x=0} = g(t) \quad (2)$$

Требуется найти приближенное решение задачи (1), (2) с помощью одной из схем, входящих в следующее семейство разностных схем:

$$\frac{v_{i-1+\sigma}^{n+1} - v_{i-1+\sigma}^n}{\tau_{n+1}} + a \frac{v_i^{n+\theta} - v_{i-1}^{n+\theta}}{h_i} = f_{i-1+\sigma}^{n+\theta}, i = 1, \dots, N, n = 0, \dots, M-1. \quad (3)$$

$$v_i^0 = \varphi(x_i), i = 0, 1, \dots, N, v_0^n = g(t_n), n = 0, 1, \dots, M. \quad (4)$$

Здесь используются обычные обозначения (см. детали в книге [1, § 6], сетка представлена на рис. 1,  $\theta \in [0,1]$  и  $\tau \in [0,1]$  - параметры схемы).

Мы рассматриваем следующие частные случаи:

1.  $\theta = 0, \sigma = 0$ . Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = f_{i-1}^n, O(h + \tau). \quad (5)$$

2.  $\theta = 0, \sigma = 1/2$ . Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1/2}^{n+1} - v_{i-1/2}^n}{\tau} + a \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = f_{i-1/2}^n, O(h^2 + \tau). \quad (6)$$

3.  $\theta = 0, \sigma = 1$ . Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = f_i^n, O(h + \tau). \quad (7)$$

4.  $\theta = 1/2, \sigma = 0$ . Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1/2} - v_{i-1}^{n+1/2}}{h} = f_{i-1}^{n+1/2}, O(h + \tau^2). \quad (8)$$

5.  $\theta = 1/2, \sigma = 1/2$ . Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1/2}^{n+1} - v_{i-1/2}^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1/2} - v_{i-1}^{n+1/2}}{h} = f_{i-1/2}^{n+1/2}, O(h^2 + \tau^2). \quad (9)$$

6.  $\theta = 1/2, \sigma = 1$ . Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1/2} - v_{i-1}^{n+1/2}}{h} = f_i^{n+1/2}, O(h + \tau^2). \quad (10)$$

7.  $\theta=1, \sigma=0$ . Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{h} = f_{i-1}^{n+1}, O(h + \tau). \quad (11)$$

8.  $\theta=1, \sigma=1/2$ . Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1/2}^{n+1} - v_{i-1/2}^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{h} = f_{i-1/2}^{n+1}, O(h^2 + \tau). \quad (12)$$

9.  $\theta=1, \sigma=1$ . Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{h} = f_i^{n+1}, O(h + \tau). \quad (13)$$

Применить одну из этих схем для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) в случае, когда  $f=0, \varphi(x)=\sin 2\pi x, g(t)=-\sin 2\pi t$ . Шаг сетки  $h$  выбирать равным 0.1, 0.05 и 0.025. Результаты выдать в виде таблицы ошибок между точным и приближенным решениями. Номер схемы взять следующие: 4, 5, 6, 8.

**Задание 2.** Исследовать и численно решить начально-краевую задачу для уравнения диффузии.

1. Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \hat{a} Q = (0,1) \times (0,1), \quad (14)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u|_{x=0} = g_1(t), u|_{x=l} = g_2(t). \quad (15)$$

Требуется найти приближенное решение задачи (1), (2) с помощью одной из схем, входящей в следующее семейство разностных схем:

$$\left( A_\alpha \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_{n+1}} \right)_i - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+\theta} - 2v_i^{n+\theta} + v_{i+1}^{n+\theta}}{h^2} = (A_\alpha f^{n+\theta})_i, i=1,2,\dots,N-1; n=0,1,\dots,M-1. \quad (16)$$

$$v_i^0 = \varphi(x_i), i=0,1,\dots,N, v_0^n = g_1(t_n), v_N^n = g_2(t_n), n=0,1,\dots,M. \quad (17)$$

Простой анализ показывает (см. [1]), что разностная схема (16), (17) имеет глобальный порядок аппроксимации

$$O(h^{r(\alpha)} + \tau^{s(\theta)}) \text{ на решении } u \in C^{r+2, s+1}(\bar{Q}), \quad (18)$$

где

$$s(\theta) = \begin{cases} 1, \theta \neq 1/2, \\ 2, \theta = 1/2, \end{cases} \quad r(\alpha) = \begin{cases} 2, \alpha \neq 1/12, \\ 4, \alpha = 1/12, \end{cases} \quad (19)$$

и устойчива, если выполняется условие

$$\theta \geq \frac{1}{2} + \frac{(4\alpha - 1)h^2}{4a^2\tau_n}. \quad (20)$$

Приведем краткую классификацию и основные свойства наиболее известных разностных схем для уравнения (14). При этом, как и в §6, под порядком аппроксимации приводимых ниже схем будем понимать локальный порядок аппроксимации соответствующего разностного уравнения,

определяемый из (1.18), который будем записывать в одной строке с разностным уравнением (справа от него).

1. Простейшая явная схема ( $\alpha = \theta = 0$ ) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - a^2 \frac{v_{i-1}^n - 2v_i^n + v_{i+1}^n}{h^2} = f_i^n, O(h^2 + \tau), \quad (21)$$

или

$$v_i^{n+1} = rv_{i-1}^n + (1-2r)v_i^n + rv_{i+1}^n + \mathcal{F}_i^n. \quad (22)$$

В силу (20) схема условно устойчива, т.е. устойчива при

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a^2\tau} \Rightarrow \tau \leq \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2}. \quad (23)$$

2. Явная схема повышенной точности ( $\theta = 1/2, \alpha = 1/12, r = 1/6$ ) имеет вид

$$v_i^{n+1} = \frac{1}{6}(v_{i-1}^n + 4v_i^n + v_{i+1}^n) + \frac{\tau}{12}(f_{i-1}^{n+1/2} + 10f_i^{n+1/2} + f_{i+1}^{n+1/2}), O(h^4 + \tau^2) \quad (24)$$

и устойчива, поскольку выполняется условие (20). Однако в силу условия  $r = 1/6$  шаг  $\tau$  жестко связан с  $h$  формулой  $\tau = h^2/6a^2$ .

3. Простейшая неявная схема ( $\alpha = 0, \theta = 1$ ) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i+1}^{n+1}}{h^2} = f_i^{n+1}, O(h^2 + \tau), \quad (25)$$

или

$$-rv_{i-1}^{n+1} + (1-2r)v_i^{n+1} - rv_{i+1}^{n+1} = v_i^n + \mathcal{F}_i^{n+1} \quad (26)$$

и абсолютно устойчива, так как выполняется условие (20).

4. Схема Кранка-Николсона ( $\alpha = 0, \theta = 1/2$ ) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+1/2} - 2v_i^{n+1/2} + v_{i+1}^{n+1/2}}{h^2} = f_i^{n+1/2}, O(h^2 + \tau^2), \quad (27)$$

или

$$-rv_{i-1}^{n+1} + 2(1+r)v_i^{n+1} - rv_{i+1}^{n+1} = rv_{i-1}^n + 2(1-r)v_i^n + rv_{i+1}^n + 2\mathcal{F}_i^{n+1/2} \quad (28)$$

и абсолютно устойчива, поскольку выполняется условие (20).

5. Схема "с весами" ( $\alpha = 0, \theta \geq 0$ ) имеет вид (16) при  $\alpha = 0$  или

$$\begin{aligned} & \theta rv_{i-1}^{n+1} + (1+2r\theta)v_i^{n+1} - \theta rv_{i+1}^{n+1} = \\ & = r(1-\theta)v_{i-1}^n + [1-2r(1-\theta)]v_i^n + r(1-\theta)v_{i+1}^n + \mathcal{F}_i^{n+\theta}, O(h^2 + \tau^{s(\theta)}) \end{aligned} \quad (29)$$

и устойчива согласно (20) при выполнении условия

$$\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a^2\tau} \Rightarrow \tau \leq \frac{h^2}{2a^2(1-2\theta)}. \quad (30)$$

При  $\theta \geq 1/2$  указанная схема абсолютно устойчива. Отметим, что схемы (21), (25) и (27) являются частными случаями схемы (29), отвечающими соответственно значениям  $\theta = 0, \theta = 1$  и  $\theta = 1/2$ . Схему (16), в свою очередь, можно считать обобщением схемы (29).

6. Схема максимальной точности ( $\alpha = 1/12, \theta = 1/2$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} & (1-6r)v_{i-1}^{n+1} + (10+12r)v_i^{n+1} + (1-6r)v_{i+1}^{n+1} = \tau(f_{i-1}^{n+1/2} + 10f_i^{n+1/2} + f_{i+1}^{n+1/2}) + \\ & + (1+6r)v_{i-1}^n + (10-12r)v_i^n + (1+6r)v_{i+1}^n, O(h^4 + \tau^2) \end{aligned} \quad (31)$$

и абсолютно устойчива, поскольку выполняется (20). Схему (31) можно считать наилучшей (в некотором смысле "оптимальной") на гладких

решениях разностной схемой, аппроксимирующей уравнение (14) на шеститочечном шаблоне  $\omega_{i-1,i+1}^{n,n+1}$ . О других разностных схемах для уравнения (14) можно прочитать, например, в [2].

Применить одну из этих схем для нахождения приближенного решения задачи (14), (15)

в случае, когда:

а)  $f = 2(x^2 - x)(2t - 1) - 4(t^2 - t)$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $t \in (0,1]$ .

Точное решение:  $u(x,t) = 2(t^2 - t)(x^2 - x)$ .

б)  $f = 4\pi^2 \sin 2\pi(x - t) - 2\pi \cos 2\pi(x - t)$ ,  $\varphi(x) = \sin 2\pi x$ ,  $g_1(0,t) = -\sin 2\pi t$ ,  $g_2(1,t) = \sin 2\pi(1 - t)$ .

Шаг сетки  $h$  выбирать равным 0.1, 0.05 и 0.025. Результаты выдать в виде таблицы ошибок между точным и приближенным решениями.

**Задание 3.** Рассматривается следующая начально-краевая задача для двумерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f \text{ в } \Omega \times (0, T), \Omega = (0,1) \times (0,1), \quad (32)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u|_{\partial\Omega} = g(x, y, t). \quad (33)$$

Требуется построить семейство разностных схем для задачи (32), (33), зависящее от двух параметров  $\alpha$  и  $\theta$ , аналогичное семейству (16). Исследовать порядок аппроксимации построенных разностных схем, исследовать их устойчивость и найти приближенное решение с помощью схем второго и четвертого порядка точности по пространственным переменным.

Применить одну из этих схем для нахождения приближенного решения задачи (32), (33) в случае, когда:

а)  $f = 2(x^2 - x)(y^2 - y)(2t - 1) - 4(t^2 - t)(x^2 - x + y^2 - y)$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $y \in [0,1]$ ,  $t \in (0,1]$ .

Точное решение:  $u(x,t) = 2(t^2 - t)(x^2 - x)(y^2 - y)$ .

б)  $f = \pi \sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi t + 2\pi \sin \pi t)$ ,  $\varphi(x, y) = 0$ ,  $g(x, y, t) = 0$ .

Шаг сетки  $h$  выбирать равным 0.1, 0.05 и 0.025. Результаты выдать в виде таблицы ошибок между точным и приближенным решениями.

### Текущий контроль

Текущий контроль предполагает систематическую проверку усвоения учебного материала, сформированности компетенций или их элементов, регулярно осуществляемую на протяжении изучения дисциплины, в соответствии с ее рабочей программой.

Состоит в проверке правильности выполнения заданий по самостоятельной работе. Задание зачтено, если нет ошибок. По текущим ошибкам даются пояснения.