



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**по дисциплине «Метод конечных элементов»**

Направление подготовки *09.06.01 Информатика и вычислительная техника*  
Профиль «*Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ*»

Форма подготовки (очная/заочная)

**Владивосток**  
**2019**

## Паспорт ФОС

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-1 Владение методологией теоретических и экспериментальных исследований в области профессиональной деятельности	Знает	методы исследования процессов и явлений, составляющих содержание прикладной математики и информатики.
	Умеет	анализировать математические модели, работать в электронно-библиотечных системах
	Владеет	методами исследования прикладной математики и информатики, современными информационно-коммуникационными технологиями в области прикладной математики и информатики
ПК-1 Способность к разработке, обоснованию и тестированию эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий	Знает	теоретические основы и методы решения дифференциальных уравнений, методы решения обобщенных краевых задач
	Умеет	создавать и анализировать непрерывные математические модели, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач
	Владеет	современными методами решения дифференциальных уравнений, основами численных методов решения краевых задач
ПК-2 Способность к разработке и обоснованию качественных и приближенных методов исследования математических моделей различных объектов и явлений	Знает	методы, используемые для анализа корректности динамических систем и оптимального управления, методы решения некорректных задач
	Умеет	разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач, обобщенных краевых задач
	Владеет	современными методами решения некорректных задач оптимального управления динамическими системами, основами численных методов решения некорректных краевых задач
ПК-3 Способность к разработке, анализу и исследованию математических методов моделирования различных объектов и явлений	Знает	теоретические основы и методы, используемые для построения динамических систем и оптимального управления, методы решения обобщенных краевых задач
	Умеет	создавать математические модели динамических систем и оптимального управления, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач
	Владеет	современными методами решения задач оптимального управления динамическими системами, основами численных методов решения краевых задач

<b>3 семестр</b>			
№	Контролируе	Коды, наименование и этапы	Оценочные средства

п / п	мые разделы / темы дисциплины	формирования компетенций		текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Темы 1-3	ОПК-1 ПК-1, ПК-2, ПК-3	Знает	УО-1 Собеседование	Зачет, вопросы 1-15
2	Занятие 1 -4	ОПК-1 ПК-1, ПК-2, ПК-3	Умеет Владеет	ПР-11 расчетно- графическая задача	Зачет, вопросы 1-15
<b>4 семестр</b>					
3	Темы 4-8	ОПК-1 ПК-1, ПК-2, ПК-3	Знает	УО-1 Собеседование	Экзамен, вопросы 1-31
4	Занятие 5-9.	ОПК-1 ПК-1, ПК-2, ПК-3	Умеет Владеет	ПР-11 расчетно- графическая задача	Экзамен, вопросы 1-31

### Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		критерии	показатели
ОПК-1 Владение методологией теоретических и экспериментальных исследований в области профессиональной деятельности	знает (пороговый уровень)	методы исследования процессов и явлений, составляющих содержание прикладной математики и информатики.	Сформированные представления о методах исследования процессов и явлений, составляющих содержание прикладной математики и информатики	Способность дать ответы на вопросы о существующих методах
	умеет (продвинутый)	анализировать математические модели, работать в электронно-библиотечных системах	Умение анализировать математические модели Умение работать в электронно-библиотечных системах	Способность найти нужные для решения задач методы
	владеет	методами	Успешное	и Способность

	т (высокий)	исследования прикладной математики и информатики, современными информационно-коммуникационным и технологиями в области прикладной математики и информатики	систематическое применение методов исследования фундаментальной и прикладной математики Успешное и систематическое применение современных информационно-коммуникационными технологиями в области математики и механики	пояснить выбор методов
ПК-1 Способность к разработке, обоснованию и тестированию эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий	знает (пороговый уровень)	теоретические основы и методы решения дифференциальных уравнений, методы решения обобщенных краевых задач	Сформированные представления о теоретических основах и методах, используемых для решения дифференциальных уравнений и обобщенных краевых задач	Способность дать ответы на вопросы
	умеет (продвинутый)	создавать и анализировать непрерывные математические модели, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач	Умение создавать непрерывные математические модели, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач	Наличие разработанных моделей, методов и алгоритмов решения некорректных задач
	владеет (высокий)	современными методами решения дифференциальных уравнений, основами численных методов решения краевых задач	Успешное и систематическое применение методов решения дифференциальных уравнений, основных численных методов решения краевых задач	Способность объяснить применение методов
ПК-2 Способность к разработке и обоснованию качественных и приближенных методов исследования математиче	знает (пороговый уровень)	методы, используемые для анализа корректности динамических систем и оптимального управления, методы решения некорректных задач	Сформированные представления о методах исследования корректности задач оптимального управления, методах решения некорректных задач	Способность дать ответы на вопросы
	умеет (продвинутый)	разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач, обобщенных	Умение разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач, обобщенных краевых задач	Наличие разработанных методов и алгоритмов

ских моделей различных объектов и явлений		краевых задач		
	владеет (высокий)	современными методами решения некорректных задач оптимального управления динамическими системами, основами численных методов решения некорректных краевых задач	Успешное и систематическое применение методов решения некорректных задач оптимального управления динамическими системами, численных методов решения некорректных краевых задач	Способность объяснить применение методов
ПК-3 Способность к разработке, анализу и исследованию математических методов моделирования различных объектов и явлений	знает (пороговый уровень)	теоретические основы и методы, используемые для построения динамических систем и оптимального управления, методы решения обобщенных краевых задач	Сформированные представления о теоретических основах и методах, используемых для построения динамических систем и оптимального управления	Способность дать ответы на вопросы
	умеет (продвинутый)	создавать математические модели динамических систем и оптимального управления, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач	Умение создавать математические модели динамических систем и оптимального управления, разрабатывать методы и алгоритмы решения некорректных задач	Наличие разработанных моделей, методов и алгоритмов
	владеет (высокий)	современными методами решения задач оптимального управления динамическими системами, основами численных методов решения краевых задач	Успешное и систематическое применение методов решения задач оптимального управления динамическими системами, численных методов решения краевых задач	Способность объяснить применение методов

## КОМПЛЕКСЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕЙ АТТЕСТАЦИИ

**Темы рефератов, докладов, сообщений  
по дисциплине «Метод конечных элементов»**

1. Элементы теории обобщенных функций.
2. Пространства Соболева. Пространства следов.
3. Эквивалентность вариационной задачи и задачи минимизации квадратичного функционала.
4. Методы решения сеточных уравнений.
5. Применение математического моделирования в динамике жидкости. Примеры гидродинамических моделей.
6. Модели гидродинамики идеальной жидкости.
7. Модели гидродинамики вязкой жидкости.
8. Модели колебательных процессов.
9. Усложненные модели гидродинамики. Методы построения математических моделей.
10. Основные методы дискретизации краевых задач.
11. Сущность метода конечных разностей. Исследование сходимости метода.
12. Применение пакетов прикладных программ для дискретизации и численного решения краевых задач.
13. Сущность и основные особенности пакета FreeFem++.
14. Понятие обобщенной функции. Пространство обобщенных функций.
15. Коэрцитивные билинейные формы. Теорема Лакса-Мильграма.

### **Вопросы для коллоквиумов**

по дисциплине «Метод конечных элементов»

#### **МОДУЛЬ 1. Вариационные формулировки основных краевых задач.**

1. Сущность метода конечных элементов.
2. Постановки основных краевых задач: пяти задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го и 4-го порядков и трех задач для уравнений второго порядка эллиптического типа.
3. Постановки основных краевых задач: задача Дирихле для простейшего ОДУ 2-го порядка (задача 1).
4. Задача Дирихле для ОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами (задача 2).
5. Смешанная краевая задача для ОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами (задача 3).
6. Задача Дирихле для ОДУ 4-го порядка с переменными коэффициентами (задача 4).
7. Смешанная краевая задача для ОДУ 4-го порядка (задача 5).
8. Смешанная краевая задача для двумерного уравнения Лапласа (задача 6).
9. Смешанная краевая задача для двумерного уравнения Гельмгольца (задача 7).
10. Третья краевая задача для уравнения конвекции-диффузии (задача 8).

11. Вариационные формулировки задачи 1.
12. Вариационные формулировки задач 2 и 3.
13. Вариационные формулировки задач 4 и 5.
14. Вариационные формулировки задач 6 и 7.
15. Вариационные формулировки задачи 8.

#### МОДУЛЬ 2. Проекционные методы дискретизации краевых задач.

1. Сущность метода проекций (моментов).
2. Метод коллокаций для задачи 1.
3. Метод Галеркина для задачи 1.
4. Метод Бубнова-Галеркина для задачи 1.
5. Методы Рунге и наименьших квадратов для задачи 1.
6. Основная теорема для метода Рунге.
7. Методы коллокаций, Галеркина, Рунге и наименьших квадратов для других одномерных задач.
8. Сущность метода проекций дискретизации многомерных краевых задач.
9. Методы коллокаций и Галеркина для задач 6 и 7.
10. Методы Бубнова-Галеркина и Рунге для задач 6 и 7.
11. Методы наименьших квадратов для задач 6 и 7.
12. Проекционные методы для задачи 8.

#### МОДУЛЬ 3. Метод конечных элементов дискретизации краевых задач.

1. Понятие сплайна. Степень и дефект сплайна.
2. Свойства сплайнов. Использование сплайнов в качестве базисных функций.
3. Применение МКЭ для решения задачи 1.
4. Исследование сходимости МКЭ для задачи 1.
5. Применение МКЭ для решения задачи 2.
6. Исследование сходимости МКЭ для решения задачи 2.
7. Применение МКЭ для решения задачи 3.
8. Исследование сходимости МКЭ для решения задачи 3.
9. Применение МКЭ для решения задач 4 и 5.
10. Основные этапы МКЭ для двумерных задач.
11. Триангуляция области и построение базисных функций. Формирование матрицы коэффициентов.
12. Введение барицентрических координат.
13. Формирование матрицы в случае прямоугольной области I.
14. Вычисление коэффициентов матрицы, отвечающих внутренним узлам.
15. Вычисление коэффициентов, обусловленных краевыми условиями 3-го рода.
16. Построение разностной схемы на основе МКЭ.
17. Исследование сходимости МКЭ для решения задачи 6.
18. Применение МКЭ для решения задачи 7.
19. Применение МКЭ для решения задачи 8.

**Комплект заданий для контрольной работы**  
по дисциплине «Метод конечных элементов»

**Задание 1.** Исследовать и численно решить начально-краевую задачу для уравнения переноса.

1. Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \text{ в } Q = (0,1) \times (0,1), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u|_{x=0} = g(t) \quad (2)$$

Требуется найти приближенное решение задачи (1), (2) с помощью метода конечных элементов

Применить схему метода для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) в случае, когда  $f = 0$ ,  $\varphi(x) = \sin 2\pi x$ ,  $g(t) = -\sin 2\pi t$ . Шаг сетки  $h$  выбирать равным 0.1, 0.05 и 0.025. Результаты выдать в виде таблицы ошибок между точным и приближенным решениями.

**Задание 2.** Исследовать и численно решить начально-краевую задачу для уравнения диффузии.

1. Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \text{ в } Q = (0,1) \times (0,1), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u|_{x=0} = g_1(t), u|_{x=1} = g_2(t). \quad (2)$$

Требуется найти приближенное решение задачи (1), (2) с помощью метода конечных элементов.

Применить схему метода для нахождения приближенного решения задачи (14), (15)

в случае, когда:

а)  $f = 2(x^2 - x)(2t - 1) - 4(t^2 - t)$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $t \in (0,1]$ .

Точное решение:  $u(x,t) = 2(t^2 - t)(x^2 - x)$ .

б)  $f = 4\pi^2 \sin 2\pi(x-t) - 2\pi \cos 2\pi(x-t)$ ,  $\varphi(x) = \sin 2\pi x$ ,  $g_1(0,t) = -\sin 2\pi t$ ,  $g_2(1,t) = \sin 2\pi(1-t)$ .

Шаг сетки  $h$  выбирать равным 0.1, 0.05 и 0.025. Результаты выдать в виде таблицы ошибок между точным и приближенным решениями.

**Задание 3.** Рассматривается следующая начально-краевая задача для двумерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f \text{ в } \Omega \times (0,T), \Omega = (0,1) \times (0,1), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), u|_{\partial\Omega} = g(x,y,t). \quad (2)$$



Применить метод конечных элементов для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) в случае, когда:

а)  $f = 2(x^2 - x)(y^2 - y)(2t - 1) - 4(t^2 - t)(x^2 - x + y^2 - y)$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $y \in [0,1]$ ,  $t \in (0,1]$ .

Точное решение:  $u(x, t) = 2(t^2 - t)(x^2 - x)(y^2 - y)$ .

б)  $f = \pi \sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi t + 2\pi \sin \pi t)$ ,  $\varphi(x, y) = 0$ ,  $g(x, y, t) = 0$ .

Шаг сетки  $h$  выбирать равным 0.1, 0.05 и 0.025. Результаты выдать в виде таблицы ошибок между точным и приближенным решениями.

## **ЗАЧЕТНО-ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ**

### **Вопросы для подготовки к зачету (3 семестр)**

1. Сущность метода конечных элементов.
2. Постановки основных краевых задач: пяти задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го и 4-го порядков и трех задач для уравнений второго порядка эллиптического типа.
3. Постановки основных краевых задач: задача Дирихле для простейшего ОДУ 2-го порядка (задача 1).
4. Задача Дирихле для ОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами (задача 2).
5. Смешанная краевая задача для ОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами (задача 3).
6. Задача Дирихле для ОДУ 4-го порядка с переменными коэффициентами (задача 4).
7. Смешанная краевая задача для ОДУ 4-го порядка (задача 5).
8. Смешанная краевая задача для двумерного уравнения Лапласа (задача 6).
9. Смешанная краевая задача для двумерного уравнения Гельмгольца (задача 7).
10. Третья краевая задача для уравнения конвекции-диффузии (задача 8).
11. Вариационные формулировки задачи 1.
12. Вариационные формулировки задач 2 и 3.
13. Вариационные формулировки задач 4 и 5.
14. Вариационные формулировки задач 6 и 7.
15. Вариационные формулировки задачи 8.

### **Вопросы для подготовки к экзамену (4 семестр)**

1. Сущность метода проекций (моментов).
2. Метод коллокаций для задачи 1.
3. Метод Галеркина для задачи 1.
4. Метод Бубнова-Галеркина для задачи 1.
5. Методы Рунге и наименьших квадратов для задачи 1.
6. Основная теорема для метода Рунге.

7. Методы коллокаций, Галеркина, Ритца и наименьших квадратов для других одномерных задач.
8. Сущность метода проекций дискретизации многомерных краевых задач.
9. Методы коллокаций и Галеркина для задач 6 и 7.
10. Методы Бубнова-Галеркина и Ритца для задач 6 и 7.
11. Методы наименьших квадратов для задач 6 и 7.
12. Проекционные методы для задачи 8.
13. Понятие сплайна. Степень и дефект сплайна.
14. Свойства сплайнов. Использование сплайнов в качестве базисных функций.
15. Применение МКЭ для решения задачи 1.
16. Исследование сходимости МКЭ для задачи 1.
17. Применение МКЭ для решения задачи 2.
18. Исследование сходимости МКЭ для решения задачи 2.
19. Применение МКЭ для решения задачи 3.
20. Исследование сходимости МКЭ для решения задачи 3.
21. Применение МКЭ для решения задач 4 и 5.
22. Основные этапы МКЭ для двумерных задач.
23. Триангуляция области и построение базисных функций. Формирование матрицы коэффициентов.
24. Введение барицентрических координат.
25. Формирование матрицы в случае прямоугольной области I.
26. Вычисление коэффициентов матрицы, отвечающих внутренним узлам.
27. Вычисление коэффициентов, обусловленных краевыми условиями 3-го рода.
28. Построение разностной схемы на основе МКЭ.
29. Исследование сходимости МКЭ для решения задачи 6.
30. Применение МКЭ для решения задачи 7.
31. Применение МКЭ для решения задачи 8.

### **Текущий контроль**

Текущий контроль предполагает систематическую проверку усвоения учебного материала, сформированности компетенций или их элементов, регулярно осуществляемую на протяжении изучения дисциплины, в соответствии с ее рабочей программой.

Состоит в проверке правильности выполнения заданий по самостоятельной работе. Задание зачтено, если нет ошибок. По текущим ошибкам даются пояснения.