



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

«СОГЛАСОВАНО»

Руководитель ОП Строительство уникальных  
зданий и сооружений

  
(подпись) Т.Э. Уварова

« 17 » июня 2016 г.

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующая кафедрой алгебры, геометрии и  
анализа

  
(подпись) Р.П. Шепелева

« 17 » июня 2016 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Вариационное исчисление**

Специальность 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений»

Специализация «Строительство гидротехнических сооружений повышенной ответственности»

Форма подготовки - очная

курс - 2 семестр - 4

лекции - 18 час.

практические занятия - 36 час.

лабораторные работы – не предусмотрены

в том числе с использованием МАО лек. 6 /пр. 14 час.

всего часов аудиторной нагрузки - 54 час.

в том числе с использованием МАО - 20 час.

самостоятельная работа - 90 час.

в том числе на подготовку к экзамену - 27 час.

контрольные работы – 1

курсовая работа/проект – не предусмотрено учебным планом

зачет – не предусмотрен

экзамен – 4 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 11 августа 2016 г. №1030

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры алгебры, геометрии и анализа  
Протокол № 11 от « 17 » июня 2016 г.

Зав. кафедрой: к.ф.-м.н., профессор Р.П. Шепелева

Составитель: к. ф.-м. н., доцент, И.Л. Елисеенко

## ABSTRACT

**Specialist's in 08.05.01** Construction of unique buildings and structures

**Study profile** Construction of hydrotechnical constructions of the increased responsibility

**Course title:** Calculus of variations

**Basic part of Blok 1, 4 credits.**

**Instructor:** Eliseenko I. L.

**At the beginning of the course, a student should be able to:**

- ability to find partial derivatives of functions of several variables and full derivatives of complex functions of several variables,
- ability to solve linear and nonlinear systems of equations
- ability to solve differential equations and systems of differential equations

**Learning outcomes:** GPC-2 - possession of effective rules, methods and means of collecting, exchange, storage and processing of information, skills of work with the computer as a means of information management; GPC -6 - the use of the basic laws of natural Sciences in professional activities, the use of methods of mathematical analysis and mathematical (computer) modeling, theoretical and experimental research; GPC 7 - the ability to identify the natural-scientific nature of the problems arising in the course of professional activity, to attract them to solve the corresponding physical and mathematical apparatus.

**Course description:** In the discipline "calculus of variations" deals with the classical problem of the calculus of variations; problems with higher derivatives, functional dependent vector functions; functions that depend on functions of two variables; problems with moving tips and moving boundary; problem of Bolza; tasks on a conditional extremum: the problem of Lagrange and the isoperimetric problem; approximate methods of solution of problems in calculus of variations: the method of Ritz and the finite element method.

### **Main course literature:**

1. Averbukh, Yu. V. the Simplest problems of calculus of variations [Electronic resource]: textbook / Y. V. Averbukh, T. I. Serezhnikova. — Electron. text data. - Yekaterinburg: Ural Federal University, 2014. - 41C. - 978-5-7996-1250-4. — Access mode: <http://www.iprbookshop.ru/65975.html>
2. Variational calculus: a teaching package for high schools / L. I., Eliseenko, far Eastern state technical University. – Vladivostok: publishing house of FESTU, 2008  
<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:385009&theme=FEFU>
3. MOKLYACHUK, M. P. the calculus of variations. Extreme problems [Electronic resource]: textbook / M. p. MOKLYACHUK. — Electron. text data. - Moscow, Izhevsk: Regular and chaotic dynamics, 2006. — 428 c. — 5-93972-546-5. — Access mode: <http://www.iprbookshop.ru/16495.html>
4. Parshev L. p. Variational calculus [Electronic resource]: guidelines for the implementation of the model calculation / L. p. Parshev, A.V. Kalinkin, A.V. Mastikhin. — Electron. text data. - Moscow: Moscow state technical University named After N. Uh... Bauman, 2010. - 56c. - 2227-8397. — Access mode: <http://www.iprbookshop.ru/31379.html>
5. Ryabikova T. V. Variational methods in problems of statics and dynamics of building structures [Electronic resource]: textbook / T. V. Ryabikova, A. A. Semenov. — Electron. text data. — SPb.: Saint Petersburg state University of architecture and civil engineering, EBS DIA, 2016. - 116 p. - 978-5-9227-0656-8. — Access mode: <http://www.iprbookshop.ru/74323.html>
6. Trakimas Y. V. fundamentals of variational calculus in examples and problems [Electronic resource]: study guide / Yu. V. Trakimas. — Electron. text data. - Novosibirsk: Novosibirsk state technical University, 2011. — 72 c. — 978-5-7782-1671-6. — Access mode: <http://www.iprbookshop.ru/45416.html>.

**Form of final control: exam.**

## Аннотация к рабочей программе дисциплины «Вариационное исчисление»

Курс «Вариационное исчисление» предназначен для студентов направления 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений. Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы и 144 академических часа. Учебным планом по данному курсу предусмотрены лекции (18 часов), практические занятия (36 часов), самостоятельная работа студентов (63 часа), контроль (27 часов). Дисциплина реализуется на втором курсе в четвертом семестре и входит в базовую часть естественнонаучного цикла. Курс «Вариационное исчисление» связан с дисциплиной «Математический анализ».

**Цель дисциплины** «Вариационное исчисление» - формирование общепрофессиональных компетенций, определяющих готовность и способность специалиста к использованию знаний при решении практических задач в рамках производственно-технологической, проектно-изыскательской и научно-исследовательской профессиональной деятельности.

### **Задачами дисциплины:**

- овладение знаниями и практическими навыками в применении математических моделей в прикладных инженерных задачах;
- овладение умениями при помощи соответствующего математического аппарата находить решения в инженерных задачах и оценивать их эффективность;
- выработать навыки построения математических моделей при решении оптимизационных инженерных задач.

Для успешного изучения дисциплины «Вариационное исчисление» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

- умение находить частные производные функций нескольких переменных и полные производные сложных функций нескольких переменных,
- способность решать линейные и нелинейные системы уравнений,
- способность решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений.

В результате изучения дисциплины «Вариационное исчисление» у обучающихся формируются следующие общепрофессиональные компетенции.

<b>Код и формулировка компетенции</b>	<b>Этапы формирования компетенции</b>	
<b>ОПК-6</b> использованием основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применением методов математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования	Знает	глубоко и прочно основные понятия, и теоремы курса
	Умеет	используя соответствующий математический аппарат решать типовые задачи, строить математические модели
	Владеет	навыками применения математических моделей для описания и исследования реальных объектов, способностью выбирать оптимальное решение, поставленной задачи
<b>ОПК 7</b> способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности,	Знает	глубоко и прочно основные понятия, и теоремы курса
	Умеет	анализировать поставленную задачу, находить методы ее решения, проводить анализ полученного решения

привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат	Владеет	методикой построения, анализа и применения математических моделей для решения прикладных задач
---	---------	--

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Вариационное исчисление» применяются следующие методы интерактивного обучения: лекция-консультация, лекция с заранее запланированными ошибками, лекция пресс-конференция; групповая дискуссия, методика «дерево решений», работа в малых группах, тренинг, обратная связь.

# I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

## Раздел 1. Классическая задача вариационного исчисления (6 час.)

### Тема 1. Постановка классической задачи вариационного исчисления (2 час.)

Формулировки задачи о брахистохроне и задачи о наименьшей площади поверхности вращения. Формулировка классической задачи вариационного исчисления. Определения понятий: линейного пространства, нормированного пространства, расстояния, функционала, допустимой функции, слабой локальной минимали, вариации кривой, первой и второй вариации функционала, экстремали функционала. Теорема Эйлера. Основная лемма классического вариационного исчисления (лемма Лагранжа). Теорема о необходимом условии минимума в терминах вариаций. Теорема Эйлера-Лагранжа (необходимое условие слабого минимума для вектор-функции). Уравнение Эйлера в интегральном виде. Необходимое условие минимума второго порядка.

### Тема 2. Интегралы уравнения Эйлера (2 час.)

Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Функция  $F$  не зависит от  $y'$ . Функция  $F$  линейно зависит от  $y'$ . Функция  $F$  зависит только от  $y'$ . Функция  $F$  зависит только от  $x$  и  $y'$ . Функция  $F$  зависит только от  $y$  и  $y'$ . Функция  $F$  зависит только от  $y$ . Функция  $F$  имеет вид:  $F(x, y, y') = p(x) \cdot (y')^2 + q(x) \cdot y^2 + 2y \cdot f(x)$ .

### Тема 3. Задачи со старшими производными, с функционалами, зависящими от вектор-функции и от функции многих переменных (2 час.)

Задача вариационного исчисления со старшими производными. Теорема Эйлера-Пуассона. Постановка задачи вариационного исчисления с функционалом, зависящим от вектор-функции, теорема о необходимом условии экстремума функционала. Постановка задачи вариационного исчисления с функционалом, зависящим от функции многих переменных, вывод уравнения Эйлера-Остроградского.

## Раздел 2. Вариационные задачи с подвижными границами и задачи на условный экстремум (8 час.)

### Тема 1. Вариационные задачи с подвижными концами и подвижными границами (2 час.)

Постановка вариационной задачи с подвижными концами, теорема о необходимом условии экстремума функционала. Постановка вариационной задачи с подвижными границами, теорема о необходимом условии экстремума функционала, геометрический смысл условий трансверсальности.

### Тема 2. Задача Больца (2 час.)

Постановка задачи Больца. Теорема (необходимые условия минимума в задаче Больца). Многомерный случай задачи Больца. Теорема (необходимые условия минимума вектор-функции в задаче Больца). Задача Больца со смешанными ограничениями. Формулировка задачи Больца со старшими производными. Теорема (необходимые условия минимали для задачи Больца со старшими производными).

### Тема 3. Изопериметрическая задача (2 час.)

Формулировка задачи Дидоны. Задачи о наибольшей площади и наибольшем объеме. Постановка вариационной задачи на условный экстремум: задача Лагранжа, изопериметрическая задача. Определения допустимой функции и слабого локального

минимума для изопериметрической задачи. Теорема (необходимые условия экстремума в изопериметрической задаче). Изопериметрическая задача с ограничениями типа неравенств. Теорема (необходимые условия локального минимума для изопериметрической задачи с ограничениями типа неравенств).

#### **Тема 4. Изопериметрическая задача с функционалом Больца (2 час.)**

Постановка изопериметрической задачи с функционалом Больца. Теорема (необходимые условия слабого локального минимума в изопериметрической задаче с функционалом Больца). Формулировка изопериметрической задачи с подвижными концами. Теорема (необходимые условия слабого локального минимума для изопериметрической задачи с подвижными концами).

### **Раздел 3. Прямые методы вариационного исчисления (4 час.)**

#### **Тема 1. Численные методы вариационного исчисления (2 час.)**

Основная идея прямых методов решения задачи вариационного исчисления. Понятие минимизирующей последовательности. Теорема (достаточное условие минимизирующей последовательности). Понятие полной последовательности. Метод Ритца. Дискретный вариант метода Ритца, метод конечных элементов.

#### **Тема 2. Достаточные условия экстремума (2 час.)**

Определение понятия сильного локального минимума. Условие Лежандра. Функция Вейерштрасса. Теорема (необходимые условия сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления). Уравнение Якоби. Понятие не особой кривой. Теорема Гильберта. Теорема Якоби. Определение поля семейства кривых. Центральное поле. Поле экстремалей. Условие Якоби возможности построения поля экстремалей. Достаточные условия минимума в классической задаче вариационного исчисления. Достаточные условия абсолютного минимума в классической задаче вариационного исчисления в терминах Гамильтона-Якоби.

## **II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

### **Практические занятия (36 час.)**

#### **Занятие 1. Основные понятия вариационного исчисления (2 часа)**

1. Задача на нахождение нормы функции в функциональном пространстве  $C[a, b]$ .
2. Задача на нахождение нормы функции в функциональном пространстве  $C_1[a, b]$ .
3. Задачи на нахождение расстояний между функциями в пространстве  $C[a, b]$ .
4. Задачи на нахождение расстояний между функциями в пространстве  $C_1[a, b]$ .
5. Задачи на вычисление значений функционалов от разных функций.

#### **Занятие 2. Основные понятия вариационного исчисления (2 часа)**

1. Задача: исследовать функционал на непрерывность.
2. Задача: исследовать функционал на линейность.
3. Задача на нахождение приращения функционала.
4. Задача на нахождение вариации функционала двумя способами.

#### **Занятие 3. Классическая задача вариационного исчисления (2 часа)**

1. Составление уравнения Эйлера.
2. Составление математической формулировки задачи вариационного исчисления.
3. Нахождение экстремалей в простейшей (классической) задаче вариационного исчисления.

#### **Занятие 4. Интегралы уравнения Эйлера (2 часа)**

Задачи на частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера:

1. Подынтегральная функция  $F$  не зависит от  $y'$ .
2. Функция  $F$  линейно зависит от  $y'$ .
3. Функция  $F$  зависит только от  $y'$ .

#### **Занятие 5. Интегралы уравнения Эйлера (2 часа)**

Задачи на частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера:

1. Функция  $F$  зависит только от  $x$  и  $y'$ .
2. Функция  $F$  зависит только от  $y$  и  $y'$ .
3. Функция  $F$  зависит только от  $y$ .
4. Функция  $F$  имеет вид:  $F(x, y, y') = p(x) \cdot (y')^2 + q(x) \cdot y^2 + 2y \cdot f(x)$

#### **Занятие 6. Вариационная задача со старшими производными (2 часа)**

1. Вывод уравнения Эйлера-Пуассона.
2. Составление уравнения Эйлера-Пуассона.
3. Решение вариационной задачи со старшими производными.

#### **Занятие 7. Вариационные задачи с функционалом, зависящим от вектор-функции (2 часа)**

1. Формулировка задачи вариационного исчисления, зависящей от нескольких функций одной переменной.
2. Составление системы дифференциальных уравнений Эйлера-Лагранжа.
3. Нахождение минималей в задаче с функционалом, зависящим от вектор-функции.

#### **Занятие 8. Вариационная задача с функционалом, зависящим от функции двух переменных (2 часа)**

1. Формулировка задачи вариационного исчисления, зависящей от функции двух переменных.
2. Вывод уравнения Эйлера-Остроградского.
3. Составление уравнения Эйлера-Остроградского.
4. Уравнение Эйлера-Остроградского в полярных координатах.

#### **Занятие 9. Контрольная работа (2 часа)**

Контрольная работа «Классические задачи вариационного исчисления, задачи со старшими производными и функционалами, зависящими от вектор-функции».

#### **Занятие 10. Вариационные задачи с подвижными концами (2 часа)**

1. Формулировка задачи вариационного исчисления с подвижными концами.
2. Определение естественных краевых условий.
3. Нахождение минималей в задаче с подвижными концами.

#### **Занятие 11. Вариационные задачи с подвижными границами (2 часа)**

1. Формулировка задачи вариационного исчисления с подвижными границами.
2. Вывод условий трансверсальности.
3. Нахождение минималей в задаче с подвижными границами.
4. Задачи на нахождение расстояния между кривыми.

#### **Занятие 12. Задача Больца (2 часа)**

1. Формулировка задачи Больца.

2. Вывод условий трансверсальности для задачи Больца.
3. Решение задачи Больца.
4. Задача Больца со смешанными ограничениями.

#### **Занятие 13. Задача Больца (2 часа)**

1. Постановка задачи Больца со старшими производными.
2. Решение задачи Больца со старшими производными.
3. Формулировка задачи Больца в многомерном случае.
4. Решение задачи Больца с функционалом, зависящим от вектор-функции.

#### **Занятие 14. Задача Лагранжа (2 часа)**

1. Постановка вариационной задачи на условный экстремум.
2. Вывод необходимого условия экстремали задачи Лагранжа.
3. Решение задачи Лагранжа.

#### **Занятие 15. Изопериметрическая задача (2 часа)**

1. Формулировка изопериметрической задачи.
2. Вывод необходимого условия экстремали изопериметрической задачи.
3. Решение изопериметрической задачи.
4. Решение изопериметрической задачи с ограничениями типа неравенств.
5. Решение изопериметрической задачи с функционалом Больца.
6. Решение изопериметрической задачи с подвижными концами.

#### **Занятие 16. Приближенные методы решения вариационных задач (2 часа)**

1. Метод Ритца.
2. Дискретный метод Ритца.
3. Метод конечных элементов.

#### **Занятие 17. Достаточные условия экстремума (2 часа)**

1. Формулировка достаточных условий экстремума вариационной задачи.
2. Задачи на проверку выполнения достаточного условия экстремума.

#### **Занятие 18. Приложения вариационных методов (2 часа)**

Доклады по приложениям вариационных методов.

1. Колебания струны.
2. Колебания мембраны.
3. Уравнения движения идеальной жидкости.
4. Аэродинамическая задача Ньютона.
5. Вопросы устойчивости конструкций.

### **III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Вариационное исчисление» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;



критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

#### IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

##### Формы текущего и промежуточного контроля по дисциплине «Вариационное исчисление»

№ п/п	Контролируемые модули/ разделы/ темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства - наименование	
				Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	Раздел 1	ОПК-6, ОПК-7	Знает	УО-2	УО-1-опрос, вопросы 1-11
			Умеет	ПР-7	Решение задачи
			Владеет	ПР-2	
2	Раздел 2	ОПК-6, ОПК-7	Знает	УО-2	УО-1-опрос, вопросы 12-19
			Умеет	ПР-7	Решение задачи
			Владеет	ПР-14	
3	Раздел 3	ОПК-2	Знает	УО-2	УО-1-опрос, вопросы 20-24
			Умеет	ПР-7	Решение задачи
			Владеет	ПР-14	

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

#### V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### Основная литература

1. Авербух Ю.В. Простейшие задачи вариационного исчисления [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Ю.В. Авербух, Т.И. Сережникова. — Электрон. текстовые данные. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2014. — 41 с. — 978-5-7996-1250-4. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/65975.html>

2. Вариационное исчисление: учебно-методический комплекс для вузов / И. Л. Елисеенко, Дальневосточный государственный технический университет. – Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2008. <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:385009&theme=FEFU> (60 экз)

3. Моклячук М.П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи [Электронный ресурс]: учебник / М.П. Моклячук. — Электрон. текстовые данные. — Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. — 428 с. — 5-93972-546-5. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/16495.html>

3. Паршев Л.П. Вариационное исчисление [Электронный ресурс]: методические указания к выполнению типового расчета / Л.П. Паршев, А.В. Калинин, А.В. Мастихин. — Электрон. текстовые данные. — М.: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2010. — 56 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/31379.html>

4. Рябикова Т.В. Вариационные методы в задачах статики и динамики строительных конструкций [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т.В. Рябикова, А.А. Семенов. — Электрон. текстовые данные. — СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2016. — 116 с. — 978-5-9227-0656-8. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/74323.html>

6. Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю.В. Тракимус. — Электрон. текстовые данные. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. — 72 с. — 978-5-7782-1671-6. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45416.html>

#### Дополнительная литература

1. Оптимальное управление в технических системах. Практикум [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.А. Балашова [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Воронеж: Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2017. — 288 с. — 978-5-00032-307-6. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/74014.html>

2. Розова В.Н. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Н. Розова, И.С. Максимова. — Электрон. текстовые данные. — М.: Российский университет дружбы народов, 2010. — 112 с. — 978-5-209-03872-6. — Режим доступа:

<http://www.iprbookshop.ru/11536.html>

3. Теория оптимального управления [Электронный ресурс]: учебное пособие / И.П. Болодурина [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2016. — 147 с. — 978-5-7410-1505-6. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/69954.html>

## VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

На изучении дисциплины «Вариационное исчисление» отводится 144 часа, 54 из которых приходится на аудиторное обучение, 90 часов на самостоятельную работу студентов, в том числе 27 часов на подготовку к экзамену. Рекомендуется посещать все лекционные и практические занятия, во время которых составлять подробный конспект теоретического и практического изучаемого материала.

Во время самостоятельной работы необходимо сначала прочитать конспекты лекций и практических занятий и потом приступить к выполнению домашнего задания. При подготовке к контрольной работе необходимо выучить основные определения и формулы из конспекта лекций и просмотреть решение примеров по теме контрольной работы.

При подготовке к экзамену необходимо руководствуясь списком вопросов выучить перечисленные темы, пользуясь конспектом лекций и основной литературой. Для более глубокого изучения дисциплины можно использовать дополнительную литературу.

По дисциплине изданы методические указания:

Вариационное исчисление: учебно-методический комплекс для вузов / И. Л. Елисеенко, Дальневосточный государственный технический университет. – Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2008. <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:385009&theme=FEFU> (60 экз.)

#### Требования к допуску на зачет/экзамен

Для допуска к зачету/экзамену студент должен:

- обязательно посещать занятия (для очной формы обучения);
- иметь конспект лекций;
- иметь материалы по практическим занятиям,
- иметь материалы выполнения лабораторных работ (при наличии в учебном плане);
- выполнить в полном объеме задания к практическим занятиям (например, решенные задач, реферат, доклад изученного материала, представленный в виде презентации и прочие задания, предусмотренные рабочей учебной программой дисциплины в рамках практических занятий);
- защитить контрольные работы и тесты (при наличии в учебном плане);

- защитить расчетно-графические работы (при наличии в учебном плане);
- защитить курсовую работу или курсовой проект (при наличии в учебном плане);

Студент обязан не только представить комплект выполненных заданий и прочих материалов, необходимых для допуска к зачету/экзамену по изучаемой дисциплине, но и уметь ответить на вопросы преподавателя, касающиеся решения конкретной задачи или выполненного студентом задания.

В случае невыполнения вышеизложенных требований студент *не допускается* к сдаче зачета или экзамена.

## VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для организации самостоятельной работы студентам доступно следующие специализированные кабинеты, соответствующие действующим санитарным и противопожарным нормам, а также требованиям техники безопасности при проведении учебных и научно-производственных работ:

Наименование оборудованных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень основного оборудования
Читальные залы Научной библиотеки ДВФУ с открытым доступом к фонду (корпус А - уровень 10)	Моноблок HP ProOne 400 All-in-One 19,5 (1600x900), Core i3-4150T, 4GB DDR3-1600 (1x4GB), 1TB HDD 7200 SATA, DVD+/-RW, GigEth, Wi-Fi, BT, usb kbd/mse, Win7Pro (64-bit)+Win8.1Pro(64-bit), 1-1-1 Wty Скорость доступа в Интернет 500 Мбит/сек.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ  
по дисциплине «Вариационное исчисление»**

Специальность 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений»

Специализация «Строительство гидротехнических сооружений повышенной ответственности»

Форма подготовки - очная

**Владивосток**

**2016**

### План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/ сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1-2 неделя семестра	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	3 час	Опрос (УО-2)
2	1-2 неделя семестра	Выполнение домашнего задания 1	2 час	Сдача заданий (ПР-12)
3	3-4 неделя семестра	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	3 час	Опрос (УО-2)
4	3-4 неделя семестра	Выполнение домашнего задания 2	3 час	Сдача заданий (ПР-12)
5	5-6 неделя семестра	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	3 час	Опрос (УО-2)
6	5-6 неделя семестра	Выполнение домашнего задания 3	2 час	Сдача заданий (ПР-12)
7	7-8 неделя семестра	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	3 час	Опрос (УО-2)
8	7-8 неделя семестра	Выполнение домашнего задания 4	2 час	Сдача заданий (ПР-12)
9	9-10 неделя семестра	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	3 час	Опрос (УО-2)
10	9 неделя семестра	Подготовка к контрольной работе по теме «Классическая задача вариационного исчисления, задачи со старшими производными, с вектор-функциями»	10 час	Контрольная работа (ПР-2)
11	11-12 неделя семестра	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	3 час	Опрос (УО-2)
12	11-12 неделя семестра	Выполнение домашнего задания 5	2 час	Сдача заданий (ПР-12)
13	13-14 неделя семестра	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	3 час	Опрос (УО-2)
14	13-14 неделя семестра	Выполнение домашнего задания 6	3 час	Сдача заданий (ПР-12)
15	15-16 неделя семестра	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	3 час	Опрос (УО-2)
16	16 неделя семестра	Выполнение расчетного задания методом конечных элементов 7	10 час	Сдача заданий (ПР-12)
17	17-18 неделя семестра	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю	3 час	Опрос (УО-2)
18	17-18 неделя семестра	Выполнение домашнего задания 8	2 час	Сдача заданий (ПР-14)
19	сессия	Подготовка к экзамену	27 час	экзамен

В процессе изучения курса «Вариационное исчисление» студенты обязаны выполнить домашнее задание по разделам: классическая задача вариационного исчисления, задача с подвижными границами и задача на условный экстремум, прямые методы вариационного исчисления и контрольную работу.

### Домашнее задание 1.

1. Найти норму функции в пространстве  $C[a, b]$  и  $C_1[a, b]$ :

$$y(x) = 5^{-2x^2+3x-1}, \quad y(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 3.$$

2. Найти расстояние между функциями в пространстве  $C[a, b]$  и  $C_1[a, b]$ :

$$y(x) = x^2 e^{-2x} \quad \text{и} \quad y(x) = x.$$

3. Найти значение функционала:

$$J(y) = \int_0^1 xy^2 dx \quad \text{при} \quad y(x) = e^{3x}, \quad y(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

4. Проверить является ли функционал линейным:

$$J(y) = \int_0^1 (x + y(x)) dx,$$

$$J(y) = \int_1^2 (xy + 7y'') dx,$$

$$J(y) = y^2(1) + \int_0^2 (2y + x) dx.$$

5. Найти вариацию функционала двумя способами:

$$J(y) = y^2(1) + \int_0^2 (2y + x) dx,$$

$$J(y) = \int_0^1 (xy^2 + y' \sin x) dx,$$

$$J(y) = \int_0^1 (e^x (y')^2 + y \cos y) dx.$$

Сравнить приращение и вариацию функционала:

$$J(y) = \int_0^1 (xy^2 + y' \sin x) dx,$$

$$J(y) = \int_0^1 (e^x (y')^2 + y \cos y) dx.$$

### Домашнее задание 2.

Найти все экстремали функционала  $J(y)$  классической задачи вариационного исчисления, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

$$1. J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + xy) dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$2. J(y) = \int_0^\pi (4y \cos x + (y')^2 - y^2) dx; \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$3. J(y) = \int_0^1 (e^{x+y} - y - \sin x) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = -1.$$

$$4. J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

$$5. J(y) = \int_0^1 (y - (y')^2) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = -\frac{1}{2}.$$

$$6. J(y) = \int_1^2 (e^x y^2 + y' y^2 x^3) dx, \quad y(1) = \frac{2}{3}, \quad y(2) = \frac{e^2}{6}.$$

### Домашнее задание 3.

1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  классической задачи вариационного исчисления, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

$$1. J(y) = \int_0^{\frac{3}{2}} ((y')^3 + 2x) dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = 1.$$

$$2. J(y) = \int_1^2 x^n \cdot (y')^2 dx; \quad n \in \mathbb{N}; \quad n \neq 1; \quad y(1) = \frac{1}{1-n}; \quad y(2) = \frac{2^{1-n}}{1-n}.$$

$$3. J(y) = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = e.$$

2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  со старшими производными, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

$$1. J(y) = \int_0^{\pi} ((y'')^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(\pi) = e^{-\pi};$$

$$y'(0) = 0; \quad y'(\pi) = -1 - e^{-\pi}.$$

$$2. J(y) = \int_0^1 ((y'')^2 - 24xy) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$y(1) = \frac{1}{5}; \quad y'(1) = 1.$$

$$3. J(y) = \int_0^1 ((y''')^2 - (y'')^2) dx; \quad y(0) = y''(0) = 0;$$

$$y'(0) = 1; \quad y(1) = y''(1) = sh 1; \quad y'(1) = ch 1.$$

### Домашнее задание 4.

1. Найти функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x) \in C^1([x_1, x_2])$ , на которых может достигаться экстремум функционала  $J(y_1, y_2)$  при указанных граничных условиях.

$$1. J(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1 \cdot y_2) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0; \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$2. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' \cdot y_2' + 6x \cdot y_1 + 12x^2 \cdot y_2) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0; \quad y_1(1) = y_2(1) = 1.$$

$$3. J(y_1, y_2) = \int_0^\pi ((y_1')^2 - (y_2')^2 + 2y_1' \cdot y_2' + 2y_1 \cos x + 2y_2^2) dx;$$

$$y_1(0) = -1; \quad y_2(0) = y_2(\pi) = 0; \quad y_1(\pi) = 1 + \pi.$$

2. Записать уравнение Остроградского для следующего функционала:

$$J(u) = \iint_D ((u'_x)^3 + (u'_y)^3 + u \cdot \sin x \cdot \cos y) dx dy$$

#### Домашнее задание 5.

1. Найти экстремали в задачах с подвижными концами:

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + 2y' + y) dx, \quad y(1) = 2$$

$$J(y) = \int_0^1 (36(y')^2 - 9y^2) dx, \quad y(1) = 5$$

2. Найти экстремали в задачах с подвижными границами:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} (8(y')^2 - 16y) dx, \quad y(x_1) = 0, \quad y(x_2) = 7x_2^2 - 1$$

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + 2(y')^2} dx, \quad y(x_1) = 2x_1 - 1, \quad y(x_2) = 4x_2^2 - 5$$

#### Домашнее задание 6.

Найти экстремали следующих функционалов в задачах Больца.

$$1. J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx + 4y^2(0) - 5y^2(1).$$

$$2. J(y) = \int_1^2 (x \cdot (y')^2 + y) dx; \quad y(1) = 0; \quad y(2) - \text{свободный конец.}$$

$$3. J(y) = \int_1^\pi ((y')^2 + y^2 - 4y \sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi).$$

$$4. J(y) = \int_0^2 ((y')^2 - y) dx + y^2(0); \quad y(2) = 4.$$

#### Домашнее задание 7 (расчетно-графическое задание).

Методом конечных элементов найти значения экстремали  $y(x)$  функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x^3 (y')^2 + Nxy^2 + Mx^m y) dx, \quad y(1) = A, \quad y(2) = B, \quad \text{где } N - \text{номер варианта,}$$

$$M = \frac{N}{5}; m = \frac{N}{2} \text{ для четных } N \text{ и } m = \frac{N+1}{2} \text{ для нечетных } N, \quad A = \frac{N}{N+1}; \quad B = \frac{N}{N+5}.$$

#### Домашнее задание 8.

1. Написать функцию Лагранжа для функционала



$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + y_2^2) dx, \quad \text{и уравнения связи } y_1' = y_2.$$

2. Написать функцию Лагранжа для функционала

$$J(y_1, y_2, y_3) = \int_0^1 (y_1 \sin x + y_2 y_3' + \cos y_2') dx,$$

$$\text{и уравнения связи } y_3 x = y_1' + \cos x, \quad x - y_1 = y_2'.$$

3. Найти допустимые экстремали в изопериметрических задачах.

$$1. J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1; \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

$$2. J(y) = \int_0^\pi y \cdot \sin x dx; \quad y(0) = 0; \quad y(\pi) = \pi; \quad \int_0^\pi (y')^2 dx = \frac{3}{2} \pi.$$

$$3. J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + y^2) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = e^{-1};$$

$$\int_0^1 e^{-x} \cdot y dx = \frac{1}{4} (1 - 3e^{-2}).$$

Домашние задания выполняются на отдельных листах и сдаются преподавателю с защитой. При защите домашних заданий студенты отвечают на вопросы преподавателя по теме данного задания и дополнительно решают аналогичный пример.

Домашняя работа считается зачтенной, если в ней все задачи решены правильно, студент(ка) ответил на все вопросы преподавателя и решил аналогичный пример.

При выполнении домашних заданий необходимо пользоваться конспектом материалов лекций и практических занятий. При подготовке к контрольным работам необходимо пользоваться конспектом материалов лекций и практических занятий. При подготовке к экзамену необходимо пользоваться конспектом лекций и рекомендованной литературы.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**по дисциплине «Вариационное исчисление»**

Специальность 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений»

Специализация «Строительство гидротехнических сооружений повышенной ответственности»

Форма подготовки - очная

**Владивосток**

**2016**

**Паспорт фонда оценочных средств  
по дисциплине «Вариационное исчисление»**

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
	ОПК-6 - использованием основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применением методов математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования	Знает
Умеет		используя соответствующий математический аппарат решать типовые задачи, строить математические модели
Владеет		навыками применения математических моделей для описания и исследования реальных объектов, способностью выбирать оптимальное решение, поставленной задачи
ОПК 7 - способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат	Знает	глубоко и прочно основные понятия и теоремы курса
	Умеет	анализировать поставленную задачу, находить методы ее решения, проводить анализ полученного решения
	Владеет	методикой построения, анализа и применения математических моделей для решения прикладных задач

**Формы текущего и промежуточного контроля по дисциплине  
«Вариационное исчисление»**

№ п/п	Контролируемые модули/ разделы/ темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства - наименование		
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация	
1	Раздел 1	ОПК-6, ОПК-7	Знает	УО-2	УО-1-опрос, вопросы 1-11
			Умеет	ПР-7	
			Владеет	ПР-2	
2	Раздел 2	ОПК-6, ОПК-7	Знает	УО-2	УО-1-опрос, вопросы 12-19
			Умеет	ПР-7	
			Владеет	ПР-12	
3	Раздел 3	ОПК-2	Знает	УО-2	УО-1-опрос, вопросы 20-24
			Умеет	ПР-7	
			Владеет	ПР-12	

### Перечень используемых оценочных средств (ОС)

№ п/п	Код ОС	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
1	УО-1	Собеседование	Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	Вопросы по темам/ разделам дисциплины
2	УО-2	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/ разделам дисциплины
4	ПР-2	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.	Комплект контрольных заданий по вариантам
5	ПР-7	Конспект	Продукт самостоятельной работы обучающегося, отражающий основные идеи заслушанной лекции, сообщения и т.д.	Темы/ разделы дисциплины
6	ПР-12	Расчетно-графическая работа	Средство проверки умений применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач или знаний по модулю или дисциплине в целом.	Комплект заданий для выполнения расчетно-графической работы.

### Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		критерии	показатели
ОПК-6 - использованием основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применением методов математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования	знает (пороговый уровень)	глубоко и прочно основные понятия и теоремы курса	Знание необходимых условий экстремума задач вариационного исчисления	Отвечает на теоретические вопросы 1 и 2 разделов курса
	умеет (продвинутый)	используя соответствующий математический аппарат решать типовые задачи, строить математические модели	Умение решать различные задачи вариационного исчисления	Решает задачу экзаменационного билета
	владеет (высокий)	навыками применения математических моделей для описания и исследования реальных объектов, способностью выбирать оптимальное решение, поставленной задачи	Владение навыками выбора разновидности задачи вариационного исчисления в поставленной прикладной задаче	Определяет разновидность задачи вариационного исчисления

ОПК 7 - способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат	знает (пороговый уровень)	глубоко и прочно основные понятия и теоремы курса	Знание необходимых и достаточных условий экстремума задач вариационного исчисления	Отвечает на теоретические вопросы 3 раздела курса
	умеет (продвинутый)	Анализировать прикладные задачи, строить и применять математические модели для их решения	Умение составить математическую модель задачи вариационного исчисления для сформулированной прикладной задачи	Составляет математические модели задач о Брахистохроне, о наименьшей площади поверхности, задачи Дидоны.
	владеет (высокий)	Навыками нахождения методов решения прикладных задач, проводить анализ полученного решения	Владение навыками анализа математической модели задачи и выбора ее решения	Формулирует дифференциальное уравнение для экстремали поставленной задачи и определяет уравнения для нахождения произвольных постоянных.

### Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

#### Оценочные средства для промежуточной аттестации

Оценочным средством промежуточной аттестации является экзамен, проводимый в виде УО-1, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний, обучающегося по всем разделам дисциплины.

К промежуточной аттестации допускаются студенты, выполнившие требования текущей аттестации:

1. написавшие контрольную работу по теме «Классическая задача вариационного исчисления, задача со старшими производными, задача с функционалом, зависящем от двух функций одной переменной»,
2. выполнившие расчетно-графическую работу по теме «Метод конечных элементов» и
3. предъявившие полный конспект лекций курса «Вариационное исчисление».

В экзаменационном билете два вопроса: 1. Теоретический вопрос из списка вопросов для коллоквиумов, собеседования; 2. Задача аналогичная задачам домашнего задания.

Критерии оценки к экзамену:

Оценка **«отлично»** выставляется за полный ответ на теоретический вопрос билета (с доказательством теорем), правильное решение задачи и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя из перечня вопросов для коллоквиумов, собеседования (без доказательств теорем).

Оценка **«хорошо»** выставляется за полный ответ на теоретический вопрос билета (с доказательством теорем), правильное решение задачи и правильные ответы на дополнительные

вопросы преподавателя из перечня вопросов для коллоквиумов, собеседования (без доказательств теорем). Однако допускается одна – две неточности в ответе.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется за правильное решение задачи, ответ на теоретический вопрос билета (без доказательства теоремы) и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя из перечня вопросов для коллоквиумов, собеседования (без доказательств теорем).

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется если студент только решил задачу и не ответил на теоретические вопросы или студент не решил задачу билета.

### **Вопросы для коллоквиумов, собеседования**

по дисциплине Вариационное исчисление

1. Функционалы в линейном нормированном пространстве. Определения: линейного пространства, нормированного пространства, расстояния, функционала, вариации функции, непрерывного функционала, линейного функционала, приращения функционала, вариации функционала (два определения), сильной и слабой окрестности, сильного и слабого минимума и максимума.

2. Классическая задача вариационного исчисления, задача о брахистохроне, о наименьшей площади поверхности вращения. Основная лемма вариационного исчисления.

3. Теорема Эйлера (необходимое условие экстремума функционала); необходимые условия минимума второго порядка.

4. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от  $y'$  или зависит от  $y'$  линейно.

5. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от  $x$  и  $y$  или не зависит от  $y$ .

6. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от  $x$ ; подынтегральная функция зависит только от  $y$ ; подынтегральная функция имеет вид:  $F(x, y, y') = p(x) \cdot (y')^2 + q(x) \cdot y^2 + 2f(x) \cdot y$ .

7. Классическая задача вариационного исчисления: решение задачи о минимальной площади поверхности вращения.

8. Классическая задача вариационного исчисления: решение задачи о брахистохроне.

9. Задача вариационного исчисления для случая подынтегральной функции, зависящей от производных высших порядков. Постановка задачи, определение допустимой функции, слабой локальной минимали, теорема Эйлера-Пуассона.

10. Функционалы от нескольких функций. Постановка задачи вариационного исчисления с функционалом, зависящим от вектор-функции, теорема о необходимом условии экстремума функционала.

11. Функционалы от функции многих переменных. Постановка задачи вариационного исчисления с функционалом, зависящим от функции многих переменных, вывод уравнения Эйлера-Остроградского.

12. Вариационная задача с подвижными концами. Постановка задачи, теорема о необходимом условии экстремума функционала.

13. Вариационная задача с подвижными границами. Постановка задачи, теорема о необходимом условии экстремума функционала, геометрический смысл условий трансверсальности.

14. Задача Больца. Необходимые условия минимума в задаче Больца.
15. Многомерный случай задачи Больца. Задача со смешанными ограничениями.
16. Задача Больца со старшими производными.
17. Вариационные задачи на условный экстремум. Постановка задачи: задача Лагранжа, изопериметрическая задача. Теорема о необходимом условии экстремума в задаче Лагранжа.
18. Теорема о необходимом условии экстремума в изопериметрической задаче. Задача Дидоны.
19. Изопериметрическая задача с ограничениями типа неравенств; с функционалом типа Больца; с подвижными концами.
20. Необходимые условия сильного минимума в классической задаче вариационного исчисления.
21. Сопряженные точки, условие Якоби, поле экстремалей.
22. Достаточные условия минимума в классической задаче вариационного исчисления.
23. Численные методы вариационного исчисления. Метод Ритца решения задачи вариационного исчисления.
24. Дискретный вариант метода Ритца. Метод конечных элементов.

#### **Образец экзаменационного билета**

1. Классическая задача вариационного исчисления, задача о брахистохроне, о наименьшей площади поверхности вращения. Основная лемма вариационного исчисления.
2. Найти экстремаль изопериметрической задачи:

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + 2xy) dx; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 6; \quad \int_0^1 xy dx = 3.$$

#### **Оценочные средства для текущей аттестации**

Оценочными средствами текущей аттестации дисциплины «Вариационное исчисление» являются: УО-2 – коллоквиум, ПР-2 - контрольная работа, ПР-7 – конспект, ПР-12 - расчетно-графическая работа.

УО-2 осуществляется во время учебного занятия в виде собеседования преподавателя с обучающимися; проводится на практических занятиях № 8, 15, 18 для контроля усвоения учебного материала по соответствующим разделам программы (Раздел 1 – вопросы № 1 – 11, Раздел 2 – вопросы № 12 – 19, Раздел 3 – вопросы № 20 – 24 из перечня вопросов для коллоквиумов, собеседования). Студенты, ответившие на вопросы, получают зачет по данному разделу. Студенты, не ответившие на вопросы, не получают зачет по данному разделу и должны будут во время консультации сдать коллоквиум.

ПР-7 – осуществляется на 17 неделе семестра в виде проверки конспекта лекций. **При отсутствии полного конспекта лекций студент не допускается к экзамену.**

ПР-12 – выдается студентам в качестве домашнего задания в течение всего семестра. На 16 неделе семестра выдается индивидуальная расчетно-графическая работа по теме «Метод конечных элементов». Работа считается зачтенной если все расчеты выполнены правильно. При выполнении расчетно-графической работы используются вычислительные программы. Выполнение и сдача расчетно-графической работы по теме «Метод конечных элементов» является обязательным для допуска к экзамену.

ПР-2 – осуществляется на 9 неделе семестра в виде контрольной работы на тему «Классическая задача вариационного исчисления, задача со старшими производными, задача с

функционалом, зависящем от двух функций одной переменной», как средство проверки умений применять полученные знания для решения задач по разделу 1.

Контрольная работа считается зачтенной, если решено правильно не менее трех задач из пяти задач. Зачтенная контрольная работа является обязательной для допуска к экзамену.

### Комплект заданий для контрольной работы

По дисциплине «Вариационное исчисление»

Тема Классическая задача вариационного исчисления, задача со старшими производными, задача с функционалом, зависящем от двух функций одной переменной.

#### Вариант 1

Задание 1.

Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + x^2 y) dx, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 5.$$

Задание 2.

Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\frac{3}{2}} ((y')^3 + 2y) dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = 1.$$

Задание 3.

Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^4 + 2y') dx, \quad y(0) = 7, \quad y(1) = 2.$$

Задание 4.

Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + 2yy'') dx, \quad y(0) = 2, y(1) = 3, y'(0) = 2, y'(1) = 4.$$

Задание 5.

Найти экстремали функционала

$$J(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 16y_1 y_2) dx,$$
$$y_1(0) = 3, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}, y_2(0) = 0, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6e^{\frac{\pi}{2}} + 2$$

#### Вариант 2

Задание 1.

Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^5 x^7 (y')^2 dx, \quad y(1) = 12, \quad y(5) = 35.$$

Задание 2.

Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 \frac{(y')^3}{x^2} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 10.$$



Задание 3.

Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^6 + 2\cos y') dx, \quad y(0) = 9, \quad y(1) = 4.$$

Задание 4.

Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^2 - 3yy'') dx, \quad y(0) = 4, y(1) = 5, y'(0) = 7, y'(1) = 9.$$

Задание 5.

Найти экстремали функционала

$$J(y_1, y_2) = \int_1^3 (x(y_1')^2 \cdot (y_2')^2 + xy_1y_2) dx,$$

$$y_1(1) = 1, y_1(3) = \ln 3 + 1, y_2(1) = 0, y_2(3) = 0.$$

Критерии оценки:

5 баллов выставляется студенту, если он решит все пять задач правильно;

4 балла выставляется студенту, если он решит правильно четыре задачи;

3 балла выставляется студенту, если он решит правильно три задачи;

0 баллов выставляется студенту, если он решит правильно меньше трех задач.

Контрольная работа считается зачтенной, если студент получит не менее трех баллов.

Составитель: И. Л. Елисеенко.

### Вопросы для коллоквиумов, собеседования

по дисциплине Вариационное исчисление

1. Функционалы в линейном нормированном пространстве. Определения: линейного пространства, нормированного пространства, расстояния, функционала, вариации функции, непрерывного функционала, линейного функционала, приращения функционала, вариации функционала (два определения), сильной и слабой окрестности, сильного и слабого минимума и максимума.

2. Классическая задача вариационного исчисления, задача о брахистохроне, о наименьшей площади поверхности вращения. Основная лемма вариационного исчисления.

3. Теорема Эйлера (необходимое условие экстремума функционала); необходимые условия минимума второго порядка.

4. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от  $y'$  или зависит от  $y'$  линейно.

5. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от  $x$  и  $y$  или не зависит от  $y$ .

6. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от  $x$ ; подынтегральная функция зависит только от  $y$ ; подынтегральная функция имеет вид:  $F(x, y, y') = p(x) \cdot (y')^2 + q(x) \cdot y^2 + 2f(x) \cdot y$ .

7. Классическая задача вариационного исчисления: решение задачи о минимальной площади поверхности вращения.

8. Классическая задача вариационного исчисления: решение задачи о брахистохроне.

9. Задача вариационного исчисления для случая подынтегральной функции, зависящей от производных высших порядков. Постановка задачи, определение допустимой функции, слабой локальной минимали, теорема Эйлера-Пуассона.

10. Функционалы от нескольких функций. Постановка задачи вариационного исчисления с функционалом, зависящим от вектор-функции, теорема о необходимом условии экстремума функционала.

11. Функционалы от функции многих переменных. Постановка задачи вариационного исчисления с функционалом, зависящим от функции многих переменных, вывод уравнения Эйлера-Остроградского.

12. Вариационная задача с подвижными концами. Постановка задачи, теорема о необходимом условии экстремума функционала.

13. Вариационная задача с подвижными границами. Постановка задачи, теорема о необходимом условии экстремума функционала, геометрический смысл условий трансверсальности.

14. Задача Больца. Необходимые условия минимума в задаче Больца.

15. Многомерный случай задачи Больца. Задача со смешанными ограничениями.

16. Задача Больца со старшими производными.

17. Вариационные задачи на условный экстремум. Постановка задачи: задача Лагранжа, изопериметрическая задача. Теорема о необходимом условии экстремума в задаче Лагранжа.

18. Теорема о необходимом условии экстремума в изопериметрической задаче. Задача Дидоны.

19. Изопериметрическая задача с ограничениями типа неравенств; с функционалом типа Больца; с подвижными концами.

20. Необходимые условия сильного минимума в классической задаче вариационного исчисления.

21. Сопряженные точки, условие Якоби, поле экстремалей.

22. Достаточные условия минимума в классической задаче вариационного исчисления.

23. Численные методы вариационного исчисления. Метод Ритца решения задачи вариационного исчисления.

24. Дискретный вариант метода Ритца. Метод конечных элементов.

#### **Критерии оценки:**

86-100 баллов выставляется студенту, если ответ показывает прочные знания в вариационном исчислении, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; ответ является логичным и последовательным.

76-85 баллов - если ответ показывает прочные знания в вариационном исчислении, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; ответ является логичным и последовательным. Однако допускается одна – две неточности в ответе.

61-75 баллов – оценивается ответ, свидетельствующий в основном о знании предметной области, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы; знанием основных вопросов теории; слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов,

недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры; недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа.

50-60 баллов – ответ, обнаруживающий незнание предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, неумением давать аргументированные ответы, отсутствием логичности и последовательности. Допускаются серьезные ошибки в содержании ответа; незнание современной проблематики изучаемой области.

**Комплект заданий для контрольной работы по  
дисциплине «Вариационное исчисление»**

**Вариант 1**

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 \left( (y')^2 + x^2 \cdot y' \right) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = a.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^{\pi} \left( (y''')^2 - (y'')^2 \right) dx; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$$
$$y(\pi) = \pi; \quad y'(\pi) = 2; \quad y''(\pi) = 0.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1' \cdot y_2' dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0;$$
$$y_2(1) = 1; \quad \int_0^1 y_1 dx = 1; \quad \int_0^1 y_2 dx = 0.$$

**Вариант 2**

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (y')^2 + y^2 - 2y \cdot \sin x \right) dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^{\pi} \left( (y''')^2 - (y'')^2 \right) dx; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$$
$$y(\pi) = y''(\pi) = sh \pi; \quad y'(\pi) = ch \pi + 1.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1 + y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0; \quad y_1(1) = 1;$$
$$y_2(1) = -3; \quad \int_0^1 y_1' \cdot y_2' dx = 0.$$

### Вариант 3

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_1^2 \left( (y')^2 + 2yy' + y^2 \right) dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 0.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 \left( (y'')^2 - 48xy \right) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0; \quad y(1) = \frac{1}{5};$$
$$y'(1) = 1.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1' \cdot y_2' dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0;$$
$$y_2(1) = 1; \quad \int_0^1 x \cdot y_1 dx = 0; \quad \int_0^1 x \cdot y_2 dx = 0.$$

### Вариант 4

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 y \cdot (y')^2 dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = \sqrt[3]{4}.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 (y'')^2 dx; \quad y(0) = y'(0) = y'(1) = 0; \quad y(1) = 1.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left( (y_1')^2 + (y_2')^2 \right) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0;$$
$$y_1(1) = y_2(1) = 0; \quad \int_0^1 y_1 \cdot y_2 dx = -2.$$

### Вариант 5

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 \left( (y')^2 - y^2 - y \right) \cdot e^{2x} dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = \frac{1}{e}.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 \left( (y''')^2 + (y'')^2 \right) dx; \quad y(0) = y''(0) = 0; \quad y'(0) = 1;$$

$$y(1) = y'(1) = 1; \quad y''(1) = 0.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 x \cdot (y_1 - y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0;$$

$$y_1(1) = 2; \quad \int_0^1 y_1' \cdot y_2' dx = -\frac{4}{5}.$$

### Вариант 6

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 (y')^3 \cdot y dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 2.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 e^{-x} \cdot (y'')^2 dx; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 3;$$

$$y(1) = 1 + 2e; \quad y'(1) = 1 + 2e.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^\pi \left( (y_1')^2 + (y_2')^2 - 4y_1^2 - y_2^2 \right) dx;$$

$$\int_0^\pi (y_1 + 2y_2) dx = 1; \quad \int_0^\pi y_1 \cdot x dx = 0.$$

### Вариант 7

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_{-1}^0 \left( (y')^2 - 2xy \right) dx; \quad y(-1) = 0; \quad y(0) = 2.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 \left( 360x^2 \cdot y - (y'')^2 \right) dx; \quad y(0) = y(1) = 0;$$

$$y'(0) = 1; \quad y'(1) = 5.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left( (y_1')^2 + (y_2')^2 + 4xy_1 \right) dx; \quad y_1(0) = 0; \quad y_2(1) = 1;$$

$$\int_0^1 y_1' \cdot y_2 dx = 0.$$

### Вариант 8

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_1^e (x \cdot (y')^2 + y \cdot y') dx; \quad y(1) = 0; \quad y(e) = 1.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_1^2 x \cdot (y'')^2 dx; \quad y(1) = 2; \quad y'(1) = 0;$$
$$y(2) = 3 - 2 \ln 2; \quad y'(2) = -\ln 2.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + y_1 - y_2) dx; \quad y_1(0) = 0;$$
$$y_2(0) = 0; \quad \int_0^1 y_1 \cdot y_2' dx = 1.$$

### Вариант 9

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 e^x \cdot \left( y^2 + \frac{1}{2} (y')^2 \right) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = e.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_{-1}^0 (240y - (y''')^2) dx; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$$
$$y(-1) = 1; \quad y'(-1) = 1,5; \quad y''(-1) = -12.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2' + xy_1 + y_2) dx; \quad y_1(0) = 0;$$
$$y_2(0) = 1; \quad \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2) dx = 2.$$

### Вариант 10

Задание 1. Найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 e^y \cdot (y')^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = \ln 4.$$

Задание 2. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям

$$J(y) = \int_0^1 (120xy - (y'')^2) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$y(1) = 1; \quad y'(1) = 6.$$

Задание 3. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 - (y_2')^2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0;$$

$$y_1(1) = y_2(1) = 0; \quad \int_0^1 y_1 \cdot y_2 dx = -2.$$

### Критерии оценки:

86-100 баллов выставляется студенту, если решение задач показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала, а также основного содержания лекционного курса; студент демонстрирует владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией вариационного исчисления, логически корректное решение задач.

76-85 баллов – если студент показывает знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса, умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе решения задач в рамках данной темы, в целом логически корректное, но не всегда правильное аргументированное решение задач.

61-75 баллов – если студент показывает фрагментарное, поверхностное знание важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии вариационного исчисления; частичные затруднения с выполнением заданий, демонстрирует стремление логически обоснованно и последовательно изложить решение задачи.

50-60 баллов – если студент показывает незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала, неумение использовать понятийный аппарат вариационного исчисления; отсутствие логики в решении задач.

### Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

#### Текущая аттестация студентов

Текущая аттестация студентов по дисциплине «Вариационное исчисление» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация студентов по дисциплине «Вариационное исчисление» проводится в форме контрольных мероприятий (защиты домашних заданий, контрольных работ и коллоквиумов) по оцениванию фактических результатов обучения студентов и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
- степень усвоения теоретических знаний;
- уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;
- результаты самостоятельной работы.

**I. Соотношение видов учебной деятельности студента, учитываемых в рейтинговой оценке по дисциплине**

№ п/п	Виды учебной деятельности студентов	Весовые коэффициенты, %
1	Активность студентов	5
2	Своевременное выполнение различных видов заданий	10
3	Посещаемость всех видов занятий	5
4	Контрольные работы	30
5	Коллоквиумы	20
6	Выполнение индивидуальных заданий	30
7	Сумма	100

**II. Объект оценивания – учебная дисциплина**

№ п/п	Содержание вида контролируемой учебной деятельности	Ед. измерения работы	Максимальное кол-во баллов за единицу выполняемой работы
1	Активность студентов на занятиях	1 занятие	1
2	Своевременность выполнения различных видов заданий	1 задание	2
3	Посещаемость всех видов занятий	1 занятие	1

**III. Объект оценивания – степень усвоения теоретических знаний**

№ п/п	Вид учебной деятельности	Оценочное средство	Максимальное кол-во баллов
1	Коллоквиум «Классическая задача вариационного исчисления»	УО-2	100
2	Коллоквиум «Вариационные задачи с подвижными границами и задачи на условный экстремум»	УО-2	100
3	Коллоквиум «Прямые методы вариационного исчисления»	УО-2	100

**IV. Объект оценивания – Уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы**

№ п/п	Вид учебной деятельности	Оценочное средство	Максимальное кол-во баллов
1	Контрольная работа «Задачи вариационного исчисления»	ПР-2	100

**V. Объект оценивания – результаты самостоятельной работы**

№ п/п	Вид самостоятельной работы	Оценочное средство	Максимальное кол-во баллов
1	Домашнее задание «Аналитические методы решения задач вариационного исчисления»	ПР-2	100
2	Домашнее задание «Прямые методы решения задач вариационного исчисления»	ПР-2	100

**Промежуточная аттестация студентов**

Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Вариационное исчисление» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Вариационное исчисление» проводится в виде экзамена в форме выполнения письменных заданий и устного опроса в форме собеседования.



**Критерии выставления оценки студенту на экзамене по  
дисциплине «Вариационное исчисление»**

Баллы (рейтинговой оценки)	Оценка экзамена (стандартная)	Требования к сформированным компетенциям
91-100	«отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач; способен анализировать и обобщать полученные знания (ОК-1), может применять математические модели для описания и исследования реальных объектов (ПК-5), способен выбирать оптимальное решение, поставленной задачи (ПК-5), а также владеет методикой построения, анализа и применения математических моделей для решения прикладных задач (ПК-6).
76-90	«хорошо»	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения; умеет строить математические модели (ПК-5), используя соответствующий математический аппарат решать типовые задачи (ПК-5), анализировать поставленную задачу, находить методы ее решения, проводить анализ полученного решения (ПК-6).
56-75	«удовл.»	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.
≤ 55	«неудовл.»	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, поэтому не может продолжить обучение без дополнительных занятий по данной дисциплине.