МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

«СОГЛАСОВАНО»	«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель ОП «Профилактика и тушение природных пожаров»	Заведующий кафедрой Безопасность в чрезвычайных ситуациях и защиты окружающей среды
____________ Олишевский А.Т. (подпись) (Ф.И.О. рук. ОП) «14» 06 2016 г.	____________ Петухов В.И. (подпись) (Ф.И.О. зав. каф.) «14» 06 2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Специальность — 20.05.01 Пожарная безопасность
Специализация «Профилактика и тушение природных пожаров»
Форма подготовки очная

курс 1 семестр 1, 2
лекции 36 час.
практические занятия 36 час.
лабораторные работы 0 час.
в том числе с использованием МАО лек. 36/пр. 36/лаб. 0 час.
всего часов аудиторной нагрузки 72 час.
в том числе с использованием МАО 72 час.
самостоятельная работа 108 час.
в том числе на подготовку к экзамену 54 час.
контрольные работы 0
курсовая работа/курсовой проект – не предусмотрен
зачет – не предусмотрен
экзамен 1, 2 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 17.08.2015 № 851

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры безопасности в чрезвычайных ситуациях и защиты окружающей среды, протокол от 14.06.2016 №10.

Составитель: д.ф.-м.н., доцент Ксендзенко Л.С.

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________

(подпись) (ФИО)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________

(подпись) (ФИО)

АННОТАЦИЯ

Дисциплина предназначена для специалистов специальности **20.05.01** «Пожарная безопасность» специализация «Профилактика и тушение природных пожаров». Дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» является дисциплиной базовой части Блока 1 Дисциплины (модули) (согласно учебному плану – Б1.Б.9). Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов. Учебным планом предусмотрены лекционные занятия (36 часов), практические занятия (36 часов), самостоятельная работа (108 часов. в том числе на подготовку к экзамену 54 часа). Дисциплина реализуется на 1 курсе в 1 и 2 семестрах. Форма контроля – экзамен.

Содержание дисциплины охватывает следующий круг вопросов: базовые понятия математической логики; методы алгебраических и тригонометрических преобразований; базовые понятия и основные технические приемы матричной алгебры, аналитической геометрии, теории линейных пространств; теоремы линейной алгебры и аналитической геометрии.

Освоение дисциплины ведется на основе ранее приобретенных знаний математике в основной общеобразовательной школе.

Целью преподавания дисциплины является формирование и развитие личности студентов, их способностей к алгоритмическому и логическому мышлению, а так же обучение основным математическим понятиям и методам линейной алгебры и аналитической геометрии. Изучение курса способствует расширению научного кругозора и повышению общей культуры будущего специалиста, развитию его мышления и становлению его мировоззрения.

Задачи дисциплины:

- формирование устойчивых навыков по применению фундаментальных положений аналитической геометрии и линейной алгебры при изучении дисциплин профессионального цикла и научном анализе ситуаций, с которыми выпускнику приходится сталкиваться в профессиональной и общекультурной деятельности;

- освоение методов матричного исчисления, векторной алгебры, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве при решении практических задач;

- обучение применению методов аналитической геометрии и линейной алгебры для построения математических моделей реальных процессов.

Для успешного изучения дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

1) социальная;

2) правовая;

3) базовая (знания, умения и навыки по изучаемым в соответствии с образовательным стандартом предметам; умение решать задачи и точно выполнять учебные задания; стремление к познанию, учёбе; внимательность; наблюдательность; креативность; решительность; контактность; самоконтроль; самостоятельность);

4) физиолого-психологическая;

5) мировоззренческая;

6) информационная (использование информационных технологий в профессиональной деятельности; поиск, систематизация и применение на практике информации, необходимой в профессиональной деятельности; компьютерная грамотность);

7) коммуникативная;

8) экономическая (адаптированность к жизни в условиях рыночной экономики; современное экономическое мышление; навыки экономического поведения; потребительская культура).

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие общекультурные компетенции (элементы компетенций).

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**	
ОК-1 способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу	Знает	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности

	Умеет	решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления
	Владеет	методами анализа и синтеза.

Для формирования вышеуказанной компетенции в рамках дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» применяются следующие методы интерактивного обучения: презентация, проблемная лекция, семинар, реферат, доклад-обсуждение.

I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Структура курса **содержит два модуля: модуль 1 –** Линейная алгебра;

модуль 2 – Аналитическая геометрия.

Наименование разделов дисциплины

Раздел 1. Матрицы и определители (4 часа)

Матрицы и действия над ними. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Транспонирование матриц. Определители и их свойства. Обратная матрица.

Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений (6 часов)

Определение системы линейных алгебраических уравнений. Системы с квадратной невырожденной матрицей. Формулы Крамера. Ранг матрицы. Методы вычисления ранга матрицы. Системы общего вида. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса исследования и решения систем. Однородные системы и их нетривиальное решение.

Раздел 3. Векторная алгебра(10 часов)

Основные понятия векторной алгебры. Линейные операции над векторами в геометрической форме. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Понятие базиса векторного пространства, размерность векторного пространства. Декартовый базис, координаты вектора. Проекция вектора, орт вектора, направляющие косинусы вектора. Простейшие задачи векторной алгебры. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Определение, свойства, запись в координатной форме, приложения. Условие коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов. Преобразование прямоугольной системы координат на плоскости.

Раздел 4. Аналитическая геометрия на плоскости (8 часов)

Прямая на плоскости. Различные типы уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Кривые второго порядка. Канонические уравнения и свойства эллипса, гиперболы, параболы. Параметрические уравнения этих кривых. Полярные координаты. Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка. Инварианты кривых второго порядка.

Раздел 5. Комплексные числа, действия над ними. (2 часа).

Раздел 6. Аналитическая геометрия в пространстве(6 часов)

Плоскость. Прямая и плоскость в пространстве. Различные типы уравнений плоскости и прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Расстояние от точки до прямой (плоскости) в пространстве. Формулы для вычисления углов между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью. Поверхности второго порядка. Канонические уравнения и свойства поверхностей второго порядка.

Лекции (36 час.)

Семестр I

Лекция 1. Определители 2-го и высших порядков. Методы вычисления. Миноры и алгебраические дополнения. Свойства определителей (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 2. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера. Однородные системы уравнений (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция с заранее запланированными ошибками».**

Лекция 3. Матрицы, действия над ними, обратная матрица (2 часа). Ранг матрицы. Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».**

Лекция 4. Системы общего вида. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса исследования и решения систем (2 часа).

Лекция 5. Векторы, действия над ними (2 часа).

Лекция 5. Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Проекция вектора на ось (2 часа).

Лекция 7. Собственные значения и собственные векторы матриц. Характеристическое уравнение (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».**

Лекция 8. Скалярное произведение векторов (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».**

Лекция 9. Векторное и смешанное произведения векторов (2 часа).

Семестр II.

Лекция 1. Прямая на плоскости (2 часа).

Лекция 2. Взаимное расположение прямых. Расстояние от точки до прямой.

Лекция 3. Кривые 2 порядка (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-визуализация».** ***Лекция-визуализация*** предполагает визуальную форму подачи лекционного материала средствами ТСО, аудио-видеотехники, натуральных объектов, моделей, символической наглядности, мультимедиа и сводится к **развернутому или краткому комментированию** лектором этих **материалов.**

Лекция 4. Полярная система координат. Параметрическое задание линии (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного**

обучения «лекция-визуализация».

Лекция 5. Комплексные числа, действия над ними (2 часа).

Лекция 6. Плоскость в пространстве, различные виды уравнений плоскости (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 7. Прямая и плоскость в пространстве (2 часа).

Лекция 8. Поверхности 2 порядка (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-визуализация».**

Лекция 9. Заключительная лекция. Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».**

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

№ п/п	№ темы дисциплины	Темы практических занятий	Кол-во часов
I семестр			
1	1	Матрицы и определители	4
2	2	Системы линейных и алгебраических уравнений	6
3	3	Векторная алгебра	8
	СУММА:		18
II семестр			
6	4	Аналитическая геометрия на плоскости. Комплексные числа.	8
7	5	Аналитическая геометрия в пространстве	6
8	6	Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Исследование систем линейных уравнений. Собственные значения и собственные векторы матриц.	4
	СУММА:		18
	ИТОГО:		36

Практические занятия (36 час.)

Семестр I.

Занятие 1. Определители 2, 3, 4 порядков. Миноры и алгебраические дополнения. Свойства. (2 часа).

Занятие 2. **Решение квадратной системы линейных уравнений методом Крамера. Решение однородных систем (2 часа).** Занятие проводится с применением метода активного обучения **«метод командной поддержки индивидуального обучения».** Суть этого метода заключается в предоставлении малым группам возможности продвигаться по учебной программе в индивидуальном темпе.

Занятие 3. Матрицы, действия над ними. Обратная матрица. Решение системы линейных уравнений матричным способом. (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 4. Ранг матрицы. Системы общего вида. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса решения систем. **(2 часа).** Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».** Групповые консультации представляют собой своеобразную форму проведения практических занятий, основным содержанием которых является разъяснение отдельных, часто наиболее сложных или практически значимых вопросов изучаемой программы. После всех практических занятий студенты получают задачи для самостоятельной внеаудиторной работы. С каждым практическим занятием повышается сложность предлагаемых задач. Групповая консультация проводятся с целью оказания помощи в самостоятельной работе, в подготовке к рубежной контрольной работе. Студенты сами предлагает для решения те задачи, которые вызвали какие-то затруднения или непонимание. К доске выходят студенты, готовые разъяснить возникшие вопросы. Преподаватель только контролирует ход решения задач, комментирует в случае необходимости какие-то ситуации и обобщает рассмотренный материал. Преимущество практики-консультации перед другими формами проведения практического занятия в том, что она позволяет в большей степени приблизить содержание занятия к практическим интересам обучаемых, в какой-то степени индивидуализировать процесс обучения с учетом уровня понимания и восприятия материала каждым обучаемым.

Занятие 5. Векторы, действия над ними. Модуль вектора, направляющие косинусы (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 6. ДПСК. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов (2 часа). Занятие проводится с применением метода активного обучения **«метод командной поддержки индивидуального обучения».**

Занятие 7. Векторное и смешанное произведения векторов (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 8. Контрольная работа по векторной алгебре (2 часа).

Занятие 9. Собственные значения и собственные векторы матриц (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Семестр II.

Занятие 1. Прямая на плоскости (2 часа). Занятие проводится с применением метода активного обучения **«метод командной поддержки индивидуального обучения».**

Занятие 2. Кривые 2 порядка (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 3. Полярные координаты. Параметрическое задание кривой (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 4. Комплексные числа. Действия над ними (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 5. Плоскость в пространстве (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 6. Прямая и плоскость (2 часа). Занятие проводится с применением метода активного обучения **«метод командной поддержки индивидуального обучения».**

Занятие 7. Поверхности 2 порядка (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 8. Контрольная работа по теме «Прямая на плоскости, кривые 2 порядка, плоскость и прямая в пространстве» (2 часа).

Занятие 9. Билинейные и квадратичные формы (2 часа).

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» представлено в Приложении 1. Оно содержит: план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию; характеристику заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению; требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенции		Оценочные средства	
				Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	Матрицы и определители	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях. ИДЗ. Опрос на коллоквиуме. Вопросы текущего контроля 1-6, к коллоквиуму 1-5	Вопросы к экзамену 1-3 .
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Устный опрос во время практического занятия. ИДЗ «Матрицы и определители».	Задачи 1-7,57,58 из примерного перечня задач для экзамена .

			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиум	Экзамен
2	Системы линейных алгебраических уравнений	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях. ИДЗ	Вопросы к коллоквиуму 3-5 (стр.31) Вопросы 2-3 из перечня вопросов для подготовки к экзамену.
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	ИДЗ «Исследование и решение СЛАУ». Опрос на коллоквиуме.	Задачи 8,9,59,60 из примерного перечня задач для зачета .
			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиуме	Экзамен
3	Векторная алгебра	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии, вопросы 14-22 тек. контроля и 6-20 к коллоквиуму. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях.	Вопросы 4-6 из перечня вопросов для подготовки к экзамену (стр.39).
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	ИДЗ, контрольная работа, опрос на коллоквиуме	Задачи 10-20 из примерного перечня задач для экзамена.
			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиуме	Экзамен
4	Аналитическая геометрия на плоскости	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Вопросы 23-24 тек. контроля. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях. Вопросы к колл.21-25	Вопросы 7-11 из перечня вопросов для подготовки к экзамену.
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	ИДЗ, контрольная работа, опрос на коллоквиуме	Задачи 26-41 из примерного перечня задач для экзамена.
			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиуме	Экзамен
5	Аналитическая геометрия в пространстве	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Вопросы тек. контроля 35-48; К колл.26-31. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях.	Вопросы 9,12 из перечня вопросов для подготовки к экзамену.
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	ИДЗ, контрольная работа, опрос на коллоквиуме	Задачи 42-56 из примерного перечня задач для экзамена.
			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиуме	Экзамен

Типовые контрольные задания, ИДЗ, вопросы к коллоквиуму, экзаменационные вопросы, образцы билетов представлены в разделах «Контрольно-измерительные материалы» и «Материалы для самостоятельной работы студентов».

V. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Магазинников Л.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова. — Электрон. текстовые данные. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Эль Контент, 2012. — 180 c. — 978-5-4332-0074-6. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13861.html

2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : методические указания, решение типовых задач и варианты заданий для студентов 1-го курса МГСУ, обучающихся по направлениям подготовки 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 230100 «Информатика и вычислительная техника» / . — Электрон. текстовые данные. — М. : Московский государственный строительный университет, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2014. — 83 c. — 978-5-7264-0887-3. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/25511.html

3. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.П. Чеголин. — Электрон. текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2015. — 149 c. — 978-5-9275-1728-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/68568.html

Дополнительная литература:

1. Чеголин А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.П. Чеголин. — Электрон.

текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2015. — 149 с. — 978-5-9275-1728-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/68568.html

2. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч 3.: учебное пособие. –Минск «Вышейшая школа», 2013. – 368 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65410

3. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч 4.: учебное пособие. –Минск «Вышейшая школа», 2013. – 334 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65411

Internet-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система «КнигаФонд» [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – М., 2008–2012. – Режим доступа : http://www.knigafund.ru/.
2. 16. Интернет-тестирование в сфере образования [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – М., 2009–2012. – Режим доступа : http://www.i-exam.ru/.
3. 17. Библиотека Genesis [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – Режим дос-тупа : http://gen.lib.rus.ec/.
4. 18. Научная электронная библиотека [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – Режим доступа : http://www.elibrary.ru/.
5. 19. Математическое Бюро: Решение задач по высшей математике www.matburo.ru
6. 20. Российское образование. Федеральный портал. www.edu.ru

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

На изучение дисциплины отводится 72 часов аудиторных занятий и 144 часов на самостоятельную работу. На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства, формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Преподаватель поддерживает непрерывный контакт с аудиторией, отвечает на возникающие у студентов вопросы.

На практических занятиях преподаватель сначала кратко опрашивает студентов по теории, затем подробно решает примеры по пройденной теме, взаимодействуя с учениками.

Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения, затем выдает индивидуальное домашнее задание.

После получения задания, студенту рекомендуется в этот же день приступить к его выполнению, как говорится, «по горячей памяти». Наиболее способным студентам предлагается выполнять задание сразу, в конце занятия. Они с удовольствием это делают.

В случае затруднения при выполнении домашнего задания студенту рекомендуется повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами, или прийти на еженедельную плановую консультацию и выполнить задание с помощью преподавателя.

После выполнения задания студент отдает его на проверку. Работа проверяется в течение 2-3 дней и в случае необходимости с соответствующими указаниями возвращается на доработку.

Работа зачитывается только в том случае, когда все задачи решены правильно.

В начале семестра для проведения текущей самостоятельной работы, подготовки к коллоквиуму, экзаменам старостам групп отправляются по электронной почте учебно-методическая литература и перечень вопросов и задач к коллоквиуму и экзаменам. Затем старосты отправляют все эти файлы всем членам группы.

К экзамену студент допускается только в случае выполнения всех индивидуальных домашних заданий, контрольной работы и ответа на коллоквиуме, как минимум на удовлетворительную оценку.

Подготовку к экзамену удобно осуществлять по темам, которые преподаватель выделяет во время чтения лекций. Например, по первому семестру тема 1 «Матрицы и определители».

В идеале, студент выписывает все определения в отдельную тетрадь (планшет) и заучивает их наизусть. Затем вносит в планшет формулировки теорем, формулы и заучивает их (хорошо работать в паре с товарищем). При наличии доказательства проводит доказательство, видимо с ошибками. Затем смотрит в конспект и исправляет ошибки.

Далее переходит к теме 2 «Системы линейных алгебраических уравнений» и т.д. Проштудировав, таким образом, все темы, затем сводит весь материал в единое целое, устанавливая связи между его частями. Например, понятие определителя вводится на первой лекции в теме 1, затем используется на всех лекциях при изучении тем 2,3,4,5.

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина обеспечена учебно-методической литературой из библиотечного фонда университета, методическими указаниями, раздаточными материалами, бланками билетов на экзамен. Освоение дисциплины производится на базе учебных аудиторий Инженерной школы ДВФУ учебного корпуса Е по адресу: п. Аякс, кампус ДВФУ, корпус Е. Аудитории оснащены современным оборудованием (компьютер, видеопроектор, интерактивная доска).

Приложение I

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»
Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность
Специализация «Профилактика и тушение природных пожаров»
Форма подготовки очная

Владивосток

2014

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выпол-нения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
Семестр I				
1	01.09-15.09	Выполнение ИДЗ по теме «Определители. Системы линейных уравнений»	4	Прием и защита задания
2	29.09-20.10	Выполнение ИДЗ по теме «Матрицы, действия над ними, ранг матрицы, решение систем методом Гаусса»	4	Прием и защита задания
3	27.10-24.11	Выполнение ИДЗ по теме «Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов»»	4	Прием и защита задания
4	24.11-08.12	Подготовка к контрольной работе по теме «Векторная алгебра», изучение базовой литературы.	8	Опрос на коллоквиуме
5	08.12	Контрольная работа по векторной алгебре	2	Проверка контрольной работы
6	08.09-20.12	Подготовка к коллоквиуму по теме «Определители, матрицы, решение систем, векторная алгебра», изучение базовой литературы.	10	Опрос на коллоквиуме
7	22.12-29.12	Выполнение ИДЗ по теме «Собственные числа и собственные векторы матрицы	4	Прием и защита задания
8	Январь нового года	Подготовка к экзамену, изучение конспектов и базовой литературы.	36	Экзамен
Семестр II				
1	10.02-24.02	Выполнение ИДЗ по теме «Прямая на плоскости»	4	Прием и защита задания
2	24.02-10.03	Выполнение РГЗ по теме «Кривые 2 порядка»	4	Прием и защита задания
3	24.03-07.04	Выполнение ИДЗ по теме «Комплексные числа»	4	Прием и защита задания
4	07.04-21.04	Выполнение ИДЗ по теме «Прямая и плоскость в пространстве»	4	Прием и защита задания
5	05.05-19.05	Выполнение РГЗ по теме «Поверхности 2 порядка»	4	Прием и защита задания
6	05.05-19.05	Подготовка к контрольной работе по теме «Прямая на плоскости, кривые 2 порядка, плоскость и прямая в пространстве», изучение базовой литературы.	8	Опрос на коллоквиуме
7	19.05	Контрольная работа по теме: «Прямая на плоскости, кривые 2-го порядка, плоскость и прямая в пространстве».	2	Проверка контрольной работы
8	10.02-26.05	Подготовка к коллоквиуму по теме «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», изучение базовой литературы.	15	Опрос на коллоквиуме
9	Июнь	Подготовка к экзамену, изучение конспектов и базовой литературы	27	Экзамен

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены в разделе «Материалы для самостоятельной работы студентов»).

Порядок сдачи РГР, ИДЗ и их оценка

РГР и ИДЗ выполняются студентами в соответствии с планом-графиком выполнения самостоятельной работы по дисциплине и сдается преподавателю, ведущему дисциплину.

По результатам проверки студенту выставляется определенное количество баллов, указанное в рейтинг-плане дисциплины, которое входит в общее количество баллов студента, набранных им в течение семестра. При оценке РГР и ИДЗ учитываются полнота содержания выполненной работы, правильность выполнения заданий, умение теоретически обосновать выбор формулы и правильно применить формулу, грамотность оформления. Студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя. Оценка уменьшается на 10% при отсутствии теоретического обоснования решения, на 20%, если допущены ошибки не более чем в 30% заданий. Работа не зачтена, если решено менее 50% заданий.

С целью более тщательного изучения теоретического материала и выработки элементов компетенций ПК-22 один раз в семестр проводится коллоквиум во внеурочное время. Список вопросов к коллоквиуму приводится в Приложении 2.

По данной дисциплине автором (совместно с Бойко Л.А.) разработано учебное пособие: Бойко Л.А., Ксендзенко Л.С.«Равновесные системы в механике». Владивосток : ДВГТУ, 2008.

Приложение II

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ГУМАНИТАРНЫХ НАУК

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»
Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность
Специализация «Профилактика и тушение природных пожаров»
Форма подготовки очная

Владивосток
2014

Паспорт
фонда оценочных средств
по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОК-1 способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу	Знает	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности
	Умеет	решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления
	Владеет	методами анализа и синтеза.

Перечень используемых оценочных средств (ОС)

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенции		Оценочные средства	
				Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	Матрицы и определители	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях. ИДЗ. Опрос на коллоквиуме. Вопросы текущего контроля 1-6, к коллоквиуму 1-5	Вопросы к экзамену 1-3 .
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Устный опрос во время практического занятия. ИДЗ «Матрицы и определители».	Задачи 1-7,57,58 из примерного перечня задач для экзамена .
			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиум	Экзамен
2	Системы линейных алгебраических уравнений	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях. ИДЗ	Вопросы к коллоквиуму 3-5 (стр.31) Вопросы 2-3 из перечня вопросов для подготовки к экзамену.
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	ИДЗ «Исследование и решение СЛАУ». Опрос на коллоквиуме.	Задачи 8,9,59,60 из примерного перечня задач для зачета .
			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиуме	Экзамен
3	Векторная алгебра	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии, вопросы 14-22 тек. контроля и 6-20 к коллоквиуму.	Вопросы 4-6 из перечня вопросов для подготовки к экзамену (стр.39).

				Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях.	
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	ИДЗ, контрольная работа, опрос на коллоквиуме	Задачи 10-20 из примерного перечня задач для экзамена.
			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиуме	Экзамен
4	Аналитическая геометрия на плоскости	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Вопросы 23-24 тек. контроля. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях. Вопросы к колл.21-25	Вопросы 7-11 из перечня вопросов для подготовки к экзамену.
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	ИДЗ, контрольная работа, опрос на коллоквиуме	Задачи 26-41 из примерного перечня задач для экзамена.
			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиуме	Экзамен
5	Аналитическая геометрия в пространстве	ОК-1	знает основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Вопросы тек. контроля 35-48; К колл.26-31. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях.	Вопросы 9,12 из перечня вопросов для подготовки к экзамену.
			Умеет решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	ИДЗ, контрольная работа, опрос на коллоквиуме	Задачи 42-56 из примерного перечня задач для экзамена.
			Владеет методами анализа и синтеза.	Опрос на коллоквиуме	Экзамен

Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**		**Критерии**	**Показатели**	**Баллы**
ОК-1 способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу	знает (пороговый уровень)	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Знание основных понятий, определений и утверждений изученных разделов. Знание основных методов решения практических задач линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии,	Знание основного программного материала (определений, понятий, утверждений), способность достаточно полно и логически четко его изложить, знание основных методов решения практических задач.	62-74

	умеет (продвинутый)	решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Умеет проводить операции над матрицами и над векторами, решать системы линейных уравнений, составлять уравнения прямых, плоскостей, находить точки пересечения, углы, расстояния между ними, определять типы кривых и поверхностей, строить их,	- способность правильно и обоснованно применять знания основного программного материал при решении типовых практических профессиональныхзадач, определяя необходимые приемы их выполнения.	74-84
	владеет (высокий)	методами анализа и синтеза.	Владение навыками решения профессиональных задач Владение навыками самостоятельного выбора метода решения задач линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии,	- способность грамотно обосновать выбор способа решения задачи, - способность аргументировать его выбор; владение программным материалом, владение навыками доказательства основных утверждений, владение разнообразными приемами выполнения практических задач, в том числе повышенной сложности, владение навыками применения математического аппарат для решения простых профессиональных задач	85-100

Шкала измерения уровня сформированности компетенций

Итоговый балл	1-61	62-74	75-84	85-100
Оценка (пятибалльная шкала)	2 (незачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)

Уровень сформированности компетенций	отсутствует	пороговый (базовый)	продвинутый	высокий (креативный)

<u>Оценочные средства для текущей аттестации</u>

Вопросы для текущего контроля по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

1. Что такое определитель? При каких преобразованиях величина определителя не меняется?

2. В каких случаях определитель равен нулю? Что следует из равенства определителя нулю?

3. Дайте определение минора и алгебраического дополнения элемента определителя. Сформулируйте правило вычисления определителя.

4. Как осуществляются линейные операции над матрицами?

5. Как перемножаются две матрицы? Свойства произведения матриц.

6. Какова схема нахождения обратной матрицы?

7. Дайте определения решения системы линейных алгебраических уравнений. Расшифруйте понятия «совместная», «несовместная», «определённая», «неопределённая» системы.

8. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?

9. Что называется рангом матрицы? Как он находится?

10. Сформулируйте теорему Кронекера – Капелли.

11. При каких условиях система линейных алгебраических уравнений имеет множество решений? Когда она имеет единственное решение?

12. Опишите метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

13. Какие неизвестные называются свободными, а какие базисными?

14. Как выполняются линейные операции над векторами? Каковы свойства этих операций?

15. Какие векторы называются линейно зависимыми, а какие линейно неза-ви-симыми?

16. Что такое базис? Какие векторы образуют базис на плоскости и в пространстве?

17. Какой базис называют декартовым?

18. Что такое координаты вектора?

19. Что называется скалярным произведением векторов? Каковы его свойства? Что можно вычислить с помощью скалярного произведения?

20. Что называется векторным произведением векторов? Каковы его свойства? Как оно используется при решении задач?

21. Что называется смешанным произведением векторов? Каковы его свойства? Для решения каких задач и как оно может быть использовано?

22. Запишите в векторной и координатной формах условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов.

23. Прямая линия на плоскости, её общее уравнение

24. Дайте определения нормального и направляющего векторов прямой на плоскости, углового коэффициента.

25. Запишите различные виды прямой на плоскости и укажите геометрический смысл параметров уравнения.

26. Запишите условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости в случае различных видов уравнений прямых.

27. Как найти точку пересечения прямых на плоскости?

28. Как вычисляется расстояние от точки до прямой на плоскости?

29. Дайте определение эллипса и запишите его каноническое уравнение.

30. Дайте определение гиперболы и запишите её каноническое уравнение

31. Дайте определение параболы и запишите её каноническое уравнение

32. Изложите схему приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

33. Дайте понятие полярной системы координат.

34. Опишите параметрический способ построения линий на плоскости

35. Плоскость, её общее уравнение

36. Как определяется взаимное расположение плоскостей? Запишите условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

37. Как вычисляется расстояние от точки до плоскости?

38. Запишите различные виды уравнений прямой в пространстве и поясните смысл параметров, входящих в уравнения.

39. Изложите схему приведения общих уравнений прямой к канониче-скому виду.

40. Как определить взаимное расположение прямых в пространстве?

41. Как вычисляется расстояние от точки до прямой в пространстве?

42. Как определить взаимное расположение прямой и плоскости?

43. Как ищется точка пересечения прямой и плоскости?

44. Назовите поверхности второго порядка и напишите их канонические уравнения.

45. Определение линейного пространства. Базис пространства.

46. Дайте определение линейного отображения и их матрицы.

47. Что такое собственные числа и собственные векторы линейных отображений и матриц.

48. Дайте определение поверхности второго порядка. Запишите канонические уравнения поверхностей второго порядка, сделайте схематический рисунок.

На основе данных вопросов составлены тестовые задания, позволяющие контролировать качество усвоения студентами теоретического материала курса.

Занятия, на которых предлагаются тестовые задания, указаны в рейтинг-плане дисциплины.

Вопросы к коллоквиуму по линейной алгебре и аналитической геометрии

I семестр

1. Матрицы и определители. Вычисление определителей 2 и 3 порядков.

2. Миноры и алгебраические дополнения. Свойства определителей. Перечислить.

3. Решение систем линейных уравнений методами: Крамера и Гаусса.

4. Решение однородных систем. Пример.

5. Матрицы, действия над ними. Обратная матрица. Ранг матрицы. Собственные значения и собственные векторы матриц. Характеристическое уравнение. Решение систем матричным способом.

6. Векторы, действия над ними. Т.1, Т2-доказать.

7. Базисы на плоскости и в пространстве. Ортонормированный базис. Координаты вектора.

8. Проекция вектора на ось. Свойства. Связь между координатами вектора и его проекциями

9.Модуль вектора и его направляющие векторы.

10. Радиус вектор точки. Координаты точки. Выражение координат вектора через координаты его концов.

11. Скалярное произведение векторов. Частные случаи. Свойства.

12. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей.

13. Применение скалярного произведения.

14. Векторное произведение векторов. Частные случаи. Свойства.

15. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей.

16. Применение векторного произведения.

17. Смешанное произведение трех векторов.

18. Геометрический смысл.

19. Выражение смешанного произведения через координаты

сомножителей.

20. Свойства смешанного произведения, применение.

II семестр

21. Различные виды уравнений прямой на плоскости, вывести одно. Взаимное расположение прямых. Условие параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой.

22. Кривые 2 порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола), канонические уравнения, вывести одно.

23. Директрисы, фокусы, эксцентриситет. Связь между параметрами, построение.

24. Полярные координаты. Уравнения кривых в полярных координатах. Параметрическое задание кривых. Примеры.

25. Комплексные числа, действия над ними.

26. Плоскость в пространстве, различные виды уравнений плоскости, вывести одно. Взаимное расположение плоскостей. Условие параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до плоскости.

27. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Вывести одно. Взаимное расположение прямых в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Пример.

28. Прямая и плоскость. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Точка пересечения прямой и плоскости.

29. Поверхности 2 порядка. Канонические уравнения. Построение. Метод координатных плоскостей.

30. Линейные пространства. Линейные преобразования. Основные определения. Примеры.

31. Билинейные и квадратичные формы. Основные определения. Примеры.

Контрольные, расчетно-графические и индивидуальные

Образцы индивидуальных заданий

Линейная алгебра

1. Вычислить определитель двумя способами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

а) разложив по элементам третьей строки;

б) предварительно получив нули в четвертом столбце.

2. Найти M_{24} и A_{32}.

3. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера; б) матричным методом; способом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

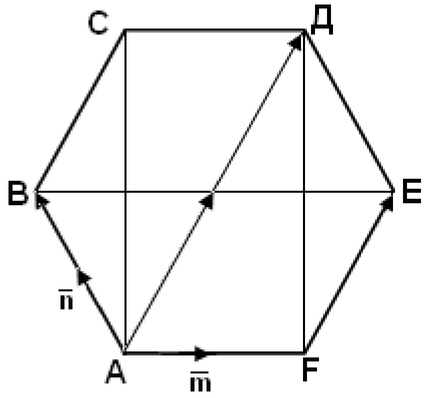
4. Решить однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - \quad 13x_3 = 0. \end{cases}$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Векторная алгебра

1. Дан правильный шестиугольник с длиной стороны, равной двум. Даны два вектора $\overline{m}$ и $\overline{n}$ единичной длины. Найти векторы $\overline{AD}$ и $\overline{EC}$.



2. Даны векторы $\overline{a} = \overline{m} + \overline{n}$, $\overline{b} = 2\overline{m} - \overline{n}$, $|\overline{m}| = 2, |\overline{n}| = 3, \left(\overline{m}, \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$. Найти:

1) $2\overline{a} \cdot \overline{b}$;

2) $np_{\overline{b}}\left(3\overline{a} + \overline{b}\right)$;

3) $\cos\left(4\overline{a} + \overline{b}, -\overline{b}\right)$;

3. Даны три точки: $A_1\left(-2,1,0\right)$, $A_2\left(3,2,4\right)$, $A_3\left(0,-3,5\right)$. Найти:

1) $\left|A_1\overline{A}_2 - 3A_1\overline{A}_3\right|$;

2) $np_{A_2\overline{A}_3}\left(A_1\overline{A}_3\right)$;

3) $\cos\left(A_1\overline{A}_2, A_1\overline{A}_3\right)$.

<u>Аналитическая геометрия на плоскости</u>

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку M(3;-1):

а) параллельно прямой 5x-4y+25=0;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-1}$;

г) под углом 45° к прямой $\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = -t - 2 \end{cases}$.

2. Даны вершины треугольника: A(-5;2), B(3;7), C(6;-3). Задание:

1) построить Δ ABC;

2) составить уравнение стороны AC;

3) составить уравнение медианы BM;

4) составить уравнение высоты CH и найти ее длину.

3. Даны прямые: $l_1: y = 2x - 1$, $\quad l_2: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -4 \end{cases}$. Найти:

1) точку пересечения прямых;

2) косинус угла между ними;

3) составить уравнение биссектрисы тупого угла между ними.

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $r = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$, 2) $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$, 3) $r = \dfrac{1}{1 - 2\cos\varphi}$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -4\sin t \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$.

6. Построить фигуры, ограниченные линиями:

1) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} r = 2\cos\varphi \\ r = 2\sin\varphi \end{cases}$.

7. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки M(-2;1), и от прямой x – 4=0.

8. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$, 2) $4x^2 + 8x + y^2 - 4y + 1 = 0$, 3) $y = 9 + 2\sqrt{x^2 + 4x + 9}$,

4) $x = 8 + 8y - y^2$, 5) $25x^2 - 14xy + 25y^2 = 10$, 6) $x^2 - 8xy + y^2 + 1 = 0$.

Аналитическая геометрия в пространстве

1. Из общих уравнений прямой:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - 4y - 2z + 4 = 0, \end{cases}$$

получить ее каноническое и параметрическое уравнения. Определить расстояние от начала координат до прямой.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (3,-2,4)

параллельно двум векторам $\overline{a}(6,1,-1), \overline{b}(3,2,-2)$. Определить расстояние от начала координат до этой плоскости и объем пирамиды, отсекаемой плоскостью от координатного угла.

3. Найти точку пересечения и угол между прямой

$\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = t-2 \\ z = t+3 \end{cases}$ и плоскостью $2x-6y+14z=0$. Составить уравнение проекции данной прямой на эту плоскость.

4. Даны вершины треугольной пирамиды: A(4,4,5), B(-5,-3,2), C(-2,-6,-3), Д(-2,2,1). Составить уравнение грани АВС и уравнение высоты ДН, опущенной на эту грань. Найти объем пирамиды.

5. Построить поверхности:

1) $x^2+y^2=2z$, 2) $x^2+y^2=(z-2)^2$, 3) $z=-\left(\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}\right)$, 4) $y^2-4y+z=0$,

5) $x^2+y^2+z^2+2x=0$, 6) $z=3+\sqrt{2-x}$.

6) Построить тело, ограниченное поверхностями:

$\begin{cases} z=x^2 \\ x+y=6 \\ y=2x \\ z=0 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x^2+y^2=4z^2 \\ x^2+y^2=2z \\ x=0,\ y=0 \\ (x\succ 0,\ y\succ 0) \end{cases}$.

Образцы контрольных заданий

Контрольная работа по теме «Определители и системы»

Вариант № 1

1. Найти матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 14 \\ 5 & 1 & 13 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}.$$

3. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ -5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$$

Расчетно-графическое задание по теме «Аналитическая геометрия»

Вариант № 1

1. Даны вершины треугольника: A(6;5), B(11;0), C(17;8).

   Найти:

   a. уравнение сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;
   b. уравнение высоты, проведенной из вершины A и ее длину;
   c. биссектрису угла B;
   d. уравнение прямой, проходящей через точку C, параллельно AB.

2. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится вчетверо дальше к точке M(6;-2), чем к точке B(0;-2).
3. Построить линии

А) $\boldsymbol{(x^2 + y^2)^3 = a^4 y^2}$, $\boldsymbol{a > 0}$.

Б) $4x^2 - 4y^2 + 16y = 0$;

В) $y^2 = 4 + 2x$;

4.Даны координаты точек $A_1(1;-1;2)$, $A_2(2;1;1)$, $A_3(1;1;4)$, $A_4(0;0;0)$

и прямая $l: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{2}$.

Найти

a. уравнение плоскости, проходящей через точку A_1 перпендикулярно прямой l;

b. уравнение плоскости, проходящей через точку A_1, и содержащую прямую l;

c. уравнение плоскости π, проходящей через три точки A_1, A_2, A_3;

d. уравнение прямой, проходящей через точку A_4, перпендикулярно плоскости π;

e. точку пересечения и угол между прямой l и плоскостью π;

f. уравнение проекции прямой l на плоскость.

5. Построить поверхности

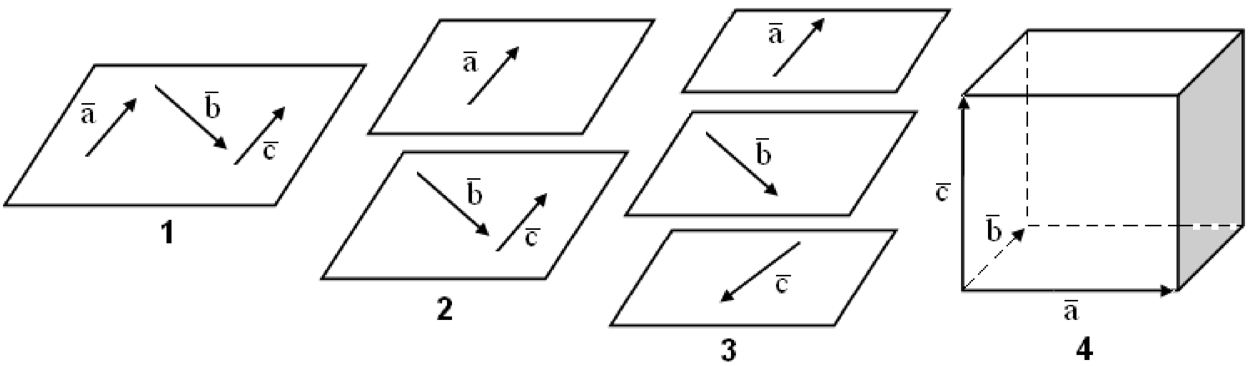
a. $x^2 + z^2 = 2 - 4y$;

b. $9x^2 - 4y^2 + z^2 = 36$;

c. $y = -3 + \sqrt{x}$.

Тест по разделам 3-5 «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости в пространстве

1. Укажите, на каких рисунках изображены компланарные векторы.



Рисунки № 1,2,3,4

2. Разложить вектор $\vec{c} = (9,4)$ по векторам $\vec{a} = (1,2)$ и $\vec{b} = (2,-3)$.

Варианты ответов:

1) $\vec{c}=5\vec{a}+2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-4\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$; 4) $\vec{c}=\frac{5}{4}\vec{a}-\vec{b}$

3. Даны точки $A(3,4,-2)$ и $B(2,5,-2)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с осями OX и OY углы $\alpha=60^\circ$ и $\beta=120^\circ$, а с осью OZ – тупой угол γ.

Варианты ответов: 1) –2; 2) –1; 3) –3; 4) –4.

4. Векторы $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}+7\vec{b}$ образуют треугольник ABC (рис. 5); векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – взаимно перпендикулярные орты. Найти углы треугольника α,β,γ.

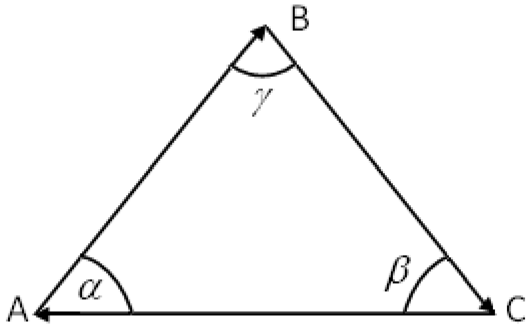


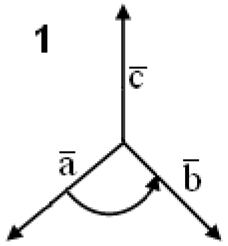
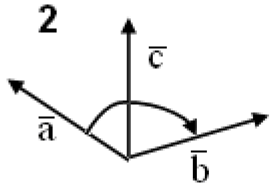
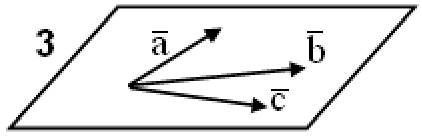
Рис.5

Варианты ответов:

1) $\cos\alpha=\frac{2}{3},\cos\beta=-\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha=\frac{1}{5},\cos\beta=-\frac{3\sqrt{5}}{5},\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{5}$;

3) $\cos\alpha=0,\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos\gamma=\frac{\sqrt{5}}{5}$; 4) $\cos\alpha=\frac{1}{4},\cos\beta=-\frac{3}{4},\cos\gamma=\frac{1}{4}$.

5. Установите взаимное соответствие.

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>А) компланарные</td><td>В) Левая трока</td><td>С) Правая тройка векторов</td></tr>
</table>

векторы	векторов	

6. Даны некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, причем $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $(c\,\hat{,}\,a)=(c\,\hat{,}\,b)=\dfrac{\pi}{3}$. Найти: а) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})$, б) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

Варианты ответов:

1) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})=26$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=4$.

2) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})=-3$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=26$.

3) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})=-20$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=3$.

4) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})=15$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=18$

7. Какую фигуру образует четырехугольник с вершинами $A(-5,3,4)$, $B(-1,-7,5)$, $C(6,-5,-3)$ и $D(2,5,-4)$?

Варианты ответов:

1) прямоугольник; 2) квадрат; 3) параллелограмм; 4) ромб.

8. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=5$, $(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})=(\vec{b},\hat{}\,\vec{c})=\dfrac{\pi}{3}$, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны. Найти модуль вектора $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Варианты ответов: 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8.

9. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к оси OZ и удовлетворяет условиям $\vec{x}\cdot\vec{a}=9$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=-4$, если $\vec{a}=(3,-1,5)$ и $\vec{b}=(1,2,-3)$.

Варианты ответов:

1) $2\vec{i}-3\vec{j}$; 2) $\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$; 3) $-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; 4) $\vec{i}-2\vec{j}$.

10. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b}=5\vec{i}-4\vec{j}+2\sqrt{2}\vec{k}$ и его модуль равен 5.

Варианты ответов:

1) $\vec{a} = -25\vec{i} + 20\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$; 2) $\vec{a} = -\frac{25}{7}\vec{i} + \frac{20}{7}\vec{j} - \frac{10\sqrt{2}}{7}\vec{k}$;

3) $\vec{a} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$ 4) $\vec{a} = -\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} + \frac{2\sqrt{2}}{5}\vec{k}$.

11. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (2;4;1)$, $\vec{c} = (2;-1;0)$ (рис. 6).

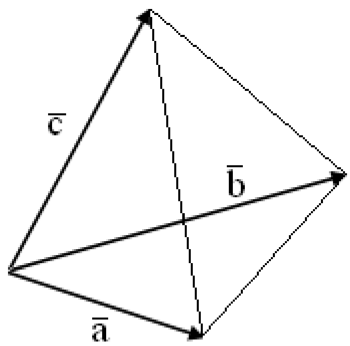


Рис.6

Варианты ответов:

1) $V = \frac{1}{4}$; 2) $V = \frac{25}{6}$; 3) $V = \frac{14}{5}$; 4) $V = \frac{1}{3}$.

Образец теста по векторной алгебре и аналитической геометрии

	Определения и простейшие свойства фигур на плоскости
1	Алгебраической линией 1-го порядка на плоскости является линия с уравнением 1) $y = kx^2 + b$; 2) $y^2 = k(x - x_0) + y_0$; 3) $\lvert Ax + By + C \rvert = 0$; 4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
2	Геометрическим местом точек на плоскости, равноудалённых от данных точки и прямой, является 1) эллипс, 2)гипербола, 3) парабола, 4) окружность.
3	Прямые, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы, называются 1) директрисами, 2) трактрисами, 3)асимптотами, 4) предельными.
4	Перпендикулярными прямыми являются:

	1) $x=1,\quad y=1,$ 2) $2x-5y-12=0,\quad 5x+2y-22y=0,$ 3) $y=2x-7,\quad y=-0{,}5x-9;$ 4) $\frac{x}{2}-\frac{y}{6}=1,\quad \frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1.$
5	Количество осей симметрии у эллипса, гиперболы и параболы соответственно равно 1) 2, 2, 2; 2) 2,2,1; 3) 2, 1, 2; 4) 1, 2, 2.
Кривые на плоскости	
6	Прямая, проходящая через точку А(2;-5), составляет с осью Ох угол 45^0 и пересекает её в точке $x_0 = \dots$. 1) 5; 2) 7; 3) -7; 4) -5.
7	Прямые 2x – 3y + 6 = 0 и Ax + 4y – 34 = 0 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M(x;y). 1) $x=3,\ y=4$; 2) $x=1; y=2$; 3) $x=4, y=3$; 4) $x=6, y=6$
8	Точка С делит отрезок с концами А(-2;1) и В(6;9) в отношении АС : СВ = 3 и находится от прямой 6x – 8y + 1 = 0 на расстоянии, равном … $\frac{21}{10}$
9	Расстояние от фокуса эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ до ближней вершины равно …4.
10	Из т.О(0;0) на прямую y = 2x + 5 опущен перпендикуляр, который пересекает её в точке… (-2,1).
11	Фокусы эллипса лежат в точках (-4;0) и (4;0); одна из вершин - в точке (0;-3). Тогда: 1) его уравнение: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1;$ 2) большая полуось равна 7; 3) эксцентриситет e = 0,8; 4) одна из вершин в точке (-5,0)
Векторы в пространстве	
12	***a*** = {0; 4; 2}, ***b*** = {3; y; 2}. ***a*** ⊥ ***b***. Тогда *y* = ... 1)0; 2)1; 3)-1; 4)2
13	Ненулевые векторы ***a*** и ***b*** – линейно независимы, если: 1) ***a* = - *b***; $2)\overline{a}\cdot\overline{b}=0$; $3)\ \overline{a}=\overline{i},\ \overline{b}=\overline{j}$; 4) ***a*** × ***b*** = 0.
14	***q*** – направляющий вектор прямой L; ***n*** – нормальный вектор плоскости α; α ⊥ L. Тогда: 1) ***q*** × ***n*** = 0; $2)\overline{q}\cdot\overline{n}=0,\ 3)\exists\ \lambda\in R:\overline{q}=\lambda\overline{n},\ 4)L\cap\alpha\neq\varnothing$
15	Векторы ***a*** = {x; –1; 2}, ***b*** = {1; 2; –3}, ***c*** = {3; –4;7} компланарны, если x =… $1)x=2,\ 2)x=3,\ 3)x=0,\ 4)x=1$
Плоскость и прямая в пространстве	

16	Расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{4}$ и $\frac{x+5}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{4}$ равно : 1) $\frac{\sqrt{1409}}{3\sqrt{2}}$, 2) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{1409}}$, 3) 1.
17	Прямая перпендикулярна к плоскости Oxy и пересекает её в точке (2; 3). Её канонические уравнения имеют вид ... 1) $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{1}$, 2) $\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$, 3) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{0}$
18	Прямая совпадает с осью Ox. Её канонические уравнения имеют вид… 1) $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$, 2) $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$, 3) $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$
19	Общим уравнением плоскости называется уравнение … 1) $Ax+By+Cz+D=0$, 2) $Ax+By+C=0$, 3) $Ax+C=0$

<u>Оценочные средства для промежуточной аттестации</u>

Вопросы к экзамену по аналитической геометрии и линейной алгебре

1. Определители II,III и высших порядков. Вычисление. Миноры и алгебраические дополнения. Свойства. ([1,4,5] п.7.2).
2. Методы решения линейных систем: 1) Крамера, 2) Гаусса, 3) матричный. Исследование системы. Однородная система ([2,3,4], п. 7.2).
3. Матрицы. Действия над ними. Обратная матрица. Ранг матрицы, теорема Кронекера-Капелли. Решение примеров ([2,3,4], п. 7.2).
4. Векторы, действия над ними. Линейная зависимость и независимость векторов. Базисы на плоскости и в пространстве. Т.1, Т.2.
5. Проекция вектора на ось, свойства. Связь между координатами вектора и его проекциями. Модуль вектора и его направляющие косинусы. Расстояние между точками.
6. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Определение, свойства, применение, выражение через координаты сомножителей. Необходимые и достаточные условия ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов.

7. Прямая на плоскости, различные виды уравнений. Расстояние от точки до прямой. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

8. Кривые II порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Канонические уравнения, построение, связь между параметрами. Директриса. Эксцентриситет ([2,3,4], п. 7.2).

9. Плоскость, различные виды уравнений, угол между двумя плоскостями, взаимное расположение двух плоскостей. Прямая в пространстве, различные виды уравнений, угол между двумя прямыми, взаимное расположение двух прямых. Прямая и плоскость. Угол между прямой и плоскостью, взаимное расположение.

10. Комплексные числа. Действия над ними. Комплексная плоскость. Различные формы записи. ([2,3,4], п. 7.2).Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа.

11. Полярные координаты. Связь полярных координат с декартовыми. Уравнения и рисунки кривых, заданных параметрически и в полярных координатах ([1, 2,3,4.10]).

12. Поверхности II порядка. Метод параллельных сечений. Определения, канонические уравнения поверхностей II порядка. Построение поверхностей.

13. Определение векторного (линейного) пространства. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования. Примеры.([1,5] п.7.2).

14. Собственные векторы и собственные значения матрицы. Характеристические уравнения ([1,5] п.7.2).

15. Квадратичная форма. Ее матрица. Свойства ортогональных матриц. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ([1,5] п.7.2).

Примерные образцы задач к экзамену по линейной алгебре и аналитической геометрии

1. Найти $A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Решите уравнение $\begin{vmatrix} x & -1 & 2 \\ -1 & x & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Найти $A-2B$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Проверить, что

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

5. Найти матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 14 \\ 5 & 1 & 13 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Вычислить определитель, $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, предварительно получив нули в четвертом столбце.

7. Найти $\det A$, разложив по элементам второго столбца, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Решить систему матричным способом и методом Крамера

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4. \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

9. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ -5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$.

10. При каком значении α векторы $\overline{a} = (3, -1, 15)$ и $\overline{b} = 2\overline{i} + \alpha \overline{j} + 10\overline{k}$ будут коллинеарны?

11. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$, если A(-2,5,7), B(-5,0,4), C(1,4,7).

12. Применяя векторное произведение найти площадь треугольника ABC, если A(-2,5,7), B(-5,0,4), C(1,4,7).

13. При каком значении α векторы $\overline{b} = \alpha\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{c} = \overline{i} - 4\overline{j}$ будут ортогональны?

14. Даны три силы $\overline{F_1} = (3,-5,4)$, $\overline{F_2} = (5,6,-3)$, $\overline{F_3} = (-7,-1,8)$, приложенные к точке A. Найти работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B(5.6,-3).

15. Найти синус угла между векторами $\overline{a} = (3,-5,4)$, $\overline{b} = (5,6,-3)$.

16. Найти проекцию $пр_{\overline{BC}}\overline{AB}$, если A(4,-1), B(-2,0), C(5,-4).

17. Найти направляющие косинусы вектора $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$.

18. Найти $\left|\overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a}\right| = 3$; $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 18$; $\left|\overline{a} - \overline{b}\right| = 12$.

19. Найти вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}(2,1,-1)$ и удовлетворяет условию $\overline{a} \cdot \overline{b} = 30$.

20. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;-1;2)$; $B(1;2;-1)$; $C(3;2;1)$.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $\mathrm{M}_1(2;-2;1)$ и $\mathrm{M}_2(1;3;3)$ перпендикулярно плоскости $x - 2y - 3z - 5 = 0$.

22. Доказать, что векторы $\mathbf{p} = \{3;1;1\}$, $\mathbf{q} = \{5;0;3\}$, $\mathbf{r} = \{-2;-2;1\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\mathbf{a} = \{4;1;3\}$ в этом базисе.

23. Найти модуль вектора $\overline{c}$, если $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, где $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$, B(-5,0,4), C(1,4,7), $\overline{b} = \overline{BC}$.

24. Даны точки A(-1,2), B(3,-1), C(0,4). Найти смешанное произведение $\overline{AB}\,\overline{BC}\,\overline{CA}$.

25. Найти косинусы угла между векторами $\overline{a} = 4\overline{i} + 5\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = -2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

26. Найти расстояние от точки A(1,-4) до прямой 3x+y-7=0.

27. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2,7) параллельно прямой $3x-5y+6=0$.

28. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(5,-1)$ и $M_2(-3,4)$.

29. Найти точку пересечения прямых $\begin{cases} 3x-2y=5, \\ x+4y=4 \end{cases}$.

30. При каком значении α прямые $\alpha x+3y-4=0$ и $5x-y+7=0$ будут перпендикулярны?

31. Найти координаты фокусов, если $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

32. Записать уравнение линии в полярных координатах и построить ее: $x^2+6x+y^2=0$.

33. Построить фокусы гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$.

34. Построить линию: $r(\varphi)=3(1-\sin\varphi)$.

35. Найти эксцентриситет, если $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$.

36. Выполнить действия:

1) $(2+3i)\cdot(3-2i)$,
2) $(3-2i)^2$,
3) $\frac{1+i}{1-i}$,
4) $\frac{4+3i}{5-2i}$.

37. Решить уравнения:

1) $x^2+25=0$;
2) $x^2+4x+13=0$.

38. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

1) 5,
2) -2,
3) $1-\sqrt{3}i$,
4) $1+i$,

5) $\frac{1}{i}$.

39. Найти все значения корней:

1) $\sqrt[5]{-1}$;

2) $\sqrt[6]{1}$;

3) $\sqrt{1+i}$.

40. Решить уравнение $z^3+1=0$.

41. Решить уравнение $z^4+2+2i=0$.

42. Найти точку пересечения прямой АВ, если A(-2,5,7), B(-5,0,4) и плоскости $x-2y+5z+1=0$.

43. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A(-2,5,7), B(-5,0,4), C(1,4,7).

44. Найти расстояние от точки A(2,4,-3) до плоскости $5x-2y+4z-23-0$.

45. Привести к каноническому виду уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 3x+y-2z+1=0. \end{cases}$

46. Найти расстояние от точки A(-2,0,5) до прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-3}$.

47. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,-4)$, $M_2(-5,0,4)$, $M_3(5,0,-7)$.

48. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 3x+y-2z+1=0. \end{cases}$ и плоскости $x-3y+z-1=0$.

49. Записать параметрические уравнения прямой $\begin{cases} 3x+y-z+1=0, \\ x-y+2z+5=0. \end{cases}$

50. Построить поверхность II порядка: $x^2+2z+z^2=0$.

51. Построить поверхность $25x^2-100y+4z^2=0$.

52. Построить поверхность II порядка $\frac{x^2}{4}+1=\frac{y^2}{9}+z^2$.

53. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(-2,0,5) перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-3}$.

54. Прямая проходит через точку $M_0(3,7,2)$ параллельно вектору $\overline{S}=\{5;8;1\}$. Записать уравнение прямой и указать, при каком значении C прямая будет параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$.

55.Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 6x-2y+z-4=0, \\ 3x+2y-2z+1=0. \end{cases}$$

56.Найти угол между прямой $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 3x+y-2z+1=0. \end{cases}$ и плоскостью $x-3y+z-1=0$.

57.Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

58. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

59.Исследовать систему на совместность $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2+4x_3-x_4=2, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=5. \end{cases}$ В случае совместности найти ее решение.

60. Исследовать систему на совместность. В случае совместности решить

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+6x_3-7x_4=5, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=7, \\ 2x_1+5x_2+5x_3-6x_4=0. \end{cases}$$

<u>Образцы экзаменационных билетов</u>

Билет 1

1. Понятие определителя n-го порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу). Свойства определителей.
2. Прямая линия на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Нормальное уравнение прямой. Взаимное расположение прямых.
3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x-2y+5z=-10, \\ 3x \quad\; -z \quad =8, \\ x \;\; +y+z \quad =1. \end{cases}$$

4. На плоскости xOy определены векторы: $\overline{a}=2\overline{i}$, $\overline{b}=3\overline{i}+3\overline{j}$, $\overline{c}=2\overline{i}+6\overline{j}$.

Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

5. Найти длину высоты ВД в треугольнике с вершинами А(-3,0), В(2,5), С(4,1).

Билет 2

1. Однородные линейные системы. Условие существования ненулевых решений однородной системы. Фундаментальная система решений. Структура общего решения однородной системы.
2. Эллипс. Свойства. Директрисы. Эксцентриситет.
3. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Даны вершины треугольника А(-4,2), В(3,-1), С(0,6).
   a. Через каждую вершину провести прямую, параллельную противоположной стороне (составить уравнения этих прямых).
   b. Составить уравнение высоты в точке В.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной к плоскости 2x+3y-z = 4.

Приложение 3

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ГУМАНИТАРНЫХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»
Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность
Специализация «Профилактика и тушение природных пожаров»
Форма подготовки очная

Владивосток
2014

Методические указания по выполнению расчетно-графического задания №1

1. Матрицы и действия над ними

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк и *n* столбцов вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m,n},$$

где i – номер строки, j – номер столбца, в котором находится элемент a_{ij}. Если число строк равно числу столбцов $(m = n)$, то матрица называется *квадратной* матрицей порядка n $\left(A = \left(a_{ij}\right)_n\right)$. Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица второго порядка.

Две матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{m,n}$ называются *равными* (A=B), если равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ (i=1,…,m; j=1,…,n).

Суммой двух матриц $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{m,n}$ одинакового порядка называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)_{m,n}$ (C = A+B), элементы которой определяются равенствами

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n).$$

Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ на число α называется матрица $B = \left(b_{ij}\right)_{m,n}$ *(*$B = \alpha A$ или $B = A\alpha$*)*, элементы которой определяются равенствами

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n).$$

Произведением матриц A и B: $A_{n\times p} \cdot B_{p\times m} = C_{n\times m}$ называется матрица $C_{n\times m}$ (C = AB), общий элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i – строки матрицы A и соответствующих элементов j – столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m).$$

Не всякие две матрицы можно умножать. Умножать матрицы можно в том случае, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго. В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Задание 1. Даны три матрицы

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{3\times4} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ 9 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ D_{2\times3} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найти: 1) $A \cdot B$; 2) $3 \cdot A - 2 \cdot D$

Решение. 1) найдем произведение матриц $A_{2\times3} \cdot B_{3\times4} = C_{2\times4}$. Вычислим элементы матрицы $C_{2\times4} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$: $c_{11} = (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 9 = 67$;

$c_{12} = (-3) \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 7 = 60$; $c_{12} = (-3) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 = 21$; $c_{14} = (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 6 = 48$;

$c_{21} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 9 = 13$; $c_{22} = 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 7 = -11$; $c_{23} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 = 2$;

$c_{24} = 4 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 = 3$. Отсюда матрица C имеет вид $C_{2\times4} = \begin{pmatrix} 67 & 60 & 21 & 48 \\ 13 & -11 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2) При умножении матрицы на число все ее элементы умножают на это число, тогда $3 \cdot A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 21 \\ 12 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $2 \cdot D = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -12 & 4 & 18 \end{pmatrix}$. Вычтем из матрицы $3 \cdot A$ матрицу $2 \cdot D$. Находим матрицу $G = 3 \cdot A - 2 \cdot D = \begin{pmatrix} -9-10 & 6-(-2) & 21-0 \\ 12-(-12) & 3-4 & 0-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 8 & 21 \\ 24 & -1 & -18 \end{pmatrix}$.

2. Определители второго и третьего порядка. Обратная матрица

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое ее определителем.

Матрице $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ соответствует определитель $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

Определитель второго порядка есть число равное произведению элементов главной диагонали без произведения элементов побочной диагонали.

Пример. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot 7-(-3)\cdot 5=14+15=29$.

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число, обозначаемое $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ или Δ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

В правой части находятся шесть слагаемых, три из которых, связанные с главной диагональю взяты со знаком «плюс», и три слагаемых, связанные с побочной диагональю, взяты со знаком «минус». На главной диагонали определителя находятся элементы a_{11},a_{22},a_{33}, на побочной – a_{13},a_{22},a_{31}.

Для запоминания этого определения существует «правило треугольника». Каждое слагаемое, стоящее в правой части со знаком плюс, представляет собой произведение трех элементов определителя, взятых, как показано на рис. 1a. Каждое слагаемое, стоящее со знаком минус, представляет собой произведение трех элементов определителя, взятых, как показано на рис. 1b.

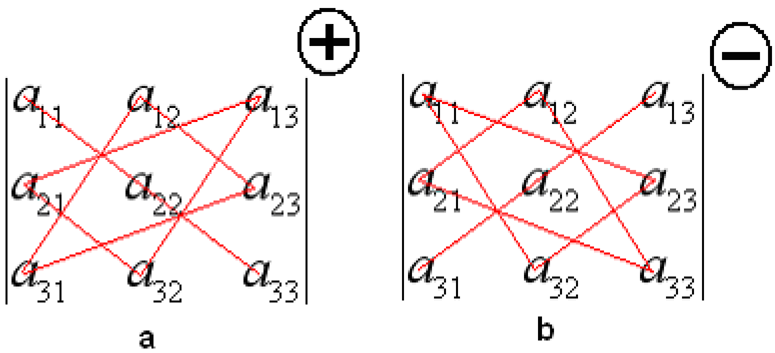


Рис. 1. «Правило треугольника» вычисления определителя III порядка

Минором элемента a_{ij} (i =1,2,3; j =1,2.3) определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя третьего порядка вычеркиванием i-той строки j-того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Минор элемента a_{ij} обозначают M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется произведение минора M_{ij} этого элемента на число $(-1)^{i+j}$, где i - номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначают A_{ij}.

Таким образом,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Справедлива следующая теорема.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$; $\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$;

$\Delta = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33}$; $\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$;

$\Delta = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}$; $\Delta = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$.

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* по отношению к матрице $A = \left(a_{ij}\right)_3$, если выполняется условие: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

Если определитель матрицы A не равен нулю, то существует единственная обратная матрица A^{-1}, которая находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где Δ – определитель матрицы A, $\Delta \neq 0$, A_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Задание 2. Найти матрицу, обратную к данной матрице А.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Вычислим определитель матрицы А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \cdot (-5) - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 36 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует и единственна.

2) Находим алгебраические дополнения элементов определителя матрицы А.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - 1 \cdot 2 = -22,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-10+2) = 8,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 17,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

3) Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -22 & 8 & 6 \\ 17 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

4) Проверим правильность нахождения матрицы A^{-1}, исходя из определения обратной матрицы.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}-22 & 8 & 6\\ 17 & 2 & -3\\ -2 & 4 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 2 & -5\end{pmatrix}=\frac{1}{36}\cdot\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\ 0 & 36 & 0\\ 0 & 0 & 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Аналогично $A^{-1}\cdot A=E$. Следовательно, обратная матрица вычислена верно.

3. Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\qquad(1)$$

Здесь x_1,x_2,x_3 – неизвестные, $a_{11},a_{12},...,a_{33},b_1,b_2,b_3$ – заданные числа. Матрица $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется матрицей системы, а определитель $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ называют определителем системы (1).

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*.

Формулы Крамера

Если определитель системы (1) отличен от нуля, то система (1) совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

(формулы Крамера).

3.2. Матричный способ решения системы линейных алгебраических уравнений

Систему (1) можно записать в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы А отличен от нуля, то система (1) совместна и имеет единственное решение, определяемое формулой $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - матрица, обратная к A.

Задание 3. Дана система:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 17. \end{cases} \tag{2}$$

Решить ее двумя способами:

1) по формулам Крамера
2) матричным способом

Решение

1. Вычислим определитель системы (2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

$\Delta \neq 0$, следовательно, система (2) совместна и имеет единственное решение.

Находим его, используя формулы Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 7 \\ 10 & 3 & -3 \\ 17 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 10 & -3 \\ 3 & 17 & 5 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 5,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

2. Перепишем систему (2) в виде $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Решение системы ищем в виде $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - матрица, обратная к A. Найдем A^{-1} (см. задание 2):

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 19 & -18 \\ -19 & -16 & 17 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 19 & -18 \\ -19 & -16 & 17 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

4. Метод Гаусса решения произвольных систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Матрица

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \qquad (4)$$

называется *расширенной матрицей* системы (3).

Элементарными преобразованиями матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ называются следующие действия:

1) перестановка строк (столбцов);
2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

С помощью элементарных преобразований любая матрица может быть приведена к трапециевидному виду.

Метод Гаусса заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований, выполняемых над строками матрицы. Таким образом, расширенная матрица (4) может быть приведена к виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array} \right), \qquad (5)$$

где ранг матрицы $r \le \min(m,n)$.

Матрица (5) является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{rr}x_r + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'_m \end{cases} . \qquad (6)$$

Система (6) эквивалентна исходной системе (3).

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1},\ldots,b'_m$ отлично от нуля, то система (6), а, следовательно, и исходная система (3) не совместна, то есть не имеет решений.

Если же $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$, то система (6) совместна. Следовательно, совместна и исходная система (3).

<u>Задание 4.</u> Найти решение системы методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1. \end{cases} \qquad (7)$$

<u>Решение</u>.

Расширенная матрица системы (7) имеет вид: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 9 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

Приведем расширенную матрицу системы к трапециевидной форме с помощью элементарных преобразований. Для этого вторую строку сделаем первой. Затем первую строку умножим на (-3) и прибавим ко второй; далее первую строку умножим на (-2) и прибавим к третьей строке; наконец первую строку умножим на (-3) и прибавим к четвертой строке. В результате получим:

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-3&-3\\1&2&4&9\\2&7&-1&0\\3&8&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\3&2&-3&-3\\2&7&-1&0\\3&8&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-4&-15&-30\\0&3&-9&-18\\0&2&-13&-26\end{array}\right).$$

Теперь первая строка «отдыхает» и начинает «работать» вторая строка.

Вторую строку умножим на 3, а третью на 4, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-4&-15&-30\\0&3&-9&-18\\0&2&-13&-26\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-12&-45&-90\\0&12&-36&-72\\0&2&-13&-26\end{array}\right)$$. Теперь вторую строку прибавим к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-12&-45&-90\\0&12&-36&-72\\0&2&-13&-26\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-12&-45&-90\\0&0&-81&-162\\0&2&-13&-26\end{array}\right)$$; далее четвертую строку умножим на 6 и к ней прибавим вторую строку, тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-12&-45&-90\\0&0&-81&-162\\0&12&-78&-156\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-12&-45&-90\\0&0&-81&-162\\0&0&-123&-246\end{array}\right)$$. Теперь третью строку поделим на (-81), а четвертую на (-123), тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-12&-45&-90\\0&0&-81&-162\\0&0&-123&-246\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-12&-45&-90\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{array}\right)$$ отбросим последнюю строку, а вторую поделим на (-3), получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&4&15&30\\0&0&1&2\end{array}\right). \qquad (8)$$

Последняя матрица является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 9, \\ \quad 4x_2 + 15x_3 & = & 30, \\ \qquad x_3 & = & 2. \end{cases} \qquad (9)$$

Система (9) эквивалентна исходной системе (7). Из последнего уравнения системы (9) находим $x_3 = 2$; из второго определяем $4x_2 = 30 - 15 \cdot 2,\ x_2 = 0$; из первого уравнения находим $x_1 = 9 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 2,\ x_1 = 1$.

Проверка.

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 & = & -3, \\ 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & = & 9, \\ 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 2 & = & 0, \\ 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 2 & = & 1. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 2. \end{cases}$

5. Собственные числа и собственные векторы матрицы

Число λ называется *собственным числом* матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

если существует ненулевой вектор X такой, что

$$A \cdot X = \lambda \cdot X.$$

При этом вектор X называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим собственному числу λ.

Характеристическим уравнением матрицы A называется уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ этого уравнения являются собственными числами матрицы A.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

в которой λ принимает одно из значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Определитель этой системы в силу (10) равен нулю. Следовательно, система определяет с точностью до постоянного множителя собственный вектор (x_1, x_2, x_3), соответствующий данному собственному числу.

Задание 5. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение матрицы A.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ являются собственными числами матрицы A.

Для отыскания собственных векторов матрицы A используем систему уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + (5-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

полагая в ней поочередно $\lambda = \lambda_i$, $i = 1,2,3$.

1. Пусть $\lambda = \lambda_1 = -2$. Тогда система (11) примет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}. \qquad (12)$$

Полученную систему решим методом Гаусса. Расширенная матрица $\overline{A}$ системы (12) имеет вид:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 3 & 0\end{array}\right).$$

Приведем матрицу $\overline{A}$ к трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований. Для этого умножим элементы первой строки матрицы $\overline{A}$ на (-3) и сложим с соответствующими элементами второй строки. Получим матрицу

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & 1 & 0\\ 0 & -20 & 0 & 0\end{array}\right),$$

последняя матрица является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1+7x_2+x_3=0 \\ \quad -20x_2=0 \end{cases}.$$

Следовательно, $x_2=0, x_1=-x_3$, то есть система имеет бесчисленное множество решений, определяемых равенством $(x_1,x_2,x_3)=(x_1,0,-x_1)$.

Таким образом, собственным вектором матрицы *A,* соответствующим собственному числу $\lambda=-2$, является ненулевой вектор, определяемый совокупностью чисел $(x_1,x_2,x_3)=(t,0,-t)=(1,0,-1)\cdot t$, где t – любое число, отличное от нуля.

2. Пусть $\lambda=\lambda_2=3$. Тогда система (11) примет вид:

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}. \tag{13}$$

Решим систему (13) методом Гаусса.

Расширенная матрица системы (13) имеет вид:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 0\end{array}\right).$$

Приведем матрицу $\overline{A}$ к трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований. Для этого, сначала переставим первую строку матрицы $\overline{A}$ со второй строкой. Получим:

$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 0\end{array}\right).$$

Теперь умножим элементы первой строки матрицы A_1 на 2 и сложим с соответствующими элементами второй строки. Затем умножим элементы первой строки матрицы A_1 на (-3) и сложим с соответствующими элементами третьей строки. В результате получим:

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Далее, сложим элементы второй строки матрицы A_2 *с* соответствующими элементами третьей строки. Получим матрицу:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

которая является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, $x_2 = -x_3, x_1 = x_3$, то есть система имеет бесконечное множество решений, определяемых равенством $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1, x_1)$.

Таким образом, собственным вектором матрицы *A,* соответствующим собственному числу $\lambda_2 = 3$, является ненулевой вектор, определяемый совокупностью чисел $(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t) = (1, -1, 1) \cdot t$, где t – любое число, отличное от нуля.

3) Пусть $\lambda = \lambda_3 = 6$. Тогда система (11) примет вид:

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Решим систему (14) методом Гаусса. Расширенная матрица системы (14) имеет вид:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Приведем матрицу $\overline{A}$ к трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований. Сначала поменяем первую строку матрицы $\overline{A}$ со второй строкой. Получим:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Умножим теперь элементы первой строки матрицы A_1 на 5 и сложим с соответствующими элементами второй строки. Затем умножим элементы первой строки матрицы A_1 на (-3) и сложим с соответствующими элементами третьей строки. В результате получим:

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right).$$

Далее, сложим элементы второй строки матрицы A_2 соответственно с элементами третьей строки. Тогда получим матрицу: $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

которая является расширенной матрицей системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

Следовательно, $x_2 = 2x_3, x_1 = x_3$, то есть система имеет бесчисленное множество решений, определяемых равенством $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_1, x_1)$.

Таким образом, собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу $\lambda = 6$, является ненулевой вектор, определяемый совокупностью чисел $(x_1, x_2, x_3) = (t, 2t, t) = (1,2,1) \cdot t$, где t – любое число, отличное от нуля.