МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

«СОГЛАСОВАНО»

Руководитель ОП
«Профилактика и тушение природных пожаров»

_____________ Олишевский А.Т.
(подпись) (Ф.И.О. рук. ОП)
«14» 06 2016 г.

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой
Безопасность в чрезвычайных ситуациях и защиты окружающей среды

_____________ Петухов В.И.
(подпись) (Ф.И.О. зав. каф.)
«14» 06 2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Математический анализ
Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность
Специализация «Профилактика и тушение природных пожаров»
Форма подготовки очная

курс 1, 2 семестр 1, 2, 3
лекции 72 час.
практические занятия 72 час.
лабораторные работы 0 час.
в том числе с использованием МАО лек. 54/пр. 36/лаб. 0 час.
всего часов аудиторной нагрузки 144 час.
в том числе с использованием МАО 90 час.
самостоятельная работа 117 час.
в том числе на подготовку к экзамену 63 час.
контрольные работы 0
курсовая работа/курсовой проект – не предусмотрен
зачет 2 семестр
экзамен 1, 3 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 17.08.2015 № 851

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры безопасности в чрезвычайных ситуациях и защиты окружающей среды, протокол от 14.06.2016 №10.

Составитель: д.ф.-м.н., доцент Ксендзенко Л.С.

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________

(подпись) (ФИО)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________

(подпись) (ФИО)

АННОТАЦИЯ

Дисциплина предназначена для специалистов специальности **20.05.01** «Пожарная безопасность» специализация «Профилактика и тушение природных пожаров». Дисциплина «Математический анализ» является дисциплиной базовой части Блока 1 Дисциплины (модули) (согласно учебному плану – Б1.Б.8). Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 9 зачетных единицы, 324 часа. Учебным планом предусмотрены лекционные занятия (72 часов), практические занятия (72 часов), самостоятельная работа (180 часов, в том числе на подготовку к экзамену 63 часа). Дисциплина реализуется на 1, 2 курсах в 1, 2, 3 семестрах. Форма контроля – экзамен и зачет.

Для успешного изучения дисциплины «Математический анализ» студенты должны быть знакомы с основными положениями школьной математики. На материале математического анализа базируется большое число общих и специальных инженерных дисциплин, таких как, теория вероятностей и математическая статистика, прикладная математика, физика, механика, информатика, теория горения и взрыва и др.

Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки используются во всех без исключения естественнонаучных и инженерных дисциплинах, модулях и практиках ООП.

Изучение математического анализа позволяет будущему специалисту научно анализировать проблемы его профессиональной области (в том числе связанные с созданием новой техники и технологий), успешно решать разнообразные научно-технические задачи в теоретических и прикладных аспектах, самостоятельно – используя современные образовательные и информационные технологии – овладевать той новой информацией, с которой ему придётся столкнуться в производственной и научной деятельности.

Изучение теоретического и алгоритмического аппарата математического анализа способствует развитию у будущих специалистов склонности и способности к творческому мышлению, выработке системного подхода к исследуемым явлениям, умения самостоятельно строить и анализировать математические модели различных систем.

Целями освоения дисциплины Математический анализ являются формирование и развитие личности студентов, их способностей к алгоритмическому и логическому мышлению, а так же обучение основным математическим понятиям и методам математического анализа. Изучение курса математического анализа способствует расширению научного кругозора и повышению общей культуры будущего специалиста, развитию его мышления и становлению его мировоззрения.

Задачи дисциплины

1. Формирование устойчивых навыков по компетентностному применению фундаментальных положений математического анализа при изучении дисциплин профессионального цикла и научном анализе ситуаций, с которыми выпускнику приходится сталкиваться в профессиональной и общекультурной деятельности.

2. Освоение методов дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений, теории рядов и методов математической физики при решении практических задач.

3. Обучение применению методов математического анализа для построения математических моделей реальных процессов в области пожарной безопасности.

4. Формирование при изучении математического анализа элементов общекультурных и профессиональных компетенций.

Для успешного изучения дисциплины «Математический анализ» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

- Математические компетенции
- Ценностно-смысловые компетенции
- Общекультурные компетенции
- Информационные компетенции
- Коммуникативные компетенции
- Социально-трудовые компетенции

- Компетенции личностного самосовершенствования

Для успешного изучения дисциплины «Математический анализ» у обучающихся должны быть сформированы следующие компетенции:

- способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК-1).

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие профессиональные компетенции (элементы компетенций).

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**	
ОК-1 способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу	Знает	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности
	Умеет	решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления
	Владеет	методами анализа и синтеза.

Для формирования элементов вышеуказанной компетенции в рамках дисциплины «Математический анализ» применяются следующие методы активного обучения: лекция-беседа, групповая консультация, лекция вдвоем, лекция с запланированными ошибками.

«Лекция-беседа» или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

«Групповые консультации» представляют собой своеобразную форму проведения практических занятий, основным содержанием которых является разъяснение отдельных, часто наиболее сложных или практически значимых вопросов изучаемой программы. После всех практических занятий студенты получают задачи для самостоятельной внеаудиторной работы. С каждым практическим занятием повышается сложность предлагаемых задач. Групповая консультация проводятся с целью оказания помощи в самостоятельной работе, в подготовке к рубежной контрольной работе. Студенты сами предлагает для решения те задачи, которые вызвали какие-то затруднения или непонимание. К доске выходят студенты, готовые разъяснить возникшие вопросы. Преподаватель только контролирует ход решения задач, комментирует в случае необходимости какие-то ситуации и обобщает рассмотренный материал. Преимущество практики-консультации перед другими формами проведения практического занятия в том, что она позволяет в большей степени приблизить содержание занятия к практическим интересам обучаемых, в какой-то степени индивидуализировать процесс обучения с учетом уровня понимания и восприятия материала каждым обучаемым.

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Раздел I. Математический анализ 72/ час.			
№ п/п	Тема	Содержание	Кол-во часов
1	Введение в математический анализ	Множества. Операции с множествами. Множество вещественных чисел. Комплексные числа. Функция. Способы задания функции. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.	4
2	Предел и непрерывность функции действительной переменной	Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Непрерывность функции. Основные свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация.	6
3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	Определение производной. Геометрический и физический смысл производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные основных элементарных функций. Производные функций, заданных неявно, параметрически. Понятие о производных высших порядков. Дифференциал, его свойства. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Исследование функций и построение их графиков.	8
4	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Функции нескольких переменных. Область определения, предел, непрерывность. Частные производные, полный дифференциал. Производная по направлению, градиент. Частные производные высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных.	6
5	Неопределенный интеграл	Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменного, метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных (дробных), тригонометрических и иррациональных выражений. О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции.	7
6	Определенный интеграл,	Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Методы вычисления	5

	несобственные интегралы	определенных интегралов. Геометрические и физические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций.	
7	Дифференциальные уравнения	Дифференциальные уравнения: основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференциальные уравнения высших порядков, основные понятия. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородные уравнения второго порядка. Структура общего решения однородного уравнения. Линейные неоднородные уравнения второго порядка. Структура общего решения неоднородного уравнения. Метод Лагранжа вариации постоянных. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Системы линейных д.у.	14
8	Числовые и функциональные ряды	Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость рядов. Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Применение рядов.	14
9	Кратные интегралы	Задачи, приводящие к понятию двойного Интеграла. Определение двойного интеграла, свойства, применение. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах. Криволинейные интегралы 1 и 2 рода.	8
	ИТОГО:		72

Семестр I

Лекция 1. Множества. Операции с множествами. Множество вещественных чисел. Расширенное понятие числа. Понятие функции. Обзор элементарных функций (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 2. Модуль действительного числа. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. (2 часа).

Лекция 3. Предел функции непрерывного аргумента. Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Их свойства. (2 часа).

Лекция 4. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. (2 часа).

Лекция 5. Сравнение бесконечно малых величин. Непрерывные функции. Действия над ними. Точки разрыва. (2 часа).

Лекция 6. Задачи, приводящие к понятию производной. Ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции. (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 7. Производная сложной и обратной функций. Производная функций заданных неявно и параметрически. Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Дифференциал функции. Свойства. Инвариантность формы первого дифференциала (2 часа).

Лекция 8. Теоремы о конечных приращениях. Правило Лопиталя.

Исследование функций с помощью производных (2 часа).

Лекция 9. Выпуклость, вогнутость кривой. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Полное исследование функции и построение ее графика (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного**

обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

<u>Семестр II</u>

Лекция 1. Функции нескольких переменных. Частные производные. Производная по направлению. Градиент. (2 часа).

Лекция 2. Частные производные высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных. (2 часа).

Лекция 3. Задачи на нахождение наименьших и наибольших значений функции. (2 часа).

Лекция 4. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. (2 часа).

Лекция 5. Основные методы интегрирования. (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 6. Интегрирование выражений, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен. (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 7. Интегрирование дробно-рациональных и тригонометрических функций. (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 8. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла, его свойства. Теорема существования. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 9. Методы вычисления определенного интеграла. Несобственные интегралы. Геометрические и физические приложения определенного интеграла (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

<u>Семестр III</u>

Лекция 1. Задачи, приводящие к понятию дифференциальных уравнений. Основные определения. Основной результат теории ОДУ (2 часа).

Лекция 2. Типы дифференциальных уравнений I порядка и методы их решения. (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного **использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. (2 часа).

Лекция 4. Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка. Теорема о структуре общего решения. (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка. Теорема о структуре общего решения. (2 часа). Лекция проводится **с** применением метода активного обучения «**лекция-вдвоем**».

Лекция 6. Метод вариации произвольных постоянных решения неоднородных дифференциальных уравнений II порядка. (2 часа).

Лекция 7. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений I порядка с постоянными коэффициентами (2 часа).

Лекция 8. Числовые ряды. Основные определения и примеры. Необходимый признак сходимости рядов (2 часа). Лекция-беседа.

Лекция 9. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (2 часа).

Лекция 10. Геометрический ряд, его свойства. Доказательство расходимости гармонического ряда. Сходимость и расходимость ряда Дирихле. Примеры.

Лекция 11. Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Остаток ряда. Теорема Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда (2 часа).

Лекция 12. Понятие о функциональных рядах. Степенные ряды. Свойства. Теорема Абеля (2 часа).

Лекция 13. Ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций (2 часа).

Лекция 14. Применение рядов (2 часа). Лекция проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».** Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 15. Задачи, приводящие к понятию двойного Интеграла. Определение двойного интеграла, свойства, применение (2 часа).

Лекция 16. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах (2 часа).

Лекция 17. Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла – задача о массе материальной кривой. Определение криволинейного интеграла по длине дуги. Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги. Применение.

Лекция 18. Определение криволинейного интеграла по координате, свойства, вычисление. Условия независимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования.

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

№ п/п	№ темы дисциплины	Темы практических занятий	Кол-во часов
I семестр			
1	1	Введение в математический анализ	4
2	2	Предел и непрерывность функции одной переменной	4
3	3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	10
	СУММА:		18
II семестр			
4	4	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	4
5	5	Неопределенный интеграл	8
6	6	Определенный интеграл. Несобственные интегралы	6
	СУММА:		18
III семестр			
7	7	Дифференциальные уравнения	14
8	8	Числовые и функциональные ряды.	14
9	9	Поверхности II порядка. Двойные и криволинейные интегралы.	8
	СУММА:		36
	ИТОГО:		72

Практические занятия (72 часа)

Семестр I

Занятие 1. Входной тест на знание элементарной математики (2 часа).

Занятие 2. Основные правила нахождения предела числовой последовательности и предела функции **(2 часа).** Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».** Групповые консультации представляют собой своеобразную форму проведения практических занятий, основным содержанием которых является разъяснение отдельных, часто наиболее сложных или практически значимых вопросов изучаемой программы. После всех практических занятий студенты получают задачи для самостоятельной внеаудиторной работы. С каждым практическим занятием повышается сложность предлагаемых задач. Групповая консультация проводятся с целью оказания помощи в самостоятельной работе, в подготовке к рубежной контрольной работе. Студенты сами предлагает для решения те задачи, которые вызвали какие-то затруднения или непонимание. К доске выходят студенты, готовые разъяснить возникшие вопросы. Преподаватель только контролирует ход решения задач, комментирует в случае необходимости какие-то ситуации и обобщает рассмотренный материал. Преимущество практики-консультации перед другими формами проведения практического занятия в том, что она позволяет в большей степени приблизить содержание занятия к практическим интересам обучаемых, в какой-то степени индивидуализировать процесс обучения с учетом уровня понимания и восприятия материала каждым обучаемым.

Занятие 3. Первый и второй замечательные пределы (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 4. Сравнение бесконечно малых. Непрерывность и точки разрыва **(2 часа).** Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 5. Производные элементарных функций. Таблица производных.

Касательная и нормаль к графику функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 6. Производная сложной функции. Логарифмическая производная. (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 7. Производная функции заданной неявно и параметрически(2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 8. Контрольная работа по производным (2 часа).

Занятие 9. Теоремы Ролля, Коши, Лагранжа. Правило Лопиталя (неопределенности вида 5), степенные неопределенности $0^{\infty}, \infty^{0}, 1^{\infty}$.Общая схема исследования и построения графика функции (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Семестр II

Занятие 1. Частные производные функции двух переменных. Полный дифференциал. Производная по направлению. Градиент функции нескольких переменных (2 часа).

Занятие 2. Экстремум функции двух переменных. Задачи на отыскание наименьших и наибольших значений функции (2 часа).

Занятие 3. Простейшие методы интегрирования: метод разложения, замены переменного, интегрирования по частям (2 часа).

Занятие 4. Интегрирование выражений, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 5. Интегрирование дробно-рациональных выражений (2 часа).

Занятие 6. Интегрирование тригонометрических функций (2 часа).

Занятие 7. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле (2 часа). Занятие проводится **с использованием**

метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 8. Несобственные интегралы (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 9. Геометрические и физические приложения определенного интеграла (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Семестр III

Занятие 1. Дифференциальные уравнения I порядка и методы их решения (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 2. Дифференциальные уравнения высших порядков и методы их решения (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 3. Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами (2 часа).

Занятие 4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами (2 часа).

Занятие 5. Метод вариации произвольных постоянных решения линейные неоднородных дифференциальных уравнений (2 часа).

Занятие 6. Системы линейных дифференциальных уравнений I порядка (2 часа).

Занятие 7. Контрольная работа по дифференциальным уравнениям (2 часа).

Занятие 8. Непосредственное вычисление суммы ряда. Геометрический ряд.

Занятие 9. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (2 часа).

Занятие 10. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость (2 часа).

Занятие 11. Степенные ряды. Ряд Тейлора (2 часа).

Занятие 12. Применение рядов (2 часа). Занятие проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».**

Занятие 13. Контрольная работа по рядам.

Занятие 14. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Применение (2 часа).

Занятие 15. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах (2 часа).

Занятие 16. Вычисление криволинейных интегралов 1 рода. Применение.

Занятие 17. Вычисление криволинейных интегралов 2 рода. Применение.

Занятие 18. Обзорное занятие.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Математический анализ» представлено в Приложении 1. Оно содержит: план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию; характеристику заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению; требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п\п	Контролируемые разделы/темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства - наименование	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1.	Введение в математический анализ.	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (осенний семестр1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум	
2.	Предел и непрерывность функции действительной переменной.	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (осенний семестр1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние	

			здания; 5. Коллоквиум .
3.	Дифференциальное исчисление функ- ции одной перемен-ной	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (осенний семестр1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания, РГЗ; 5. Коллоквиум 6.Контрольная работа.
4.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (весенний семестр 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум
5.	Неопределенный интеграл	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (весенний семестр 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум
6.	Определенный интеграл, несобственные интегралы	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (весенний семестр 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум
7.	Дифференциальные уравнения	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (3 семестр)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум 6.Контрольная работа
8.	Кратные интегралы	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (3 семестр)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум 6.Экзаменнационные вопросы

9.	Ряды	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (3 семестр)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5 Коллоквиум.

Типовые контрольные задания, ИДЗ, вопросы к коллоквиуму, экзаменационные вопросы, образцы билетов представлены в разделах «Контрольно-измерительные материалы» и «Материалы для самостоятельной работы студентов»

V. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование; Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-369-01032-7 - Режим доступа : http://znanium.com/catalog/product/344777

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=Znanium:Znanium-344777&theme=FEFU

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс]: учебное пособие/ А.П. Рябушко [и др.].— Электрон.текстовые данные.— Минск: Вышэйшая школа, 2013.— 304 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.—

ЭБС «IPRbooks»

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=IPRbooks:IPRbooks-20266&theme=FEFU

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: учебное пособие/ А.П. Рябушко [и др.].— Электрон.текстовые данные.— Минск: Вышэйшая школа, 2014.— 397 с.— Режим доступа:

http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

ЭБС «IPRbooks»

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=IPRbooks:IPRbooks-35481&theme=FEFU

4.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля [Электронный ресурс]: учебное пособие/ А.П. Рябушко [и др.].— Электрон.текстовые данные.— Минск: Вышэйшая школа, 2013.— 367 с.— Режим доступа:http://www.iprbookshop.ru/20211.html

ЭБС «IPRbooks»

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=IPRbooks:IPRbooks-20211&theme=FEFU

Дополнительная и справочная литература:

1.Высшая математика: Учебник / Шипачев В.С. - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.: 60x90 1/16 (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-010072-2 - Режим доступа:
http://znanium.com/catalog/product/4697270
http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=Znanium:Znanium-469720&theme=FEFU

2. Лунгу К.Н., Макаров Е.В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 1. Москва: Физматлит, 2014. 216 с.
http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=854317

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=Znanium:Znanium-854317&theme=FEFU

3. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2: Учебное пособие / Лунгу К.Н., Макаров Е.В., - 2-е изд. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 384 с.: ISBN 978-5-9221-1603-9 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/854393
http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=Znanium:Znanium-854393&theme=FEFU

Internet-ресурсы:

1. Znanium.com – электронно-библиотечная система, содержит полные тексты учебников и учебных пособий, входящих в списки основной и дополнительной литературы.

2. http://mathportal.net/ – образовательный математический сайт создан для помощи студентам, желающим самостоятельно изучать и сдавать экзамены по высшей математике
3. http://window.edu.ru – Российское образование. Федеральный портал.
4. http://stu.sernam.ru/ – научная библиотека служит для получения быстрого и удобного доступа к информации естественнонаучных изданий

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

На изучение дисциплины отводится 144 часа аудиторных занятий, 180 часов на самостоятельную работу, из них 63 на подготовку к экзамену. На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства, формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Преподаватель поддерживает непрерывный контакт с аудиторией, отвечает на возникающие у студентов вопросы.

На практических занятиях преподаватель сначала кратко опрашивает студентов по теории, затем подробно решает примеры по пройденной теме, взаимодействуя с учениками.

Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения, затем выдает индивидуальное домашнее задание.

После получения задания, студенту рекомендуется в этот же день приступить к его выполнению.

В случае затруднения при выполнении домашнего задания студенту рекомендуется повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами, или прийти на еженедельную плановую консультацию и выполнить задание с помощью преподавателя.

После выполнения задания студент отдает его на проверку преподавателю. Работа проверяется в течение 2-3 дней и в случае необходимости с соответствующими указаниями возвращается на доработку.

Работа зачитывается только в том случае, когда все задачи решены правильно.

В начале семестра для проведения текущей самостоятельной работы, подготовки к коллоквиуму, экзаменам старостам групп отправляются по электронной почте перечень вопросов к коллоквиуму, зачету и экзаменам. Затем старосты отправляют все эти файлы всем членам группы.

К экзамену студент допускается только в случае выполнения всех индивидуальных домашних заданий, контрольной работы и ответа на коллоквиуме, как минимум на удовлетворительную оценку.

Подготовку к экзамену удобно осуществлять по темам, которые преподаватель выделяет во время чтения лекций. Например, по первому семестру тема 1 «Введение в математический анализ».

Рекомендуется все определения переносить в отдельную тетрадь (планшет) и заучивать их наизусть. Затем вносить в планшет формулировки теорем, формулы и заучивать их. Проводить доказательства теорем.

Аналогично прорабатывается тема 2 «Предел и непрерывность функции действительной переменой» и т.д. Проштудировав, таким образом, все темы, студент сводит весь материал в единое целое, устанавливая связи между его частями. Например, понятие предела вводится на первой лекции в теме 1, затем используется на всех лекциях при изучении тем 2,3,4.

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Освоение дисциплины производится на базе учебных аудиторий Инженерной школы ДВФУ учебного корпуса Е по адресу: п. Аякс, кампус ДВФУ, корпус Е. Аудитории оснащены современным оборудованием:

Мультимедийная аудитория:

Проектор 3-chip DLP, 10 600 ANSI-лм, WUXGA 1 920х1 200 (16:10) PT-DZ110XE Panasonic; экран 316х500 см, 16:10 с эл. приводом; крепление настенно-потолочное Elpro Large Electrol Projecta; профессиональная ЖК-панель 47", 500 Кд/м2, Full HD M4716CCBA LG; подсистема видеоисточников документ-камера CP355AF Avervision; подсистема видеокоммутации; подсистема аудиокоммутации и звукоусиления; подсистема интерактивного управления; беспроводные ЛВС обеспечены системой на базе точек доступа 802.11a/b/g/n 2x2 MIMO(2SS).

Передвижной доской, предназначенной для написания текстов маркером и мелом.

Приложение I

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ГУМАНИТАРНЫХ НАУК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

по дисциплине «Математический анализ»
Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность
Специализация «Профилактика и тушение природных пожаров»
Форма подготовки очная

Владивосток
2014

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выпол-нения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
Семестр I				
1	(1-2) неделя	Входной тест по элементарной математике	2	Проверка теста
2	(2-4) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Пределы»	4	Прием и защита задания
3	(4-6) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «I, II замечательные пределы»	2	Прием и защита задания
4	(6-8) неделя	Выполнение РГЗ по теме «Непрерывность функции и точки разрыва, сравнение б/м»	4	Прием и защита задания
5	(8-10) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Основные правила дифференцирования, геометрический смысл производной. Производная сложной функции»	4	Прием и защита задания
6	(10-12) неделя	Подготовка к контрольной работе по теме «Производная», изучение базовой литературы.	4	Опрос на коллоквиуме
	(12-14) неделя	Контрольная работа по теме: «Производные».	2	Проверка контрольной работы
7	(12-14) неделя	Выполнение РГЗ по теме «Полное исследование функции, построение графика»	4	Прием и защита задания
8	(15-18) неделя	Подготовка к коллоквиуму по теме «Введение в анализ. Производные и их приложения», изучение базовой литературы.	10	Опрос на коллоквиуме
9	Январь нового года	Подготовка к экзамену, изучение конспектов и базовой литературы.	36	Экзамен
Семестр II				
1	Первая – вторая неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Экстремум функции 2-х переменных, отыскание наибольшего и наименьшего значений функции»	6	Прием и защита задания
2	(2-4) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Табличные интегралы, метод интегрирования по частям»	6	Прием и защита задания
3	(4-6) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Интегрирование дробно-	10	Прием и защита задания

		рациональных, тригонометрических и некоторых иррациональных функций»		
4	(6-8) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Определенный интеграл»	10	Прием и защита задания
5	(8-10) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Несобственный интеграл»	8	Прием и защита задания
6	(10-12) неделя	Выполнение РГЗ по теме «Геометрические и физические приложения определенного интеграла»	10	Прием и защита задания
7	(13-16) неделя	Подготовка к коллоквиуму по теме «Неопределенный интеграл. Определенный интеграл, его приложения», изучение базовой литературы.	22	Опрос на коллоквиуме
8	(15-18) неделя	Подготовка к зачету, изучение конспектов и базовой литературы.		Зачет
		Семестр III		
1	(1-3) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Дифференциальные уравнения I порядка»	1	Прием и защита задания
2	(4-6) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков и линейные неоднородные ДУ II порядка»	1	Прием и защита задания
3	(7-9) неделя	Подготовка к контрольной работе по теме «Дифференциальные уравнения», изучение базовой литературы.	2	Опрос на коллоквиуме
4	(10-12) неделя	Контрольная работа по теме: «Дифференциальные уравнения».	2	Проверка контрольной работы
5	(12-14) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Ряды»	1	Прием и защита задания
6	(14-16) неделя	Выполнение ИДЗ по теме «Двойной интеграл»	2	Прием и защита задания
7	(15-18) неделя	Подготовка к экзамену, изучение конспектов и базовой литературы	27	Экзамен
	Итого		180	

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены в разделе «Материалы для самостоятельной работы студентов»), РГЗ. Работа сдается преподавателю на проверку и выдается через 2-3 дня.

Критерии оценки: студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя. При наличии ошибок указывается сама ошибка и средства для ее устранения. После чего работа возвращается для доработки. Работа не зачитывается до тех пор, пока все задания не будут выполнены правильно. При затруднении выполнения ИДЗ студент выполняет работу на консультации с помощью преподавателя.

Для глубокого изучения теоретического материала и выработки элементов компетенции ОК-1 один раз в семестр проводится коллоквиум во внеурочное время. Список вопросов к коллоквиуму приводится в Приложении 2.

По данной дисциплине автором разработаны методические рекомендации:

1."Высшая математика"- программа, методические указания и контрольные задания для студентов 2 курса технических специальностей очной и заочной форм обучения. Владивосток, изд-во ДВФУ, 2013.-40 с.

2. Ксендзенко Л.С., Гузев М.А., Макаров В.В., Макарова Н.В.Математические методы строительной геотехнологии. Учебное пособие. Владивосток, ДВГТУ, 2003. 220 с

3.Ксендзенко Л.С. «Типовой расчет по теме «Ряды». Владивосток, ДВГТУ, 2003. 25 с

Приложение 2

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ГУМАНИТАРНЫХ НАУК

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Математический анализ»
Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность
Специализация «Профилактика и тушение природных пожаров»
Форма подготовки очная

Владивосток
2014

Паспорт
фонда оценочных средств
по дисциплине «Математический анализ»

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОК-1 способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу	знает	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности
	умеет	решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления
	владеет	методами анализа и синтеза.

№ п\п	Контролируемые разделы/темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства - наименование	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1.	Введение в математический анализ.	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (осенний семестр1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум	
2.	Предел и непрерывность функции действительной переменной.	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (осенний семестр1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум .	
3.	Дифференциальное исчисление функ- ции одной перемен-ной	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (осенний семестр1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания, РГЗ; 5. Коллоквиум 6.Контрольная работа.	
4.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (весенний семестр 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты;	

			4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум
5.	Неопределенный интеграл	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (весенний семестр 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум
6.	Определенный интеграл, несобственные интегралы	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (весенний семестр 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум
7.	Дифференциальные уравнения	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (3 семестр)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум 6.Контрольная работа
8.	Кратные интегралы	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (3 семестр)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Коллоквиум 6.Экзаменнационные вопросы
9.	Ряды	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1); (3 семестр)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5 Коллоквиум.

Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка	**Этапы формирования компетенции**	**Критерии**	**Показатели**	**Баллы**

компетенции					
Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК– 1);	знает (пороговый уровень)	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Определения и может привести формулировки основных теорем и формул математического анализа и	-способность самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по общеобразовательным и специальным дисциплинам при решении профессиональных задач	62 -74
	умеет (продвинутый)	решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Умение работать самостоятельно, решая задачи и разбирая конспект лекций, интернет-источники, умение вычислять пределы, производные, интегралы, решать д.у., применять ряды при решении профессиональных задач	- способность применять методы математического анализа при решении профессиональных задач; -способность логически верно выстраивать устную и письменную речь, аргументировать выводы и результаты исследования.	74-84
	владеет (высокий)	методами анализа и синтеза.	Владение методами математическогоанализа решения типовых задач, навыками применения математических знаний при изучении специальной литературы и решении профессиональных задач	-способность самостоятельного изучения литературы по математике и ее приложениям; -способность самостоятельно выбрать метод решения задачи и обосновать его; способность самостоятельно решить задачу и грамотно оформить решение задачи; -способность логически верно выстраивать устную и письменную речь, аргументировать выводы и результаты исследования.	85-100

Шкала измерения уровня сформированности компетенций

Итоговый балл	1-61	62-74	75-84	85-100

Оценка (пятибалльная шкала)	2 (незачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
Уровень сформированности компетенций	отсутствует	пороговый (базовый)	продвинутый	высокий (креативный)

Перечень используемых оценочных средств (ОС)

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Введение в математический анализ	ОК-1	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии, коллоквиум (вопросы 1-4)	Вопросы 1-3 из перечня вопросов для подготовки к экзамену
			решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Решение задач на практическом занятии. ИДЗ	
			методами анализа и синтеза.	Коллоквиум.	Экзамен
2	Предел и непрерывность функции	ОК-1	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии,	Вопросы 4-9 из перечня вопросов к экзамену
			решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	ИДЗ «Пределы. Исследование функции на непрерывность и разрыв»	
			методами анализа и синтеза.	Тест. Коллоквиум (вопросы 5-8)	Экзамен
3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	ОК-1	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 9-19,	Вопросы 10-31 из перечня вопросов к экзамену
			решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Контрольная работа. ИДЗ «Производные»,	

				РГЗ «Полное исследование функции и построение графика»	
			методами анализа и синтеза.		Экзамен
4	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	ОК-1	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 20-25	Вопросы 32-43 из перечня вопросов к зачету
			решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Решение задач на практическом занятии РГЗ «Экстремум функции 2-х переменных»	
			методами анализа и синтеза.		Зачет
5	Неопределенный интеграл	ОК-1	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 26	Вопросы 44-50 из перечня вопросов к зачету
			решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Решение задач на практическом занятии ИДЗ «Неопределенный интеграл»	
			методами анализа и синтеза.		Зачет
6	Определенный интеграл, несобственные интегралы	ОК-1	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 27-33	Вопросы 51-70 из перечня вопросов к зачету
			решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Решение задач на практическом занятии ИДЗ «Приложения определенного интеграла»	
			методами анализа и синтеза.		Зачет
7	Дифференциальные уравнения и системы	ОК-1	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 34-41	Вопросы 71-80 из перечня вопросов к экзамену
			решать задачи, требующие навыков	Решение задач на практическом	

			абстрактного мышления	занятии ИДЗ «Д.у. I и II порядков» Контрольная работа	
			методами анализа и синтеза.		Экзамен
8	Двойной интеграл	ОК-1	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 42 -45	Вопросы 81-82 из перечня вопросов к экзамену
			решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Решение задач на практическом занятии	
			методами анализа и синтеза.		Экзамен
9	Ряды	ОК-1	основные принципы, законы и категории философских знаний в их логической целостности и последовательности	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 48-56	Вопросы 83-91 из перечня вопросов к экзамену
			решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления	Решение задач на практическом занятии ИДЗ «Ряды»	
			методами анализа и синтеза.		Экзамен

Вопросы к коллоквиуму по дисциплине «Математический анализ»

Введение в анализ

1.Что называется функцией действительного аргумента? Как можно задать функцию? Привести примеры.

2. Что называется числовой последовательностью?

3. Какая числовая последовательность называется сходящейся? Что называется пределом последовательности? Дать геометрическую интерпретацию предела. Первый и второй замечательный предел.

4. Чему равен $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x),\ Q_m(x)-$многочлены степени n и m соответственно при $n=m$, $n>m$, $n<m$?

5. Дать определения предела функции в точке и на бесконечности.

6. Какие функции называются бесконечно малыми (*б.м.*) в точке $x=a$? Какие *б.м.* называются эквивалентными? В чем состоит принцип замены *б.м.*? Когда он применяется? Привести примеры эквивалентных *б.м.*

7. Какая функция называется непрерывной в точке $x = x_0$; на интервале $(a, в)$? Дать геометрическую иллюстрацию определения.

8. Что называется точкой разрыва функции? Как классифицируются точки разрыва? Какого рода разрывы имеют функции $y = \frac{\sin x}{x}$, $y = \frac{\cos x}{x}$, $y = \frac{|x|}{x}$, $y = \sin\frac{1}{x}$?

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

9. Что называется производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$? Каков геометрический и механический смысл производной? Чему равна производная постоянной?

10. Что называется касательной к кривой в заданной точке М? Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$.

11. Какая функция называется дифференцируемой в точке $x = x_0$? Что называется дифференциалом функции $y = f(x)$?

12. Каков геометрический смысл теорем Ферма, Ролля, Лагранжа?

13. Сформулировать правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

14. Какие функции называются возрастающими, убывающими, монотонными на интервале (a,b)? Сформулировать признак монотонности дифференцируемой на интервале (a,b) функции.

15. Какая точка называется точкой максимума (минимума) функции $y = f(x)$? Сформулировать необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Является ли это условие достаточным? Привести пример.

16. Сформулировать I достаточное условие экстремума непрерывной функции.

17. Какая кривая называется выпуклой вверх (вниз) на интервале (a,b)? Что называется точкой перегиба кривой?

18. Какое условие является достаточным для выпуклости вверх (вниз) графика функции $y=f(x)$ на интервале (a,b)?

19.Что называется асимптотой кривой? Какие асимптоты может иметь кривая? Сколько вертикальных, горизонтальных, наклонных асимптот может быть у графика функции $y=f(x)$? Привести пример функций имеющих а) одну, две, три вертикальные асимптоты, б) бесконечное множество вертикальных асимптот, в) одну вертикальную и одну горизонтальную асимптоту.

Функции нескольких переменных

20. Дать определения частных производных 1 порядка функции $z=f(x,y)$.

21. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных? Какова его связь с полным приращением?

22. Что называется производной функции по данному направлению в данной точке? Каков ее физический смысл?

23. Что называется градиентом функции? Куда указывает его направление?

24. Каково необходимое условие экстремума дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ в точке? Является ли оно достаточным?

25. Каково достаточное условие экстремума функции двух переменных?

Неопределенный и определенный интеграл функции одной переменной

26. Дать определение первообразной и неопределенного интеграла. Сформулировать свойства неопределенного интеграла. Методы интегрирования: по частям, замены. Интегрирование рациональных, иррациональных и тригонометрических выражений.

27. Что называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$? Каков геометрический смысл определенного интеграла на отрезке $[a,b]$ от неотрицательной функции?

28. Сформулировать теорему о среднем.

29. Какова связь между неопределенным и определенным интегралами от непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции? Написать формулу Ньютона-Лейбница.

30. Сформулировать определения несобственных интегралов 1-го рода:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx,\ \int_{a}^{+\infty} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\ .$$

31. Сформулировать признаки сравнения сходимости несобственных интегралов 1 рода. При каких $p>0$ сходится несобственный интеграл $\int_{+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$?

32. Сформулировать определения несобственных интегралов П рода от неограниченных функций (особая точка функции является концом отрезка интегрирования или является его внутренней точкой).

33. При каких значениях $p>0$ сходятся несобственные интегралы $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p},\ \int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$?

Дифференциальные уравнения

34. Что называется общим решением ДУ первого порядка?

35. Какие ДУ первого порядка называются ДУ с разделяющимися переменными? Однородными? Линейными? Бернулли? В полных дифференциалах?

36. Что называется общим решением ДУ n-го порядка?

37. Какой общий вид имеет линейные ДУ n-го порядка?

38. Что называется фундаментальной системой решений линейного однородного ДУ n-го порядка? Может ли нулевое решение входить в фундаментальную систему решений? Сколько фундаментальных систем решений имеет такое ДУ? Почему?

39. Какова структура общего решения линейного однородного ДУ n-го порядка?

40. Как зависит структура фундаментальной системы решений линейного однородного ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами от корней характеристического уравнения?

41. Какова структура общего решения линейного неоднородного ДУ n-го порядка.

Кратные интегралы

42. Что называется двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по плоской области D? Как с помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской области D?

43. Что называется тройным интегралом от функции $u = f(x, y, z)$ по пространственной области V? Как с помощью тройного интеграла вычислить объем области V?

44. Что называется криволинейным интегралом 1-го рода (по длине дуги)? Как с помощью криволинейного интеграла 1 рода вычислить длину дуги?

45. Как свести вычисление криволинейного интеграла 1 рода к вычислению определенного интеграла на отрезке, если а) плоская кривая задана явным уравнением, б) плоская или пространственная кривая задана параметрически ?

46. Что называется поверхностным интегралом 1-го рода (по площади поверхности)? Как с помощью поверхностного интеграла 1 рода вычислить площадь пространственной поверхности?

47. Как свести вычисление поверхностного интеграла 1-го рода к вычислению двойного интеграла?

Ряды

48.Что называется числовым рядом, его общим членом, частичной суммой?

49.Какой ряд называется сходящимся? Что называется суммой ряда?

50.Сформулировать необходимый признак сходимости ряда. Является ли он достаточным? Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n+2}$? Почему?

51.Сформулировать достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами(признаки сравнения, Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши).

52.Каково условие сходимости ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$, $p>0$?

53.Какой ряд называется знакопеременным? Знакочередующимся? Привести примеры.

54.Сформулировать признак Лейбница и следствие из него об оценке погрешности вычисления суммы ряда. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{2}}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

55.Какие ряды называются абсолютно и условно сходящимися? Привести пример ряда, сходящегося условно, и пример ряда, сходящегося абсолютно.

56.Дать определение ряда Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. Каково необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора?

Перечень типовых вопросов, предлагаемых на экзаменах (1,3 семестр) и зачете (2 семестр)

I семестр

1. Целые, рациональные, действительные числа. Числовые множества, операции над множествами.
2. Переменная величина. Функция: основные понятия (аргумент, значение функции, область определения, множество значений, нули функции, возрастание, убывание, четность, нечетность, периодичность). Обратная функция. Способы задания функции.
3. Числовая последовательность. Понятие и свойства предела последовательности. Ограниченность последовательности.
4. Предел функции: определение, свойства.

5. Первый и второй замечательные пределы.

6. Вычисление пределов: понятие неопределенности и методы раскрытия основных неопределенностей.

7. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

8. Бесконечно малые и бесконечно большие величины: классификация, свойства, эквивалентности.

9. Теорема о связи прела функции и бесконечно малой. Доказать.

10. Производная функции одной переменной: понятие, геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

11. Правила дифференцирования.

12. Производная сложной функции.

13. Таблица производных основных элементарных функций.

14. Связь дифференцируемости и непрерывности функции

15. Дифференцирование обратных, неявных и параметрически заданных функций.

16. Дифференциал: определение, свойства, геометрический смысл.

17. Теорема Ферма.

18. Теорема Ролля.

19. Теорема Коши.

20. Доказать теорему Лагранжа.

21. Правило Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$).

22. Правило Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

23. Монотонность функции на данном промежутке.

24. Экстремум функции.

25. Необходимое условие экстремума дифференцируемых функций

26. Достаточное условие экстремума.

27. Наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.

28. Выпуклость и вогнутость графика функции на заданном промежутке; точка перегиба.

29.Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.

30.Асимптоты графика функции.

31.Общий план исследования функции и построения графика.

II семестр

32.Функция нескольких переменных: понятие, область определения, множество значений, линии и поверхности уровня.

33.Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.

34.Частные и полное приращения функции двух переменных. Частные производные функции двух переменных.

35.Частные и полный дифференциалы. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

36.Производные сложных функций двух переменных. Полная производная.

37.Производные функции, заданной неявно.

38.Частные производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных.

39.Градиент функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

40.Производная по направлению.

41. Необходимое условие экстремума функции двух переменных. Пример.

42. Достаточное условие экстремума функции двух переменных. Пример.

43. Наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

44.Первообразная и неопределенный интеграл: понятие, свойства. Таблица неопределенных интегралов.

45. Интегрирование по частям.

46. Замена переменной.

47. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен.

48.Интегрирование дробно-рациональных функций.

49.Интегрирование простейших иррациональных выражений.

50.Интегрирование тригонометрических выражений.

51.Определенный интеграл: определение, свойства, геометрический смысл.

52.Теорема о среднем. Доказать.

53.Теорема Барроу. Доказать.

54.Вывод формулы Ньютона-Лейбница.

55.Замена переменной в определенном интеграле.

56.Интегрирование по частям в определенном интеграле. Вывод.

57.Вычисление площадей плоских фигур.

58.Вычисление длин дуг плоских кривых.

59.Вычисление объемов тел.

60.Физические приложения определенного интеграла.

70.Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода: определение, признаки сходимости.

<u>III семестр</u>

71.Дифференциальные уравнения 1-го порядка: понятие, общее и частные решения, задача Коши.

72.Условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.

73.Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения.

74.Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения Бернулли.

75.Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия.

76.Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка: основные типы и методы интегрирования.

77. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения. Метод вариации постоянных.

.78. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

79. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными

коэффициентами.

80. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений I порядка с постоянными коэффициентами

81.Определение двойного интеграла, свойства, применение.

82.Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах

83.Числовой ряд с положительными членами.

84. Необходимый признак сходимости. Доказать. Пример.

85. Достаточный признак расходимости рядов. Доказать. Пример.

86.Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши. Примеры.

87. Интегральный признак сходимости числовых рядов с положительными членами.

88.Знакопеременные и знакочередующиеся ряды: определения; признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда; условная и абсолютная сходимость.

89.Степенные ряды: определение; радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.

90. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций: e^x , $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$.

91.Применения степенных рядов в приближенных вычислениях

Контрольные и индивидуальные задания

Образцы индивидуальных заданий

Предел и непрерывность функции. Сравнение бесконечно малых величин

ИДЗ № 1. Пределы функций.

Пример задания.

1. Вычислить предел

1.1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$

1.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$

1.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2-x}}{x-1}$

1.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

1.5 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$

2. Сравнить бесконечно малые $\alpha=\sin^2 x$ и $\beta=1-\cos 2x$ при $x\to 0$

3. Найти точки разрыва функции и определить их род $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}e^{1/x}$

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

ИДЗ № 2.

Пример задания.

1.Найти производные данных функций

1.1 $y=\dfrac{x^3-\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}}$, $y'=?$

1.2 $y=x^2\cdot 2^{x-1}$, $y'=?$

1.3 $y=\sin^3 x$, $y''=?$

1.4 $y=\dfrac{\sin 2x-tgx}{\cos^2 x}$, $y'(\pi/4)=?$

2.Написать уравнение касательной к графику данной функции в точке $x=x_0$, $x^3-y^2+2y=0$, $x_0=-1$

3.Записать дифференциал данной функции и вычислить его в точке $x=x_0$ для $\Delta x=0{,}1$

$$y=x\sqrt{\sin(\pi x/2)},\ x_0=1$$

Интегральное исчисление.

ИДЗ № 3.

<u>Пример задания.</u>

1. Найти неопределенный интеграл

1.1 $\int \frac{x^3 - 2x\sqrt{x} + 1}{x} dx$

1.2 $\int xe^{-x^2} dx$

1.3 $\int x^2 \ln x dx$

1.4 $\int \cos^2 x dx$

1. 5 $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

2.1 $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$

2.2 $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \ln(\sin x) dx$

3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной данными линиями

   $x = 1;\ x = 4;\ xy = 4$

4. Вычислить несобственные интегралы

4.1 $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

4.2 $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

<u>Дифференциальные уравнения</u>

ИДЗ №4.

Пример задания.

1.Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

1.1 $x(y-1)dx-(x+1)ydy=0$

1.2 $y'-xy=x$

1.3 $y''-y'-2y=0$

2.Найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям

2.1 $y'-y=xy^2$, $y(0)=0$

2.2 $y''+4y=\sin x$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$

3.Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=2x-y \end{cases}$$

Ряды

ИДЗ №5.

Пример задания.

Вариант 1

1) Найти общий член ряда $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\ldots$;

2) исследовать ряды на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{7n^2+3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3}{(n+1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

3) исследовать на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n}$

4) найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n(2n-1)}x^n$;

5) вычислить приближенно $\int_0^{0,5} x^2\cos 2x dx$ с точностью $\varepsilon=0,001$.

<u>*Образцы билетов для экзамена(1,3 семестр) и зачета (2 семестр)*</u>

Билет 1 (Семестр 1)

Теоретические вопросы

1. Теорема о связи функции, предела и бесконечно малой. Доказать.
2. Сформулировать теорему Ролля. Выяснить геометрический смысл.

Задачи

3. Вычислить $y'(e)$ для функции $y = \dfrac{\ln^2 x}{x-1}$.
4. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$.
5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{3/x}$.

Билет 1(Семестр 2)

Теоретические вопросы

1. Доказать теорему Барроу.
2. Необходимые условия экстремума функции двух переменных

Задачи

1. Вычислить $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1;1{,}5)$ для функции $z(x,y) = \dfrac{1}{28} tg \dfrac{2y-3x}{5x+6y}$.
2. Вычислить неопределенный интеграл $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.
3. Исследовать интеграл на сходимость $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+3}$.

Билет 2 (Семестр 2)

Теоретические вопросы

1. Несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом. Определение Пример.
2. Достаточные условия экстремума функции двух переменных. Пример.

Задачи

1. Найти длину дуги всей линии, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2(1+\cos\varphi)$.

2. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/6} x\cos 3x dx$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x + 3$, касательной к ней в точке (3,6), и осями координат.

Билет 1 (Семестр 3)

Теоретические вопросы

1.Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Пример.

2. Метод решения линейных дифференциальных уравнений I порядка. Пример.

Задачи

1.Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} F(x,y)dy$.

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{2n+1}$

3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям $y''+4y = 2x+1$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Вариант контрольной работы (Семестр 3)

1.Определить тип д.у.: $xy' = y + 2x,\ \frac{y'}{x} = 3y + 3,\ \frac{y'}{x} = \frac{4}{x} - y$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $x^2 y^2 \cdot y' + 1 = y$, удовлетворяющее начальному условию: $y(0) = 1$.

3.Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x + \cos x$.

4. Решить задачу Коши: $y'' + 5y' - 6y = \cos 2x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Проведение экзамена

На экзамене разрешено использовать ручку с чернилами синего, фиолетового или черного цвета, листы бумаги формата А4 или А5. Использование мобильных средств связи, справочной литературы и других пособий на экзамене не разрешается.

Студенты по одному заходят в аудиторию, передают зачетную книжку экзаменатору и берут экзаменационный билет. Студент занимает место в аудитории, указанное экзаменатором.

По завершении времени, отведенного на подготовку, студенты отвечают экзаменатору на вопросы экзаменационного билета.

Студент в ходе ответа на вопросы экзаменационного билета должен полностью раскрыть содержание поставленных теоретических вопросов, доказать требуемое математическое утверждение или вывести формулу, верно и обоснованно решить практические задания.

После ответа студента по билету преподаватель вправе задать дополнительные теоретические вопросы и дать для решения практические задачи по программе дисциплины.

На основе полученных ответов на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы по программе дисциплины, преподаватель ставит оценку за экзамен в соответствии с критериями оценивания.

Критерии оценивания экзамена

Оценка «3» ставится студенту, если он решил правильно минимум 60 % практических заданий из экзаменационного билета;

Оценка «4» ставится студенту, если он ответил правильно на теоретические вопросы экзаменационного билета (без доказательства математических утверждений) и решил правильно минимум 75 % практических заданий из экзаменационного билета;

Оценка «5» ставится студенту, если он правильно ответил на все теоретические вопросы билета с доказательством сформулированного в билете утверждения, решил правильно минимум 90 % практических заданий из экзаменационного билета.

Критерии выставления оценки в ходе промежуточной аттестации

Баллы	Оценка экзамена	Требования к сформированным компетенциям
100-85	***«отлично»***	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, последовательно, четко и логически стройно его излагает, свободно справляется с задачами, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.
75-84	***«хорошо»***	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.
61-74	***«удовлетворительно»***	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, испытывает затруднения при выполнении практических работ.
60 и менее	***«неудовлетворительно»***	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

Повторная промежуточная аттестация

Студент, имеющий академическую задолженность по дисциплине за учебный семестр вправе ликвидировать ее в ходе повторной промежуточной аттестации, но не более двух раз.

Повторная промежуточная аттестация проводится в письменной форме в виде экзамена. Список вопросов на экзамен и структура экзаменационного билета остаются теми же, как и при проведении промежуточной аттестации в период экзаменационной сессии.

Проведение экзамена

На экзамене разрешено использовать ручку с чернилами синего, фиолетового или черного цвета и листы бумаги формата А4 или А5. Использование мобильных средств связи, справочной литературы и других пособий на экзамене не разрешается.

Экзамен при повторной промежуточной аттестации сдают все студенты одновременно.

Студенты по одному заходят в аудиторию, передают зачетную книжку экзаменатору. Студент занимает место в аудитории, указанное экзаменатором.

Студент в ходе ответа на вопросы экзаменационного билета должен полностью раскрыть содержание поставленных теоретических вопросов, доказать требуемое математическое утверждение или вывести формулу, верно и обоснованно решить практические задания.

По завершении времени, отведенного на ответ, студенты сдают листы с решенными практическими заданиями и ответами на теоретические вопросы.

Студенты удаляются из аудитории, а экзаменатор проверяет сданные работы и выставляет оценку за экзамен в соответствии с критериями оценивания, проставляя ее на листе с ответами, в зачетную книжку и экзаменационную ведомость.

После чего результаты экзамена оглашаются студентам.

Критерии выставления оценки за экзамен

(в ходе повторной промежуточной аттестации)

Оценка экзамена	Требования к сформированным компетенциям
«отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, последовательно, четко и логически стройно его излагает, свободно справляется с задачами, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач. **Оценка «отлично»** ставится студенту, если он правильно ответил на все теоретические вопросы билета с

	доказательством сформулированного в билете утверждения, решил правильно минимум 90 % практических заданий из экзаменационного билета.
«хорошо»	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения. **Оценка «хорошо»** ставится студенту, если он ответил правильно на теоретические вопросы экзаменационного билета (без доказательства математических утверждений) и решил правильно минимум 75 % практических заданий из экзаменационного билета.
«удовлетворительно»	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, испытывает затруднения при выполнении практических работ. **Оценка «удовлетворительно»** ставится студенту, если он решил правильно минимум 60 % практических заданий из экзаменационного билета
«неудовлетворительно»	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине. **Оценка «неудовлетворительно»** ставится студенту, если он решил правильно менее 60% практических заданий экзаменационного билета.

Приложение 3

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине «Математический анализ»
Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность
Специализация «Профилактика и тушение природных пожаров»
Форма подготовки очная

Владивосток
2014

Семестр I. Методические указания по теме « Предел функции».

Вопросы для самопроверки

1. Функция. Область определения функции.
2. Что называется последовательностью, пределом числовой последовательности?
3. Сформулируйте определение предела функции.
4. Назовите основные свойства пределов функции.
5. Какая функция называется бесконечно малой? Бесконечно большой? Связь между ними.
6. Типы неопределённости и правила их раскрытия.
7. Формулы первого и второго замечательных пределов.
8. Дайте определение односторонних пределов функции в точке.
9. Какая функция называется непрерывной в точке, на интервале?
10. Какая точка называется точкой разрыва функции?

Примеры решения задач

Задача. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Вынося за скобку и в числителе и в знаменателе x в наибольшей степени, получим

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\dfrac{7}{x^3}-2\right)}{x^4\left(4+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x^3}-2}{4+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\frac{0-2}{4+0+0}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2},$$

так как $\dfrac{7}{x^3}$, $\dfrac{3}{x^2}$ и $\dfrac{1}{x^4}$ – величины бесконечно малые при $x\to\infty$, т.е. стремятся к нулю.

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители: числитель – по формуле сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, а знаменатель – по формуле разложения квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Получим

$$A=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x+4)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x+4}.$$

После сокращения дроби, следует подставить предельное значение $x=-3$ в сокращенную дробь. Получим $A=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-3-3}{-3+4}=\dfrac{-6}{1}=-6$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела на сопряженное выражение, приводящее к разности квадратов:

$$A=\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x-5}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-2x-5-x^2}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x-5}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x-5}{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x-5}{|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}}+x}.$$

При $x\to +\infty$ $|x|=x$ по определению модуля; поэтому

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-5}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{-2-0}{\sqrt{1-0-0}+1}=-1,$$

так как при $x\to+\infty$ $\frac{5}{x}$, $\frac{2}{x}$ и $\frac{5}{x^2}$ – бесконечно малые величины.

d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Сделаем преобразования, приводящие ко второму замечательному пределу $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$:

$$A=\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}.$$

Выражение в квадратных скобках $x\to 0$ представляет собой замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]=e$, следовательно, $A=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$.

Найдем предел показателя степени, используя первый замечательный предел $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $A=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Выделим целую часть дроби

$$\frac{2x^2-3}{2x^2+1}=\frac{2x^2+1-4}{2x^2+1}=\frac{2x^2+1}{2x^2+1}+\frac{-4}{2x^2+1}=1+\frac{-4}{2x^2+1}.$$

Здесь $a(x)=-\frac{4}{2x^2+1}$ является бесконечно малой величиной при $x\to\infty$.

Умножим показатель степени на $\left(a(x)\cdot\frac{1}{a(x)}\right)$, это действие не нарушает знака равенства:

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}\cdot\frac{-4}{2x^2+1}\cdot\left(-3x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}}\right)^{\frac{12x^2}{2x^2+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{12x^2}{2x^2+1}},$$

ибо $\lim\limits_{a(x)\to 0}(1+a(x))^{\frac{1}{a(x)}}=e$. Найдем $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}$. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, предел 1-го типа. Вынесем за скобки x^2, так как вторая степень наибольшая:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{12}{2}=6,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$. Таким образом, искомый предел равен $e^a=e^6$.

Методические указания по теме «Производная функции»

Вопросы для самопроверки.

1. Дать определение производной.
2. Напишите основные правила дифференцирования.
3. Формулы дифференцирования основных элементарных функций.
4. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
5. Логарифмическое дифференцирование.

Таблица производных основных элементарных функций

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования.

$(u+v)' = u' + v'$	$(cu)' = c \cdot u'$
$(u \cdot v)' = uv' + vu'$	$\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\dfrac{c}{u}\right)' = -\dfrac{c}{u^2}u'$

Примеры решения задач

Задача. Найти производные заданных функций:

а) $y = 2x^2 - 5 \cdot 2^x + 4x - 7\log_2 x - \ln 2$.

Решение. Используя правила дифференцирования, получим:

$$y' = (2x^5)' - (5 \cdot 2^x)' + (4x)' - (7\log_2 x)' - (\ln 2)' =$$
$$= 2(x^5)' - 5 \cdot (2^x)' + 4x' - 7(\log_2 x)' - 0 =$$
$$= 10x^4 - 5 \cdot 2^x \ln 2 + 4 - \frac{7}{x \ln 2}.$$

b) $y=(1+x^2)\cdot arctgx$.

Решение. Используя правила дифференцирования, получим

$$y'=(1+x^2)'\cdot arctgx+(1+x^2)\cdot(arctgx)'=$$
$$=2x\cdot arctgx+(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}=2x\cdot arctgx+1.$$

c) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

Решение. Используя правила дифференцирования, получим:

$$y'=\frac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)'}{(\sin x-\cos x)^2}=$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=$$
$$=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}.$$

d) $y=\log_3(2x^3+1)$

Решение. По правилам дифференцирования сложной функции, получим:

$$y'=(\log_3(2x^3+1))'=\frac{1}{(2x^3+1)\cdot\ln 3}(2x^3+1)'=\frac{6x^2}{(2x^3+1)\cdot\ln 3}.$$

e) $y=x^{x^3}$.

Решение. Имеем показательно-степенную функцию. Используя метод логарифмического дифференцирования, получим:

$$\frac{y'}{y}=(\ln y)'=(\ln x^{x^3})'=(x^3\cdot\ln x)=3x^2\cdot\ln x+\frac{x^3}{x}=x^2(3\ln x+1).$$

Отсюда имеем:

$$y'=y\cdot(\ln y)'=y\cdot x^2(3\ln x+1)=x^{x^3}\cdot x^2(3\ln x+1)=x^{x^3+2}\cdot(3\ln x+1).$$

f) $y=\dfrac{(3x+2)^4\sqrt[3]{5x-1}}{(1-2x)^3\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Здесь заданную функцию также целесообразно предварительно прологарифмировать:

$$\ln y = 4\ln(3x+2) + \frac{1}{3}\ln(5x-1) - 3\ln(1-2x) - \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

Найдем производную $(\ln y)' = \frac{12}{3x+2} + \frac{5}{3\cdot(5x-1)} + \frac{6}{1-2x} + \frac{x}{1-x^2}$.

Тогда

$$y' = y\cdot(\ln y)' =$$

$$= \frac{(3x+2)^4\sqrt[3]{5x-1}}{(1-2x)^3\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(\frac{12}{3x+2} + \frac{5}{3\cdot(5x-1)} + \frac{6}{1-2x} + \frac{x}{1-x^2}\right).$$

«Приложения производной для исследования функций»

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется четной, нечетной и функцией общего вида?
2. Какая функция называется возрастающей, убывающей, монотонной?
3. Каковы признаки возрастания и убывания функции.
4. Сформулируйте необходимые и достаточные признаки экстремума функции.
5. Назовите I и II достаточный признак возрастания, убывания функции.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте правило нахождения экстремума функции, интервалов возрастания, убывания.
8. Какая функция называется выпуклой?
9. Как найти интервалы вогнутости и выпуклости графика?
10. Сформулируйте достаточный признак существования точки перегиба.
11. Что называется асимптотой кривой? Какие виды асимптот Вы знаете?

Схема исследования функции и построение графика:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность – нечетность;

3) найти вертикальные асимптоты;
4) исследовать поведение функции в бесконечности; найти горизонтальные и наклонные асимптоты;
5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;
6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;
7) найти точки пересечения графика функции с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график функции.

Исследование функции проводится одновременно с построением графиков.

Примеры решения задач

Задача. Исследовать функцию $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. Область определения: $(-\infty;1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Точки $x=-1$ и $x=1$- точки разрыва функции.
2. $f(-x)=-f(x)$, т.е. функция нечетная; ее график симметричен относительно начала координат и достаточно провести исследование функции на интервале $[0;+\infty)$.
3. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2x}{1-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{2x}{1-x^2}=-\infty$.

Прямые $x=1$ и $x=-1$ (по симметрии) – вертикальные асимптоты.

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{1-x^2}=0$. Прямая $y=0$ (ось абсцисс) - двусторонняя горизонтальная асимптота.
5. $y'=\dfrac{2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}>0$ при всех допустимых x. Экстремумов нет, функция возрастает на интервалах $(-\infty;1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$
6. $y''=\dfrac{4x(x^2+3)}{\left(1-x^2\right)^3}$, $y''=0$ при $x=0$.

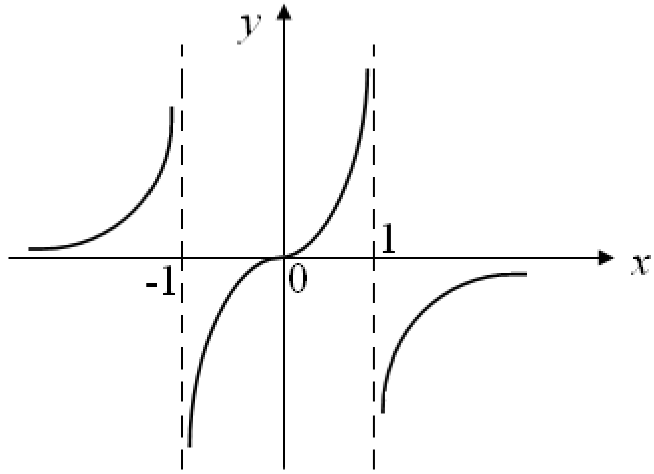
Знаки второй производной исследуем в таблице:

x	$(-\infty;1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
y''	$+$	$-$	$+$	$-$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Хотя $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через три точки $x=-1, x=0, x=1$, но график функции имеет только одну точку перегиба $x=0$, ибо в двух других точках $x=-1$, $x=1$ функция не определена.

7. Точка пересечения с осями – начало координат $(0,0)$.

Построим график функции $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$:



«Неопределенный интеграл»

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
4. В чем сущность метода непосредственного интегрирования?
5. Дифференциал функции. В чем сущность метода замены переменной?
6. В чем сущность метода интегрирования по частям?

7. Поясните, как вычислить интеграл от функций, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен?
8. Как вычислить интеграл от дробно-рациональной функции?
9. Как вычислить интеграл от тригонометрических функций?

Таблица интегралов

$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C$
$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
$\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc\sin \frac{x}{a} + C$
$\int ctgx dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2} \right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$

Примеры решения задач

Метод непосредственного интегрирования

Задача. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{9-4x^2}$.

Решение. Вынося постоянный множитель $\left(-\frac{1}{4}\right)$ за знак интеграла, приходим к табличному интегралу $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$ при $a = \frac{3}{2} \neq 0$:

$$\int \frac{dx}{9-4x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3/2}{x+3/2}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x+3}{2x-3}\right| + C.$$

2. $\int \frac{\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)^2}{\sqrt[3]{x^4}}dx$.

Решение:

$$\int \frac{\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)^2}{\sqrt[3]{x^4}}dx = \int \frac{4x^{2/3}+4x^{1/3}+1}{x^{4/3}}dx = \int\left(4x^{-2/3}+\frac{4}{x}+x^{-4/3}\right)dx =$$

$$= 4\int x^{-2/3}dx + 4\int\frac{dx}{x} + \int x^{-4/3}dx = 12x^{1/3} + 4\ln|x| - 3x^{-1/3} + C$$

3. $\int \cos^2(x/2)dx$.

Решение:

$$\int \cos^2(x/2)dx = \int \frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

Метод замены переменной

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Решение. Заметим, что $4x^2+1=(2x)^2+1$, а $dx=\frac{1}{2}d(2x)$. Тогда, используя формулу $\int \frac{d(x)}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$ при $a=1$, находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right| + C.$$

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-4x^2-4x}}$.

Решение. Выделим полный квадрат в подкоренном выражении $3-4x^2-4x=4-(2x+1)^2$. Положим $2x+1=t$. Тогда $x=\frac{1}{2}(t-1)$ и $dx=\frac{1}{2}dt$.

Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-4x^2-4x}} = \int \frac{1}{4}\frac{(t-1)dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{4}\int\frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}.$$

Второй из двух полученных интегралов – табличный; для нахождения первого заметим, что $tdt = -\frac{1}{2}d(4-t^2)$. Тогда

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-4x^2-4x}} = -\frac{1}{8}\int (4-t^2)^{-1/2} d(4-t^2) - \frac{1}{4}\arcsin\left(t/2\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}(4-t^2)^{1/2} - \frac{1}{4}\arcsin\left(t/2\right) + C =$$
$$= -\frac{1}{4}\sqrt{3-4x^2-4x} - \frac{1}{4}\arcsin(x+1/2) + C.$$

Метод интегрирования по частям

6. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Положим $u = \ln x$ и $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Тогда $du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$ и $v = \int dv = \int x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}$. Вообще говоря, по определению неопределенного интеграла полученное выражение для v должно содержать постоянную интегрирования C. Однако при применении формулы $\int udv = uv - \int vdu$ эта постоянная из окончательного выражения выпадает. Поэтому в выражении для v удобно полагать $C = 0$. Окончательно, имеем:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2x^{1/2}\ln x - \int 2x^{1/2}\frac{1}{x}dx =$$
$$= 2x^{1/2}\ln x - 2\int x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}\ln x - 4x^{1/2} + C.$$

7. $\int x^2 e^{-x+1}dx$.

Решение. Положим $u = x^2$, $dv = e^{-x+1}dx$. Тогда $du = 2xdx$ и

$$v = \int dv = \int e^{-x+1}dx = -\int e^{-x+1}d(-x+1) = -e^{-x+1}.$$

Применяя формулу $\int udv = uv - \int vdu$ интегрирования по частям, получаем:

$$\int x^2 e^{-x+1}dx = -x^2 e^{-x+1} + 2\int e^{-x+1}xdx.$$

К полученному интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям, полагая $u = x$, $dv = e^{-x+1}dx$. Тогда $du = dx$, $v = -e^{-x+1}$ и

$$\int x^2e^{-x+1}dx = -x^2e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} + 2\int e^{-x+1}dx =$$
$$-x^2e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} - 2e^{-x+1} + C =$$
$$= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x+1} + C.$$

8. $\int x\arcsin x dx$.

Решение. Положим $u = \arcsin x$, $dv = xdx$. Тогда $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$.

Применяя $\int udv = uv - \int vdu$, получаем

$$\int x\arcsin x dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Второй из полученных интегралов – табличный, первый найдем подстановкой $x = \sin t$ (см. ниже интегрирование иррациональностей):

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 tdt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt =$$
$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

Окончательно, получаем

$$\int x\arcsin x dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C.$$

9. $\int e^{2x}\cos 3x dx$.

Решение. Пусть $u = \cos 3x$, $dv = e^{2x}dx$. Тогда $du = -3\sin 3x dx$, $v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$. Обозначая искомый интеграл через J, получаем

$$J = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x dx.$$

К полученному интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям, где $u=\sin 3x$, $dv=e^{2x}dx$:

$$J=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x dx\right),$$

или

$$J=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x-\frac{9}{4}J+C_1.$$

Выражая из последнего равенства искомый интеграл J, окончательно имеем

$$J=\frac{1}{13}(2\cos 3x+3\sin 3x)e^{2x}+C, \text{ где } C=\frac{4}{13}C_1.$$

Интегрирование рациональностей

Метод неопределенных коэффициентов

10. $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x+1)}$.

Решение. Записывая подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, имеем:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)},$$

или после приведения выражения правой части к общему знаменателю:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A_1(x^2-1)+A_2(x+1)+A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Полученное равенство выполняется тождественно (т.е. при любых значениях переменой x), только если

$$x^2=A_1(x^2-1)+A_2(x+1)+A_3(x-1)^2.$$

Полагая, что здесь $x=1$, получаем $1=2A_2$ и, следовательно, $A_2=1/2$. При $x=-1$, имеем $1=4A_3$ и поэтому $A_3=1/4$. Положим $x=0$. Тогда $0=-A_1+A_2+A_3$. Подставляя в последнее равенство найденные значения A_2 и A_3, получаем $A_1=3/4$.

Используя найденное представление для подынтегральной функции, имеем

$$\int \frac{x^2dx}{(x-1)^2(x+1)} = \int \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln|x+1| + C.$$

Интегрирование иррациональностей

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, где R – рациональная функция, находятся с помощью подстановок $x = a\sin t$, $x = a \cdot tgt$, $x = \dfrac{a}{\cos t}$ соответственно.

11. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

Решение. Положим $x = \dfrac{1}{\cos t}$, где $t \in [0, \pi]$ и $t \neq \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $dx = \dfrac{\sin t dt}{\cos^2 t}$ и

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \int \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} \frac{\cos t \sin t}{\cos^2 t} dt = \int \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \frac{\sin t}{\cos t} dt =$$

$$= \int |tgt| tgt dt .$$

При сделанных предположениях $\sin t > 0$. Если $x > 0$, т. е. $\cos t > 0$, то $|tgt| = tgt$ и

$$\int tg^2 t dt = \int \left((1 + tg^2 t) - 1\right) dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt = tgt - t + C .$$

Так как $\cos t = \dfrac{1}{x}$, то $t = \arccos \dfrac{1}{x}$ и

$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\sqrt{\cos^2 t}} = \sqrt{x^2 - 1} .$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x} + C.$$

Если $x<0$, т.е. $\cos t<0$, то $|tgt| = -tgt$, и аналогично получим, что

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = -\sqrt{x^2-1} + \arccos\frac{1}{x} + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция, допускают рационализацию с помощью универсальной подстановки $t = tg\frac{x}{2}$, где $-\pi < x < \pi$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

12. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

Решение. Полагая $t = tg(x/2)$, получаем $\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}\right)} =$

$$= 2\int \frac{dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg(x/2)+2}{tg(x/2)-2}\right| + C.$$

Семестр II.

Методические указания по теме «Определенный интеграл»

Вопросы для самопроверки

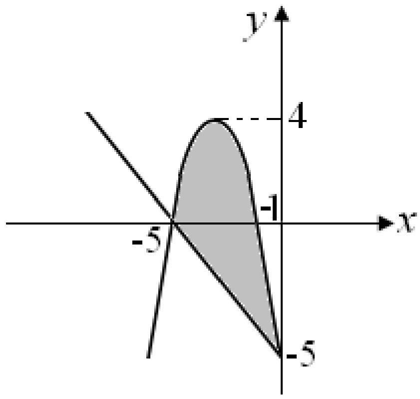
1. Что называется определенным интегралом?
2. Какими свойствами обладает определенный интеграл?
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Формула для вычисления площади фигуры.
5. Формула для вычисления объема тел вращения.

Примеры решения задач

Задача. а) Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2-6x-5, \; y=-x-5.$$

Решение. Искомая площадь S это площадь заштрихованной части фигуры, образованной прямой $y=-x-5$, проходящей через точки $(-5,0)$, $(0,-5)$ и параболой



$$y=-x^2-6x-5$$

с вершиной в точке $(-3,4)$, пересекающей ось Ox в точках

$$x_1=-5 \text{ и } x_2=-1:$$

$$y'=-2x-6=0, \text{ откуда } x=-3, \text{ а } y(-3)=4;$$

$$-x^2-6x-5=0, \text{ откуда } x_1=-5 \text{ и } x_2=-1.$$

Площадь S фигуры вычислим, используя формулу $S=\int\limits_a^b (f(x)-\varphi(x))\,dx$,

в которой $y=f(x)$ – уравнение параболы

$$y=-x^2-6x-5, \text{ а } y=\varphi(x) \text{ – уравнение прямой } y=-x-5.$$

Пределы интегрирования a и b найдем из условия $f(x)=\varphi(x)$:

$$-x^2-6x-5=-x-5,$$

$$x^2+5x=0,$$

$$x(x+5)=0,$$

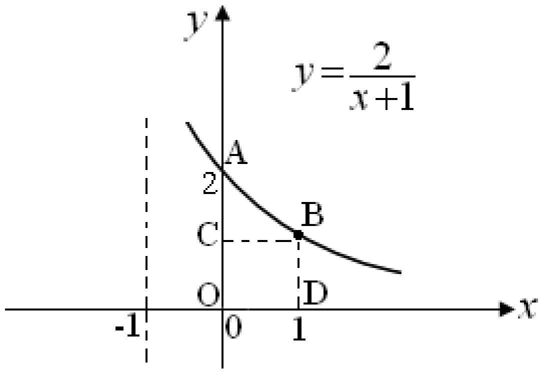
откуда $a=-5$ и $b=0$ – соответственно нижний и верхний пределы интегрирования. Таким образом,

$$S=\int\limits_{-5}^{0}(-x^2-5x)\,dx=\left(\frac{-x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_{-5}^{0}=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}=\frac{125}{6}.$$

2) Найти объемы тел, образованных вращением вокруг плоской фигуры вокруг осей координат, ограниченной линиями $y = \dfrac{2}{x+1}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Решение. Объем V_x, образованный вращением вокруг оси Ox, находим непосредственно из формулы $V_x = \pi \int\limits_a^b y^2(x)\, dx$:

$$V_x = \pi \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{x+1} \right)^2 dx = 4\pi \int\limits_0^1 (x+1)^{-2} d(x+1) = -4\pi (x+1)^{-1} \Big|_0^1 = 2\pi .$$



Объем V_y равен сумме двух объемов: $V_y = V_{ABC} + V_{BDOC}$, где V_{ABC}, V_{BDOC} – объемы тел, полученных при вращении вокруг оси Oy соответственно криволинейного треугольника ABC и квадрата $BDOC$. 2

Применяя формулу $V_y = \pi \int\limits_c^d x^2(y)\, dy$, получаем

$$V_{ABC} = \pi \int\limits_1^2 \left(\frac{2-y}{y} \right)^2 dy = \pi \int\limits_1^2 \left(4y^{-2} - \frac{4}{y} + 1 \right) dy = \pi \left(-4y^{-1} - 4\ln|y| + y \right) \Big|_1^2 = \pi (3 - 4\ln 2).$$

$V_{BDOC} = \pi \int\limits_0^1 1^2 dy = \pi y \Big|_0^1 = \pi$. Тогда общий объем равен

$$V_y = V_{ABC} + V_{BDOC} = \pi(3 - 4\ln 2) + \pi = 4\pi(1 - \ln 2).$$

Методические указания по теме «Дифференциальные уравнения»

Покажем на примерах решение дифференциальных уравнений. Прежде чем решить уравнение, необходимо определить его тип. Уравнение первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dx+M_2(x)\cdot N_2(y)dy=0.$$

Разделив обе части уравнения на N_1 (y) · M_2 (x), получаем уравнение с разделёнными переменными и интегрируем его.

Пример I. Найти общее решение уравнения

$$(xy+x)dx-(x^2y+y)dy=0\Rightarrow x(y+1)dx-y(x^2+1)dy=0$$

В результате разделения переменных получаем $\frac{xdx}{x^2+1}-\frac{ydy}{y+1}=0$.

Интегрируем

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}-\int\frac{(y+1)-1}{y+1}dy=0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right(-y+\ln\left(y+1\right(=\ln C\Rightarrow$$

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}\cdot|y+1|\right)=\ln\left|C\cdot e^y\right|, \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2+1}\cdot\left(y+1\right)=C\cdot e^y$$ – общий интеграл уравнения.

Уравнение $y'=f(x,y)$ или $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется однородным, если при замене x на λx и y на λy оно не изменится.

Пример 2. Решить уравнение $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$.

Переменные не разделяются. Заменим x на λx и y на λy. Получим

$\lambda^3y^2dx+\lambda^3(x^2-xy)dy=0$, сократим на λ^3: $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$.

Следовательно, данное уравнение однородное первого порядка. Решим его с помощью подстановки $y=u\cdot x$, где $u(x)$ – новая функция, относительно которой получаем уравнение с разделяющимися переменными.

Последнее уравнение запишем в виде $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$ и делаем подстановку

$y=u\cdot x,\ y'=u'x+u$, отсюда получаем $x\frac{du}{dx}+u=\frac{u^2}{u-1}$.

Разделяя переменные, находим $\frac{dx}{x}+\frac{(1-u)}{u}du=0$. Интегрируя это уравнение, находим его общий интеграл $u\cdot x=C\cdot e^{u}$.

Приняв во внимание, что $u=\frac{y}{x}$, из последней формулы получаем общий интеграл уравнения $y=C\cdot e^{y/x}$.

Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Его решают с помощью подстановки $y=u\cdot v$, где u и $v-$ неизвестные функции.

Пример 3. Решить уравнение $y'\cdot ctgx-y=2\cos^2 x\cdot ctgx$.

Решение.

Из данного уравнения получаем $y'-y\cdot tgx=2\cos^2 x$

Пусть $y=u\cdot v$ тогда $y'=u'v+uv'$. При подстановке в последнее уравнение находим $u'v+uv'-u\cdot v\cdot tgx=2\cos^2 x,$ или

$$u'v+u(v'-v\cdot tgx)=2\cos^2 x. \qquad (*)$$

Для определения v имеем уравнение $v'-vtgx=0\Rightarrow\frac{dv}{v}=tgxdx$.

Интегрируя последнее уравнение, получаем $v=\frac{1}{\cos x}$ При этом уравнение $(*)$ дает

$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{du}{dx}=2\cos^2 x$ или $du=2\cos^3 dx$, откуда

$u=2\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)+C$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения будет:

$y=u\cdot v$, т.е. $y=\frac{1}{\cos x}\left(2\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C\right)$.

Пример 4. Решить уравнение $y''=-\frac{(y')^2}{2y}$

Данное уравнение 2-го порядка не содержит независимой переменной и относится к типу уравнений $f(y,y',y'')=0$.

Пусть $y'=p$, тогда $y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$. Из уравнения получаем $\frac{dp}{dy}\cdot p=-\frac{p^2}{2y}$, т.е. $\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{2y}$.

В результате интегрирования находим: $\ln p=-\frac{1}{2}\ln y+\ln C_1$, т.е. $p=\frac{C_1}{\sqrt{y}}$,

или $\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{\sqrt{y}}$, т.е. $\frac{1}{C_1}\sqrt{y}dy=dx$ Отсюда находим

$\frac{2}{3C_1}y^{3/2}=x+C_2$ – общий интеграл данного уравнения.

Пример 5. Найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y''-y'=e^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=0,\ y'(0)=2$.

Решение.

Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y''-y'=0$$

Характеристическое уравнение: $K^2-K=0$ имеет действительные различные корни

$k_1=0,\ k_2=1$. Общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $y_{O.O.}=C_1+C_2e^x$.

Частное решение $\overline{y}$ данного линейного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $\overline{y}=Axe^x$, так как коэффициент при x показательной функции e^x (равный единице) совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Подставим $\overline{y}$ в неоднородное уравнение, вычислив прежде $\overline{y}' = Ae^x(1+x),\ \overline{y}'' = Ae^x(2+x)$.

Имеем $Ae^x(2+x) - Ae^x(1+x) = e^x$, отсюда $Ae^x = e^x$, или $A = 1$. Следовательно, частное решение имеет вид $\overline{y} = x \cdot e^x$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y_{O.H.} = y_{O.O.} + \overline{y}$.

Поэтому $y_{O.H.} = C_1 + C_2 \cdot e^x + x \cdot e^x$. Используя начальные условия, определяем C_1 и C_2:

$0 = C_1 + C_2 e^0 + 0 \cdot e^0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$.

$y'_{O.H.} = 0 + C_2 e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$, или $2 = C_2 e^0 + e^0 + 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2 + 1 = 2,\ C_2 = 1$, т.к. $C_1 = -C_2$, то $C_1 = -1$.

Следовательно, искомое частное решение будет $y = -1 + e^x + xe^x$.

Пример 6. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Будем искать решение в виде $x = \alpha e^{\lambda t},\quad y = \beta e^{\lambda t}$.

Подставляя эти выражения в данную систему дифференциальных уравнений, после сокращения на $e^{\lambda t}$, имеем

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)\alpha - \beta &= 0 \\ -2\alpha - \lambda\beta &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (*)$$

Ненулевое решение системы алгебраических уравнений $(*)$ существует только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (**)$$

Раскрывая определитель, получаем характеристическое уравнение

$\lambda^2-\lambda-2=0$, (***), корни которого $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=-1$. При $\lambda_1=2$ из второго равенства системы (*) находим $\beta=-\alpha$; при $\lambda_2=-1$ находим $\beta=2\alpha$. Таким образом, получаем два решения:

$x_1=C_1e^{2t}$, $y_1=-C_1e^{2t}$ и $x_2=C_2e^{-t}$, $y_2=2C_2e^{-t}$. Их сумма также является решением данной системы. Окончательно имеем

$$x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t},\ \ y(t)=-C_1e^{2t}+2C_2e^{-t}.$$

Задача.

Материальная точка массы 1г отталкивается вдоль прямой от некоторого центра с силой, пропорциональной ее расстоянию от этого центра (коэффициент пропорциональности равен 4). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности равен 3). В начале движения расстояние от центра равно 1 см, а скорость – нулю. Найти закон движения.

Решение.

По второму закону Ньютона равнодействующая сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на ускорение движения $F=ma,\quad m=1г$, $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$, где x – расстояние точки от центра.

Получаем уравнение $\dfrac{d^2x}{dt^2}=4x-3\dfrac{dx}{dt}$, с начальными

условиями $x\Big|_{t=0}=1,\quad x'\Big|_{t=0}=0$.

Имеем линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами $x''+3x'-4x=0$. Составляем характеристическое уравнение $k^2+3k-4=0$, $k_1=-4$, $k_2=1$. Отсюда $x(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{t}$.

Для определения произвольных постоянных находим $x'(t)=-4C_1e^{-4t}+C_2e^{t}$ и, используя начальное условие, получаем систему

$\begin{cases} C_1 + C_2 \quad = 1, \\ -4C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$. Решая, находим $C_1 = \dfrac{1}{5}$ и $C_2 = \dfrac{4}{5}$. Тогда

$x(t) = \dfrac{1}{5}(4e^t + e^{-4t})$.

Методические указания по теме «Ряды»

1) ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Среди достаточных признаков сходимости рядов с положительными членами наиболее эффективным является интегральный признак Коши. Поэтому, если другие признаки не позволяют решить вопрос о сходимости или расходимости числового ряда с положительными членами, то следует обратиться к интегральному признаку Коши.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$

а) с помощью признака Даламбера; б) используя интегральный признак.

Решение: по условию $u_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{(n^2+1)+1}$

а) найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+2)(n^2+1)}{((n+1)^2+1)\cdot 2n} = 1$.

т.е. признак Даламбера не позволяет сделать заключение о сходимости или расходимости ряда.

б) члены данного ряда положительные и убывают, за функцию $f(x)$, о которой идет речь в интегральном признаке (см. п.6), возьмем функцию $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ при $x \geq 1$. Эта функция непрерывна и убывает, причем $f(n) = \dfrac{2n}{n^2+1}$. Так как

$\int\limits_1^{\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^{n} \dfrac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left|x^2+1\right|\Big|_1^n = \infty$, то несобственный интеграл расходится, следовательно, данный ряд расходится.

Данный пример можно решить, применяя теорему сравнения рядов.

Теорема. Даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Поведение ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ известно, т.е. известно сходится он или расходится. Требуется определить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Если предел отношения общих членов данных рядов при $n \to \infty$ есть число, не равное нулю и бесконечности, то оба ряда ведут себя одинаково, т.е. или оба сходятся, или оба расходятся, т.е., если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A,\ A \neq 0,\ A \neq \infty,$$

То оба ряда ведут себя одинаково.

Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Общий член гармонического ряда $u_n = \frac{1}{n}$, общий член исследуемого ряда $v_n = \frac{2n}{n^2+1}$. Находим $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2+1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0, \neq \infty$, отсюда исследуемый ряд расходится.

2) ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.
СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (1)$$

члены которого являются функциями от переменной x, называется функциональным. При подстановке x в функциональный ряд (1), получим числовой ряд, который может быть сходящимся или расходящимся.

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости. Частным случаем функционального ряда является степенной ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \qquad (2) \quad \text{или}$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n . \qquad (3)$$

Областью сходимости степенного ряда является интервал числовой оси, симметричный относительно точки $x = 0$ (для ряда (2)) или $x = x_0$ (для ряда (3)). Этот интервал может быть закрытым, открытым или полуоткрытым.

Для нахождения интервала сходимости степенных рядов обычно используют признак Даламбера.

Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{5^{n-1} \cdot n}$.

$u_n = \frac{(-x)^n}{5^{n-1} \cdot n}$; $u_{n+1} = \frac{(-x)^{n+1}}{5^n (n+1)}$.

Используя признак Даламбера, ищем предел

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot 5^{n-1} \cdot n}{5^n (n+1) x^n} \right| = \frac{|x|}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{5} .$$

Определяем, при каких значениях x этот предел будет меньше 1, т.е. решаем неравенство $\frac{|x|}{5} < 1$, $|x| < 5$, $-5 < x < 5$. $x = \pm 5$

По признаку Даламбера при любом значении x из найденного интервала данный ряд сходится, а при $|x| > 5$ расходится. Граничные точки $x = \pm 5$ этого интервала, для которых $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ и признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда, исследуем особо.

При $x = -5$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5)^n}{5^{n-1} \cdot n}$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$, который расходится, что следует из сравнения его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\left(\frac{5}{n} > \frac{1}{n} \right)$.

При $x=5$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^{n-1}\cdot n}$ или $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5}{n}$, который сходится по признаку Лейбница (члены этого ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю).

Следовательно, интервалом сходимости данного ряда является $-5<x\le 5,\quad R=5$.

3) ПРИЛОЖЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Ряды часто используются для приближенного вычисления значений функций, интегралов и решения дифференциальных уравнений. Студентам следует обратить внимание на замечание [9, гл.16, §7], в котором показано, как оценить погрешность, получающуюся при замене суммы знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, суммой первых его членов; допускаемая абсолютная погрешность не превосходит модуля первого отброшенного члена. Здесь [9] в списке литературы это Пискунов Н.С., Т.2. «Дифференциальное и интегральное исчисления».

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировать его почленно: $\int_0^1 x\cos\sqrt{x}dx$.

Рассмотрим разложение $\cos x$ в ряд

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\ldots, \qquad x\in(-\infty;+\infty).$$ Отсюда

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\frac{x^4}{8!}-\ldots, \qquad x\in(-\infty;+\infty).$$

Интегрируя в пределах от 0 до 1, найдем

$$\int_0^1 x\cos\sqrt{x}dx=\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\frac{x^4}{6!}+\frac{x^5}{8!}-...\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\frac{x^5}{5\cdot 6!}+\frac{x^6}{6\cdot 8!}-...\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{96}-\frac{1}{3600}+...\approx$$

$$\approx 0{,}5-0{,}1667+0{,}0104=0{,}343.$$

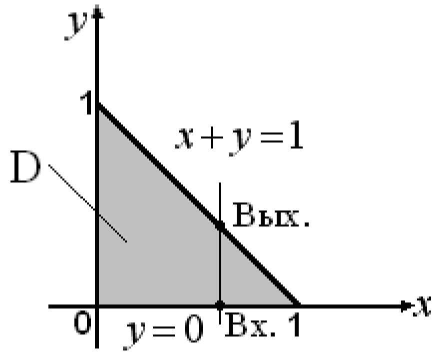
Четвертый член этого знакочередующегося ряда по модулю меньше 0,001, поэтому для вычисления приближенного значения интеграла с точностью до 0,001 достаточно взять сумму первых трех членов ряда, при этом допускаем ошибку $|\tau_n|<0{,}0003$.

Методические указания по теме «Кратные интегралы и их приложения».

Пример 1. Вычислить двойной интеграл вдоль области D (см. рисунок)

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy.$$

Для вычисления двойного интеграла необходимо представить его в виде двукратного, причем подынтегральную функцию поставить под знак внутреннего интеграла. Взять внутренний интеграл и от полученного результата взять внешний. Чтобы расставить пределы интегрирования по переменной ***x*** проектируем область D на ось ***Ox.*** Левая проекция равна нулю, правая равна 1, следовательно, нижний предел интегрирования по переменой ***x*** будет 0, а верхний 1. Чтобы расставить пределы интегрирования по переменной ***y,*** через область D проводим прямую параллельно оси ***Oy*** и отмечаем точку входа в область D и точку выхода из нее. Т.к. точка входа лежит на прямой ***y=0***, то нижний предел интегрирования по переменной ***y*** будет 0. Точка выхода лежит на прямой ***x+y=1***, из уравнения этой прямой находим: $y=1-x$,



тогда верхний предел интегрирования по переменной ***y*** будет $1-x$. Находим

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2+y^2)dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3} dx \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

Обратите внимание на то, что при вычислении внутреннего интеграла по аргументу ***y*** другой аргумент ***x*** считается величиной постоянной.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными уравнениями в декартовых координатах, перейдя к полярным координатам (a>0).

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2, \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, y = 0$$

Решение. Искомую площадь удобно искать в полярных координатах. Известна связь декартовых координат с полярными:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, x^2 + y^2 = r^2$$

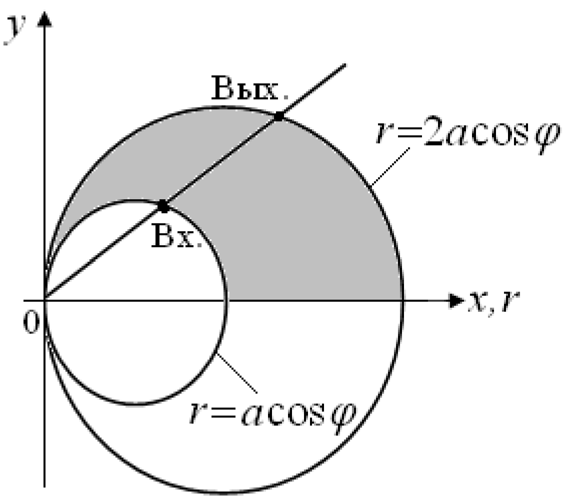
Площадь плоской области D находят по формуле $S = \iint\limits_D dxdy$, или,

переходя к полярным координатам:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}rdr.$$

Запишем уравнения данных окружностей в полярных координатах.

Имеем $(x-a)^2+y^2=a^2$, или $x^2-2ax+a^2+y^2=a^2$, отсюда $x^2+y^2=2ax$, или $r^2=2ar\cos\varphi$, $r=2a\cos\varphi$. Аналогично, полярное уравнение второй окружности примет вид: $r=a\cos\varphi$. Из рисунка видно, что полярный угол в области D изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, т.е. $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Если из полюса 0 через область D провести полярный радиус, то точка входа в область D будет на окружности $r=a\cos\varphi$, а точка выхода из области на окружности $r=2a\cos\varphi$, поэтому $a\cos\varphi\le r\le 2a\cos\varphi$.



Таким образом, площадь S области D равна

$$S=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi}rdr=\int_0^{\pi/2}d\varphi\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(4a^2\cos^2\varphi-a^2\cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{3a^2}{4}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$= \frac{3a^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right) = \frac{3a^2 \pi}{8}, \quad \text{т.к.} \quad \sin \pi = 0$$

В данной задаче легко сделать проверку. Искомая площадь равна половине от разности площади круга радиуса R = a и радиуса R = a/2. Известно, $S_{\text{круга}} = \pi R^2$. Тогда искомая площадь $S = \frac{1}{2}\left(\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{4} \right) = \frac{3\pi a^2}{8}$.

Приложение 4

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

по дисциплине Математический анализ

Раздел «Наименование по РПУД»

Выполнил: студент(ка) группы номер
Фамилия И.О.

Проверил: должность преподавателя кафедры
алгебры, геометрии и анализа
Фамилия И.О.

Владивосток
2014