



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

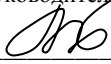
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА


«СОГЛАСОВАНО»

«УТВЕРЖДАЮ»

Руководитель ОП

  
\_\_\_\_\_  
(подпись) Бочарова А.А.  
«24» января 2020 г. (Ф.И.О. рук. ОП)

Заведующий кафедрой механики и математического  
моделирования

  
\_\_\_\_\_  
(подпись) Бочарова А.А.  
«24» января 2020 г. (Ф.И.О. зав. каф.)

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Вариационные принципы механики сплошных сред**

**Направление подготовки: 15.04.03 Прикладная механика**

**Магистерская программа Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг**

**Форма подготовки (очная)**

курс 1, семестр 1

лекции 18 (час.)

практические занятия 18 час.

лабораторные работы 0 час.

в том числе с использованием МАО лек.-/пр. - /лаб. \_\_\_ - \_\_\_ час.

всего часов аудиторной нагрузки 36 (час.)

самостоятельная работа 72 (час.)

в том числе на подготовку к экзамену 27 (час.)

курсовая работа / курсовой проект: не предусмотрен

зачет: не предусмотрен

экзамен 1 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта, самостоятельно установленного федеральным государственным автономным учреждением высшего профессионального образования «Дальневосточный федеральный университет» для реализуемых основных профессиональных образовательных программ, утвержденного приказом ректора от 07.07.2015 г. № 1282.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры механики и математического моделирования протокол №5 от «24» января 2020 г.

Заведующий кафедрой: к.ф.-м.н., доцент А.А.Бочарова

Составитель: к.ф.-м.н., доцент Е.В.Амосова

**Владивосток**  
**2020**

**Оборотная сторона титульного листа РПД**

**I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**III. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**IV. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

## **Цели и задачи освоения дисциплины**

Учебная дисциплина «Вариационные принципы механики сплошных сред» предназначена для студентов первого курса магистратуры. Дисциплина входит в вариативную часть блока «Дисциплины (модули)», является дисциплиной выбора (Б1.В.ДВ.04.01). Знания, умения и навыки, полученные в результате ее изучения, способствуют формированию фундаментального инженерного знания, определяющего базисные составляющие научного мировоззрения.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 108 часов. Учебным планом предусмотрены практические занятия (18 часов), практические занятия (18 часов), самостоятельная работа студента (72 часа, в том числе 27 часов на подготовку к экзамену). Дисциплина реализуется на 1 курсе в 1-м семестре. Форма контроля – экзамен.

### **Цели:**

- изучение вариационных принципов механики жидкости и газа, механики деформированного твердого;
- овладение основными навыками вывода вариационным путем уравнений движения и краевых условий на базе различных по степени точности математических моделей сплошных сред;
- формирование профессионально-деятельностной компоненты системы знаний классической механики, образующей ядро предметного содержания всех дисциплин механического цикла.

### **Задачи:**

1. Теоретическое освоение студентами современных концепций и моделей теории интегральных уравнений и вариационного исчисления.
2. Приобретение практических навыков применения аппарата теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения задач математики, физики, естествознания.

3. Получить навыки презентации законченного представления о принятых решениях и полученных результатах в виде отчета с его публикацией (публичной защитой).

Для успешного изучения дисциплины «Вариационные принципы механики сплошных сред» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

- уметь пользоваться компьютером;
- иметь знания по следующему курсу математики: линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, предел и непрерывность функции, дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных, неопределенные и определенные интегралы, криволинейные и кратные интегралы, дифференциальные уравнения.

В результате изучения данной дисциплины у студентов формируются следующие профессиональные компетенции (элементы компетенций).

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ПК-5 способностью самостоятельно выполнять научные исследования в области прикладной механики для различных отраслей промышленности, топливно-энергетического комплекса, транспорта и строительства, решать сложные научно-технические задачи, которые для своего изучения требуют разработки и применения математических и компьютерных	Знает	Классические математические модели механики, их свойства, а также экспериментальные и теоретические методы построения математических Моделей. Основные понятия, идеи и методики проведения математического моделирования применительно к задачам механики сплошной среды. Основные вариационные принципы механики сплошных сред.
	Умеет	Формализовать поставленную задачу, применить классические математические модели к поставленной задаче, обосновать корректность математической модели. Применять основные методы математического и численного моделирования для решения теоретических и прикладных задач в механике сплошной среды. Самостоятельно осуществлять построение и анализ математических моделей в теории упругости, решать статические и динамические задачи теории пластин и оболочек.

моделей, применения программных систем мультидисциплинарного анализа (САЕ-систем мирового уровня)	Владеет	Навыками формализации поставленной задачи, экспериментальными и теоретическими методами построения математических моделей. Основными методами математического и численного моделирования, применяющихся для моделирования в механике сплошной среды. Основными методами стационарной динамики деформируемых тел, нелинейной теории упругих оболочек.
ПК-7 готовностью овладевать новыми современными методами и средствами проведения экспериментальных исследований по динамике и прочности, устойчивости, надежности, трению и износу машин и приборов; обрабатывать, анализировать и обобщать результаты экспериментов	Знает	о вариационных принципах механики и физики
	Умеет	получить общее решение краевых задач для дифференциальных уравнений различными методами
	Владеет	методологией применения методов вариационного исчисления и математической физики к постановке, решению и исследованию различных задач, имеющих естественнонаучное содержание

## I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

### ЛЕКЦИОННЫЕ ЗАНЯТИЯ (18 часов)

#### Раздел 1. Основные понятия теории вариационного исчисления.

##### Необходимые условия минимума (6 час.)

##### Тема 1. Первые задачи вариационного исчисления (2 час.)

Введение. Историческая справка. Первые задачи вариационного исчисления:

задача Бернулли, задача о кривой наибыстрейшего спуска.

##### Тема 2. Начала вариационного исчисления (4 час.)

Начала вариационного исчисления (функция и функционал, примеры функционалов). Лемма Лагранжа, лемма Дюбуа-Раймона, преобразование

первой вариации по Лагранжу и по методу Дюбуа-Раймона. Постановка простейшей вариационной задачи. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Различные варианты уравнений Эйлера-Лагранжа.

## **Раздел 2. Достаточные условия экстремума (6 час.)**

### **Тема 1. Первое необходимое условие (2 час.)**

Замечание о достаточных условиях. Первое необходимое условие.

### **Тема 2. Семейство экстремалей (4 час.)**

Теорема включения. Канонические уравнения. Инвариантный интеграл Гильберта. Теорема об огибающей и необходимое условие экстремума. Вторая вариация интегрального функционала. Аналитический вариант условия Якоби. Необходимые условия Вейерштрасса и Лежандра. Понятие поля экстремалей. Достаточные условия Вейерштрасса. Уравнение Гамильтона–Якоби.

## **Раздел 3. Приложения (6 час.)**

### **Тема 1. Динамика частиц (4 час.)**

Потенциальная и кинетическая энергия. Обобщенные координаты. Потенциальная энергия. Кинетическая энергия. Связи. Обобщенные координаты. Обобщенные скорости. Лагранжиан. Принцип Гамильтона. Уравнения движения Лагранжа. Принцип Гамильтона. Уравнения движений Лагранжа. Первый интеграл. Обобщенные моменты. Гамильтоновы уравнения движения. Канонические уравнения. Скобка Пуассона. Функция поля. Уравнение Гамильтона–Якоби. Канонические преобразования.

### **Тема 2. Проблема минимума квадратичного функционала (2 час.)**

Вариационный метод в задаче на собственные значения. Минимаксное свойство собственных чисел. Существование минимума квадратичного функционала. Обобщенная лемма Дюбуа–Реймона.

# **1. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА (18 часов)**

## **Занятие 1,2. Начала вариационного исчисления (4 час.)**

1. Постановка простейшей вариационной задачи. Уравнение Эйлера-Лагранжа.
2. Различные варианты уравнений Эйлера-Лагранжа.

## **Занятия 3, 4, 5, 6. Вариационные принципы механики (8 час.)**

1. Основные динамические структуры механической системы материальных точек.
2. Составление дифференциальных и интегральных вариационных принципов механики.
3. Вывод уравнений движения голономных механических систем из вариационных принципов механики.

## **Занятие 7, 8. Вариационные принципы механики сплошных сред (4 час.)**

1. Общие теоремы механики сплошных сред. Теорема Клайперона. Закон взаимности Бетти.
2. Минимум работы деформации при заданных на границе перемещениях при отсутствии массовых сил.
3. Вариационные уравнения равновесия упругой среды.
4. Интегральный вариационный принцип Гамильтона.

## **Занятие 9. Решение задач механики на основе вариационных уравнений (2 час.)**

1. Приближенные методы решения уравнений, основанных на вариационных уравнениях механики сплошных сред.
2. Метод Галеркина. Структура аппроксимирующей функции.
3. Метод Ритца.

## **Самостоятельная работа (54 часа)**

### **План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине**

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	3-4 неделя 1 семестра	Подготовка к устному опросу по разделу «Вариационные принципы механики сплошных сред»	5 час.	УО-1
2	5-6 неделя 1 семестра	Решение задач по разделу «Вариационные принципы механики сплошных сред»	10 час.	ПР-12
3	9-10 неделя 1 семестра	Подготовка к устному опросу по разделу «Достаточные условия экстремума»	5 час.	УО-1
4	11-12 неделя 1 семестра	Решение задач по разделу «Вариационные принципы механики сплошных сред»	10 час.	ПР-12
5	13-14 неделя 1 семестра	Подготовка к устному опросу по разделу «Приложения»	5 час.	УО-1
6	15-16 неделя 1 семестра	Решение задач по разделу «Решение задач механики на основе вариационных уравнений»	10 час.	ПР-12
7	17-18 неделя 1 семестра	Подготовка к экзамену за первый семестр	27 часов	экзамен
<b>Итого</b>			<b>72 час.</b>	

## **II. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

### **Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению**

#### **Устные опросы**

Устные опросы проводятся преподавателем по завершению изучения каждого раздела. Для подготовки используется основная и дополнительная литература по дисциплине «Вариационные принципы механики сплошных сред». Вопросы, возникающие в процессе подготовки, студент может задать преподавателю либо на занятиях, либо на консультациях

#### **Расчётно-графические работы**



**Расчетно-графические работы (РГР)** являются основной формой контроля СРС.

*Преподаватель дает каждому студенту индивидуальные задания из данного учебного пособия.* РГР оценивается в форме зачета (оценивается оценкой «зачтено» или «не зачтено»). Не зачтенное РГР возвращается студенту для выполнения работы над ошибками, после чего оно может быть сдано для проверки повторно. РГР считается выполненным, если оно получило итоговую оценку «зачтено». Содержание и сроки выполнения мероприятий текущего контроля освоения дисциплины определены в плане-графике настоящей РПД.

На этой основе студенты выполняют в первом семестре три расчетно-графических работы по предметному материалу вариационные принципы механики сплошных сред по темам:

- Вариационные принципы механики сплошных сред;
- Вариационные принципы механики сплошных сред;
- Решение задач механики на основе вариационных уравнений.

Решение типовых вариантов каждого РГР приведены ниже.

Вариационные принципы механики сплошных сред.

**Пример 1. «Классическая задача вариационного исчисления»**

**Задание 1.** Найти экстремаль функционала.

$$J(y) = \int_0^1 \left( (y')^2 + y' + 1 \right) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

**Решение.** Здесь  $F(y') = (y')^2 + y' + 1$ ; производные  $F'(y') = 2y' + 1$ ,  $F''(y') = 2$ . Уравнение Эйлера имеет вид:  $2 \cdot y'' = 0$ , откуда  $y = c_1x + c_2$ . Значения  $c_1$  и  $c_2$  найдём из условия прохождения экстремали через точки  $M(0; 1)$  и  $N(1; 2)$ :  $c_2 = 1$ ;  $c_1 + c_2 = 2$ ; то есть  $c_1 = c_2 = 1$ . Таким образом, экстремалью является прямая  $y = x + 1$ .

Функция  $F$  зависит только от  $x$  и  $y'$ , т. е.  $F = F(x, y')$ , т. к. в этом случае  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ , то уравнение Эйлера имеет вид  $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ , откуда сразу

находим  $\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = c_1$ . Выражая из этого уравнения  $y'$  и интегрируя, получим общее решение уравнения Эйлера.

**Задание 2.** Найти функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x) \in C^1([x_1, x_2])$ , на которых может достигаться экстремум функционала  $J(y_1, y_2)$  при указанных граничных условиях.

$$J(\bar{y}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ (y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1 \cdot y_2 \right] dx,$$

$$y_1(0) = 0; \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad y_2(0) = 0; \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

**Решение.** Поскольку  $\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y_1'} \right) = 2y_2 - \frac{d}{dx} (2y_1') = 2y_2 - 2y_1'' = 0$ ,

$$\text{и } \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y_2'} \right) = 2y_1 - \frac{d}{dx} (2y_2') = 2y_1 - 2y_2'' = 0.$$

Система дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид:

$$\begin{cases} y_1'' - y_2 = 0, \\ y_2'' - y_1 = 0. \end{cases}$$

Исключая одну из функций, например,  $y_2$ , получаем  $y_1^{IV} - y_1 = 0$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^4 - 1 = 0$  имеет корни:  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i$ , поэтому решение уравнения представимо в виде:

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Из условия  $y_2 = y_1''$  находим  $y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$ .

Используя граничные условия

$$y_1(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_4 = 1,$$

$$y_2(0) = c_1 + c_2 - c_3 = 0,$$

$$y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_4 = -1,$$

находим  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$ ,  $c_4 = 1$ .

Следовательно,  $y_1 = \sin x$ ,  $y_2 = -\sin x$ .

**Задание 3.** Найти допустимую экстремаль в задаче со старшими производными:

$$J(y) = \int_0^1 e^{-x} (y'')^2 dx, \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1; \quad y(1) = e; \quad y'(1) = 2e.$$

**Решение.** Уравнение Эйлера – Пуассона в данной задаче имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0. \quad \text{Найдём производные} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y'' e^{-x}; \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) = -e^{-x} \cdot 2y'' + 2y''' \cdot e^{-x};$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) = e^{-x} \cdot 2y'' - 4e^{-x} \cdot y''' + 2e^{-x} \cdot y^{IV}.$$

Уравнение Эйлера – Пуассона запишется в виде

$$2e^{-x} \cdot (y^{IV} - 2y''' + y'') = 0.$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = 0$ ,  $\lambda_{3,4} = 1$ , поэтому общее решение можно записать в виде

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x.$$

Найдём его производную  $y'(x) = c_2 + (c_3 + c_4)e^x + c_4xe^x$ . Используя граничные условия

$$y(0) = c_1 + c_3 = 0,$$

$$y'(0) = c_2 + c_3 + c_4 = 1,$$

$$y(1) = c_2 + (c_3 + c_4) \cdot e = e,$$

$$y'(1) = (c_3 + 2c_4) \cdot e = 2e,$$

найдем константы  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$ ,  $c_4 = 1$ .

Допустимая экстремаль  $\tilde{y}(x) = x \cdot e^x$ .

## Пример 2. «Задача Больца»

**Задание 1.** Найти экстремум функционала

$$J(x) = \int_0^T [(y')^2 - y^2] dx + y(0) + y^2(T) \rightarrow \inf.$$

**Решение.** В этой задаче

$$F(x, y, y') = (y')^2 - y^2, \quad L(y(x_1), y(x_2)) = y_1 + y_2^2.$$

Поскольку  $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$ , запишем уравнение Эйлера –

Лагранжа:  $y + y'' = 0$ .

Общее решение этого уравнения имеет вид:  $y(x) = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$ .

Учитывая, что  $\frac{\partial L(y(x_1), y(x_2))}{\partial y_1} = 1$  и  $\frac{\partial L(y(x_1), y(x_2))}{\partial y_2} = 2y_2$ , запишем

условия трансверсальности: 
$$\begin{cases} 2y'(T) = -2y(T), \\ 2y'(0) = 1. \end{cases}$$

Вычисляя производную функции  $y(x)$  в точках  $x=0$  и  $x=T$  и используя условия трансверсальности, получим уравнения для определения постоянных  $A$  и  $B$ :

$$y'(0) = A = \frac{1}{2},$$

$$y'(T) = A \cos T - B \sin T = -(A \sin T + B \cos T).$$

Решая эту систему, найдём  $A = \frac{1}{2}$ ;  $B = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} T + 1}{\operatorname{tg} T - 1}$ .

Таким образом, необходимым условием слабого локального минимума

задачи удовлетворяет функция  $\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} T + 1}{\operatorname{tg} T - 1} \cdot \cos t$ .

**Задание 2.** Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{-1}^2 (y_1' \cdot y_2' + y_1 \cdot y_2 + (y_1')^2 + (y_2')^2) dx + y_1(-1) \cdot y_2(2) \rightarrow \inf,$$

$$y_1(2) = 2.$$

**Решение.** Вычислим производные

$$\begin{aligned} F'_{y_1} &= y_2, & F'_{y_1'} &= y_2' + 2y_1' \\ F'_{y_2} &= y_1, & F'_{y_2'} &= y_1' + 2y_2' \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases} y_2 - y_2'' - 2y_1'' = 0, \\ y_1 - y_1'' - 2y_2'' = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему.

1. Сложим уравнения системы  $(y_1 + y_2) - (y_1'' + y_2'') - 2(y_1'' + y_2'') = 0$ .

Обозначив  $z = y_1 + y_2$ , получим уравнение  $z - 3z'' = 0$ . Его

характеристическое уравнение  $3\lambda^2 - 1 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,

поэтому  $z = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} = y_1 + y_2$ .

2. Вычтем из первого уравнения системы уравнений Эйлера второе уравнение:  $(y_2 - y_1) - (y_2'' - y_1'') + 2(y_2'' - y_1'') = 0$ . Обозначив  $\omega = y_2 - y_1$ , перепишем уравнение в виде  $\omega'' + \omega = 0$ . Его характеристическое уравнение

$\lambda^2 + 1 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , поэтому решением является функция  $\omega = c_3 \sin x + c_4 \cos x = y_2 - y_1$ .

Решая систему 
$$\begin{cases} y_1 + y_2 = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} \\ y_2 - y_1 = c_3 \sin x + c_4 \cos x \end{cases}$$
 относительно  $y_1$  и  $y_2$ ,

получаем:

$$y_1 = \frac{1}{2} \left( c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} - c_3 \sin x - c_4 \cos x \right)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \left( c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x \right),$$

Или, включая числовой множитель  $\frac{1}{2}$  в константы,

$$y_1 = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} - c_3 \sin x - c_4 \cos x,$$

$$y_2 = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x.$$

Вычислим производные полученных функций:

$$y_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} - \frac{1}{\sqrt{3}} c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} - c_3 \cos x + c_4 \sin x,$$

$$y_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} - \frac{1}{\sqrt{3}} c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_3 \cos x - c_4 \sin x.$$

В этой задаче дано лишь одно граничное условие, следовательно, только один конец закреплён (правый конец функции  $y_1(x)$ ). Для трёх других концов необходимо использовать условия трансверсальности.

Используя обозначения  $y_{11} = y_1(-1)$ ,  $y_{12} = y_2(-1)$ ,  $y_{21} = y_1(2)$ ,  $y_{22} = y_2(2)$ ,  $L(y_{11}, y_{22}) = y_{11} \cdot y_{22}$ , запишем систему граничных условий:

$$1) \text{ для левого конца } x_1 = -1 \text{ для функции } y_1: \frac{\partial F}{\partial y_1'}(-1) = \frac{\partial L(y_{11}, y_{22})}{\partial y_{11}};$$

$$2) \text{ для правого конца } x_2 = 2 \text{ для функции } y_1: y_1(2) = 2 - \text{ задано};$$

$$3) \text{ для левого конца } x_1 = -1 \text{ для функции } y_2: \frac{\partial F}{\partial y_2'}(-1) = \frac{\partial L(y_{11}, y_{22})}{\partial y_{12}};$$

$$4) \text{ для правого конца } x_2 = 2 \text{ для функции } y_2: \frac{\partial F}{\partial y_2'}(2) = -\frac{\partial L(y_{11}, y_{22})}{\partial y_{22}}.$$

Перепишем систему в обозначениях задачи:

$$y_2'(-1) + 2y_1'(-1) = y_2(2),$$

$$y_1(2) = 2,$$

$$y_1'(-1) + 2y_2'(-1) = 0,$$

$$y_1'(2) + 2y_2'(2) = -y_1(-1).$$

Вычисляя значения функций и их производных, получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$1) \frac{1}{\sqrt{3}} c_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{3}} c_2 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + c_3 \cos(-1) - c_4 \sin(-1) + \frac{2}{\sqrt{3}} c_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} - \\ - \frac{2}{\sqrt{3}} c_2 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - 2c_3 \cos(-1) + 2c_4 \sin(-1) = c_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + c_2 e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}} + \\ + c_3 \sin 2 + c_4 \cos 2;$$

$$2) c_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + c_2 e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}} - c_3 \sin 2 - c_4 \cos 2 = 2;$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{3}} c_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{3}} c_2 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - c_3 \cos(-1) + c_4 \sin(-1) + \frac{2}{\sqrt{3}} c_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} - \\ - \frac{2}{\sqrt{3}} c_2 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + 2c_3 \cos(-1) - 2c_4 \sin(-1) = 0;$$

$$4) \frac{1}{\sqrt{3}} c_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{3}} c_2 e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}} - c_3 \cos 2 + c_4 \sin 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} c_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}} - \\ - \frac{2}{\sqrt{3}} c_2 e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}} + 2c_3 \cos 2 - 2c_4 \sin 2 = -c_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} - c_2 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \\ + c_3 \sin(-1) + c_4 \cos(-1).$$

Решая систему, находим коэффициенты  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . Подставляя их в уравнение экстремали, получаем допустимую экстремаль.

### Пример 3. «Задачи на условный экстремум»

Требуется найти минимум функционала

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y')^2 - y^2) dx \quad (22)$$

при ограничениях

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cdot \sin x dx = 1 \quad (23)$$

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (24)$$

*Решение.* В этой задаче функция  $L(x, y, y', \lambda_0, \lambda)$  имеет вид  $L = \lambda_0((y')^2 - y^2) + \lambda y \cdot \sin x$ .

Вычисляя производные  $L'_y(x, y, y', \lambda_0, \lambda) = -2\lambda_0 y + \lambda \sin x$ ,

$L'_{y'} = 2\lambda_0 y'$ , запишем уравнение Эйлера – Лагранжа:



$$-2\lambda_0 y + \lambda \sin x - 2\lambda_0 y'' = 0. \quad (25)$$

1. Рассмотрим нерегулярный случай, когда  $\lambda_0 = 0$ .

Уравнение (25) имеет вид  $\lambda \cdot \sin x = 0$ , откуда следует, что  $\lambda = 0$ , и, таким образом,  $\lambda$  и  $\lambda_0$  одновременно равны нулю, что противоречит условию согласования знаков, поэтому нерегулярных решений в задаче нет.

2. Пусть  $\lambda_0 \neq 0$ . Поделим уравнение (25) на  $\lambda_0$ :

$$-2(y + y'') + \frac{\lambda}{\lambda_0} \sin x = 0.$$

Обозначим  $\frac{\lambda}{2\lambda_0} = \nu$  и перепишем дифференциальное уравнение (25) в

виде

$$y + y'' = \nu \cdot \sin x. \quad (26)$$

Решение однородного уравнения  $y(x) = A \sin x + B \cos x$ . Частное решение ищем в виде  $y_{\text{ч}}(x) = Cx \sin x + Dx \cos x$ .

Вычисляя вторую производную  $y_{\text{ч}}''(x)$  и подставляя её в уравнение (26), найдём величины  $C = 0$ ,  $D = -\frac{\nu}{2}$ . Таким образом, частное решение имеет

$$\text{вид } y_{\text{ч}} = -\frac{\nu}{2} x \cos x.$$

Общее решение уравнения (26) представлено в виде

$$y(x) = A \sin x + B \cos x - \frac{\nu}{2} x \cos x.$$

Используя граничные условия (24), найдём

$$y(0) = B = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = A = 0. \quad \text{Таким образом, } y(x) = -\frac{\nu}{2} x \cos x.$$

Для определения множителя  $U$  используем интегральное условие (23):

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{U}{2} x \cos x \sin x dx = -\frac{U\pi}{16} = 1, \quad \text{откуда} \quad U = -\frac{16}{\pi}.$$

Таким образом,

необходимому условию минимума удовлетворяет функция

$$\tilde{y}(x) = \frac{8}{\pi} x \cdot \cos x.$$

Вариационные принципы механики сплошных сред.

**Пример 1.** Найти функцию  $u(x, y)$  непрерывную в области  $\Omega$  вместе с частными производными первого и второго порядков, принимающую на контуре  $\Gamma$  заданное значение  $u = \varphi(s)$ ,  $s \in \Gamma$  и дающую интегралу

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2f(x, y)u(x, y) \right] dx dy$$

минимальное значение.

Решение. Применим формулу Гаусса-Остроградского и запишем данный интеграл в виде

$$\begin{aligned} J(u) &= \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2f(x, y)u(x, y) \right] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla u + 2f(x, y)u(x, y)] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} (-\Delta u + 2f)u dx dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что задано условие главное условие на границе для неизвестной функции, примем пока  $u|_{\Gamma} = 0$ . В силу теоремы вариационного исчисления найдем функцию  $u(x, y)$  как решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

$$u = \varphi(s), \quad s \in \Gamma.$$

Решение задач механики на основе вариационных уравнений.

**Пример 1. «Прямые методы вариационного исчисления»**

Рассмотрим вариационную задачу вида

$$J(y) = \int_0^1 \left( (y')^2 - y^2 - 2xy \right) dx \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (2)$$

Решим её с помощью теоремы о достаточных условиях экстремума и метода Ритца.

*Решение.*

1. Найдём допустимую экстремаль. Уравнение Эйлера имеет вид  $y'' + y + x = 0$ .

Решение однородного уравнения:  $y_0(x) = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x$ . Решение неоднородного уравнения ищем в виде  $y_ч = ax + b$ , тогда  $y_ч = -x$ . Общее решение уравнения Эйлера запишется в виде  $\tilde{y}(x) = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x - x$ .

Используем граничные условия  $\tilde{y}(0) = c_2 = 0$ ,  $\tilde{y}(1) = c_1 \cdot \sin 1 - 1 = 0$ , откуда  $c_1 = (\sin 1)^{-1}$ .

Допустимая экстремаль:

$$\tilde{y}(x) = (\sin 1)^{-1} \cdot \sin x - 1. \quad (3)$$

Для задачи выполнено усиленное условие Лежандра:  $F''_{y'y'} = 2 > 0$ .

Сопряжённый функционал

$$K(h) = \int_0^1 \left[ (F''_{y'y'} \cdot h', h') + 2(F''_{y'y} \cdot h', h) + (F''_{yy} \cdot h, h) \right] dx$$

имеет вид

$$K(h) = \int_0^1 (2(h')^2 - 2h^2) dx, \quad h(0) = 0, \quad h(1) = 0.$$

Уравнение Эйлера для сопряжённого функционала является уравнением Якоби для исходной задачи и имеет вид  $h'' + h = 0$ .

Решение  $h$ , удовлетворяющее условию  $h(0) = 0$ , равно  $c \cdot \sin x$ . Очевидно, что не существует нетривиального решения  $h(x)$  такого, что  $h(\tau) = 0$ ,  $\tau \in [0;1]$ . Точки, сопряжённые к точке 0, на интервале  $[0;1]$  отсутствуют, поэтому выполнены достаточные условия оптимальности и допустимая экстремаль (3) является точкой абсолютного минимума функционала.

2. Будем строить последовательность Ритца, используя систему  $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ , тогда каждый элемент последовательности Ритца, удовлетворяющий граничным условиям, будет содержать множителем функцию  $x \cdot (1-x)$ .

Положим, что  $\varphi_n(x) = (1-x) \cdot x^n$ ,  $n \geq 1$ .

Пусть  $n = 1$ . Ищем решение задачи (14) – (15) в виде

$$y_1(x) = a_1 \cdot \varphi_1(x) = a_1 \cdot (1-x) \cdot x.$$

Подстановка в интеграл даёт

$$\begin{aligned} J_1(a_1) &= \int_0^1 (a_1^2 \cdot (1-2x)^2 - a_1^2 \cdot (1-x)^2 \cdot x^2 - a_1^2 \cdot (1-x) \cdot x^2) dx = \\ &= a_1^2 \cdot \frac{3}{10} - a_1 \cdot \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Из условия стационарности  $\frac{dJ_1}{da_1} = 0$  найдём точку абсолютного

минимума  $a_1 = \frac{5}{18}$ , откуда  $y_1^*(x) = \frac{5}{18} (1-x) \cdot x$ .

Пусть  $n = 2$ . Ищем решение задачи (14) – (15) в виде

$$y_2(x) = a_1 \cdot \varphi_1(x) + a_2 \cdot \varphi_2(x) = a_1 \cdot (1-x) \cdot x + a_2 \cdot (1-x) \cdot x^2.$$

Подстановка в функционал даёт

$$J_2(a_1, a_2) = \int_0^1 \left[ \left( a_1 \cdot (1 - 2x) + a_2 \cdot (2x - 3x^2) \right)^2 - \left( a_1(1-x)x + a_2(1-x)x^2 \right)^2 - 2x \left( a_1(1-x)x + a_2(1-x)x^2 \right) \right] dx =$$

$$= \frac{3}{10} a_1^2 + \frac{13}{105} a_2^2 + \frac{3}{10} a_1 \cdot a_2 - \frac{1}{6} a_1 - \frac{1}{10} a_2.$$

Из условий стационарности  $\frac{\partial J_2}{\partial a_i} = 0$ ,  $i = 1, 2$  находим точку абсолютного

минимума  $a_2 = \frac{7}{41}$ ,  $a_1 = \frac{71}{369}$ , откуда

$$y_2^*(x) = \frac{71}{369} \cdot (1-x)x + \frac{7}{41} \cdot (1-x) \cdot x^2.$$

Приведём таблицу, которая иллюстрирует сходимость последовательности  $y_n^*$  к решению:

$x$	$\tilde{y}(x)$	$y_1^*(x)$	$y_2^*(x)$
0,2	0,04401	0,0520	0,04408
5	3654	83333	0284
0,5	0,06974	0,0694	0,06944
	6963	44444	4444
0,7	0,06005	0,0520	0,06008
5	6166	83333	6382

Из таблицы видно, что значения уже второй из функций минимизирующей последовательности отличаются от значений точного решения в выбранных точках отрезка не более чем на  $3,1 \cdot 10^{-4}$ .

#### IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Вариационные принципы механики сплошных сред	ПК-5, ПК-7	Знает	Собеседование (УО-1)	Вопросы к экзамену 1-20
			Умеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
			Владеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
2	Вариационные принципы механики сплошных сред	ПК-5, ПК-7	Знает	Собеседование (УО-1)	Вопросы к экзамену 21-40
			Умеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
			Владеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
3	Решение задач механики на основе вариационных уравнений	ПК-5, ПК-7	Знает	Собеседование (УО-1)	Вопросы к экзамену 41-67
			Умеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
			Владеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену

#### V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### Основная литература

1. Андреев, В. К. «Математические модели механики сплошных сред». [Электронный ресурс] / В. К. Андреев. СПб : Лань", 2015. – 240 с. <https://e.lanbook.com/book/67464>
2. Димитриенко, Ю. И. «Нелинейная механика сплошной среды». Москва: Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2009. - 624 с. – ISBN 978-5-9221-1110-2 : Б. ц. ЭБС «Инфра-М». <http://znanium.com/catalog/product/544776>
3. Романко, В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления : учебное пособие / В.К. Романко. — 4-е изд. (эл.). — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 347 с. <https://e.lanbook.com/book/70785>
4. Абдрахманов, В.Г. Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Г. Абдрахманов, А.В. Рабчук. — Электрон. дан. — Санкт-Петербур: Лань, 2014. — 112 с. <https://e.lanbook.com/book/45675>
5. Тракимус, Ю. В. Вариационные принципы механики сплошных сред в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю. В. Тракимус. — Электрон. текстовые данные. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2011. — 72 с. — 978-5-7782-1671-6. <http://www.iprbookshop.ru/45416.html>
6. Авербух, Ю. В. Простейшие задачи вариационного исчисления [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Ю. В. Авербух, Т. И. Сережникова ; под ред. А. Н. Сесекин. — Электрон. текстовые данные. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 41 с. — 978-5-7996-1250-4. <http://www.iprbookshop.ru/65975.html>

#### **Дополнительная литература**

1. Васильева А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А. Б.

Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов.- СПб: Лань, 2010. – 429 с.

<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:298688&theme=FEFU>

2. Ильин В.А. Высшая математика : учебник для вузов / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет. - [Москва] : Проспект : Изд-во Московского университета , 2014. – 592 с.

<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:726406&theme=FEFU>

3. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа. Учеб. для вузов / Л. Г. Лойцянский. - 7-е изд., испр. - Москва : Дрофа, 2003. - 840 с.

4. Темам, Роджер. Математическое моделирование в механике сплошных сред. Mathematical Modeling in Continuum Mechanics. Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. - 320 с.

### **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети**

#### **«Интернет»**

1. Справочник по Excel. – Режим доступа: <https://excel2.ru/>

2. Основы MathCAD. – Режим доступа:  
<http://old.exponenta.ru/soft/Mathcad/Mathcad.asp>

### **Перечень информационных технологий и программного обеспечения**

При осуществлении образовательного процесса студентами и профессорско-преподавательским составом используется следующее программное обеспечение:

1. Microsoft Office (Access, Excel, PowerPoint, Word ит. д).

2. MathCAD.

3. Программное обеспечение электронного ресурса сайта ДВФУ, включая ЭБС ДВФУ.

При осуществлении образовательного процесса студентами и профессорско-преподавательским составом используются следующие информационно-справочные системы:



1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.
2. Электронно-библиотечная система издательства «Лань».
3. Электронно-библиотечная система «IPRbooks».
4. Электронно-библиотечная система «Znanium»

## **VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

На изучение дисциплины отводится 36 часов аудиторных занятий и 72 часа самостоятельной работы.

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов проводится в форме изучения и анализа лекционного материала, изучения отдельных теоретических вопросов по предлагаемой литературе, подбора дополнительных источников для извлечения научно-технической информации, связанной с проблемами, изучаемыми в рамках данной дисциплины и решения задач с дальнейшим их разбором или обсуждением на аудиторных занятиях, подготовки к промежуточной аттестации.

Самостоятельная аудиторная работа студентов проводится в форме самостоятельного решения задач на практических занятиях с дальнейшим их разбором и обсуждением; проведения проверочных работ; поиска решений проблемных ситуаций, предложенных на лекциях и практических занятиях; поиска и устранения ошибок, заложенных в представлении материала преподавателем и допущенных другими студентами.

Текущий контроль усвоения дисциплины «Вариационные принципы механики сплошных сред» проводится в виде устного опроса по контрольным вопросам курса и контрольной работы по теме: «Решение задач механики на основе вариационных уравнений».

Примерные варианты контрольной работы и контрольные вопросы для проведения промежуточной аттестации содержатся в фонде оценочных средств текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

## **1. Сценарий изучения дисциплины**

Для успешного изучения дисциплины «Вариационные принципы механики сплошных сред» необходимо следующее: на лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. На практических занятиях преподаватель дает методику решения задач. Во второй части практического занятия студентам предлагается работать самостоятельно. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения. Если полученных в аудитории знаний окажется недостаточно, студент может самостоятельно повторно прочесть лекцию или соответствующее пособие, просмотреть практикум с разобранными примерами. После выполнения задания, студент защищает его преподавателю в назначенное время. Самостоятельная работа организовывается в соответствии с графиком выполнения самостоятельной работы

**2. Рекомендации по работе с литературой.** Теоретический материал курса становится более понятным, когда дополнительно используются теоретико-практические источники из списка основной и дополнительной литературы. Литературу по курсу можно изучать в библиотеке, брать книгу на дом или читать ее на компьютере (если это электронный ресурс). Полезно использовать несколько учебников, однако желательно придерживаться рекомендации преподавателя по выбору книг по каждому разделу. Не рекомендуется «заучивать» материал, желательно добиться понимания изучаемой темы дисциплины, а затем использовать изученный материал для реализации заданий. Кроме того, очень полезно выделить для себя направления дальнейшего изучения материала, для достижения более продвинутого уровня изучения дисциплины.

**3. Рекомендации по подготовке к экзамену.** Успешная подготовка к экзамену включает, с одной стороны, добросовестную работу в течение

семестра, выполнение всех заданий преподавателя, а с другой – правильная организация процесса непосредственной подготовки. При подготовке к экзамену необходимо освоить теорию: разобрать определения всех понятий, повторить приемы решения задач. Затем рассмотреть примеры и самостоятельно реализовать задания из каждой темы. При этом, если задания формулируются студентом самостоятельно, достигается более продвинутый уровень изучения дисциплины.

## **VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Аудиторные занятия по дисциплине включают лекции и практические занятия.

Для проведения лекционных и практических занятий необходима аудитория со следующим оборудованием:

- мультимедийный проектор Optima EX542I – 1 шт;
- аудио усилитель QVC RMX 850 – 1 шт;
- колонки – 1 шт;
- ноутбук;
- ИБП – 1 шт;
- настенный экран;
- микрофон – 1 шт.

В целях обеспечения специальных условий обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в ДВФУ все здания оборудованы пандусами, лифтами, подъемниками, специализированными местами, оснащенными туалетными комнатами, табличками информационно-навигационной поддержки.

## **VIII. ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**Паспорт ФОС**

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
<p>ПК-5 способностью самостоятельно выполнять научные исследования в области прикладной механики для различных отраслей промышленности, топливно-энергетического комплекса, транспорта и строительства, решать сложные научно-технические задачи, которые для своего изучения требуют разработки и применения математических и компьютерных моделей, применения программных систем мультидисциплинарного анализа (CAE-систем мирового уровня)</p>	Знает	<p>Классические математические модели механики, их свойства, а также экспериментальные и теоретические методы построения математических Моделей.</p> <p>Основные понятия, идеи и методики проведения математического моделирования применительно к задачам механики сплошной среды.</p> <p>Основные вариационные принципы механики сплошных сред.</p>
	Умеет	<p>Формализовать поставленную задачу, применить классические математические модели к поставленной задаче, обосновать корректность математической модели.</p> <p>Применять основные методы математического и численного моделирования для решения теоретических и прикладных задач в механике сплошной среды.</p> <p>Самостоятельно осуществлять построение и анализ математических моделей в теории упругости, решать статические и динамические задачи теории пластин и оболочек.</p>
	Владеет	<p>Навыками формализации поставленной задачи, экспериментальными и теоретическими методами построения математических моделей.</p> <p>Основными методами математического и численного моделирования, применяющихся для моделирования в механике сплошной среды.</p> <p>Основными методами стационарной динамики деформируемых тел, нелинейной теории упругих оболочек.</p>
<p>ПК-7 готовностью овладевать новыми современными методами и средствами проведения экспериментальных исследований по динамике и прочности, устойчивости, надежности, трению и износу машин и приборов; обрабатывать, анализировать и обобщать результаты экспериментов</p>	Знает	о вариационных принципах механики и физики
	Умеет	получить общее решение краевых задач для дифференциальных уравнений различными методами
	Владеет	методологией применения методов вариационного исчисления и математической физики к постановке, решению и исследованию различных задач, имеющих естественнонаучное содержание

## Контроль достижений целей курса

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Вариационные принципы механики сплошных сред	ПК-5, ПК-7	Знает	Собеседование (УО-1)	Вопросы к экзамену 1-20
			Умеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
			Владеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
2	Вариационные принципы механики сплошных сред	ПК-5, ПК-7	Знает	Собеседование (УО-1)	Вопросы к экзамену 21-40
			Умеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
			Владеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
3	Решение задач механики на основе вариационных уравнений	ПК-5, ПК-7	Знает	Собеседование (УО-1)	Вопросы к экзамену 41-67
			Умеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену
			Владеет	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	типовые задачи к экзамену

## Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		критерии	показатели
ПК-5 способностью самостоятельно выполнять научные исследования в области прикладной	Знает	Классические математические модели механики, их свойства, а также экспериментальные и теоретические методы построения математических Моделей. Основные понятия, идеи и	- знание определений и основных понятий вариационного исчисления - знание базовых методов вариационного исчисления	способность дать определения основных понятий вариационного исчисления; - способность перечислить и раскрыть суть базовых методов вариационного

механики для различных отраслей промышленности, топливно-энергетического комплекса, транспорта и строительства, решать сложные научно-технические задачи, которые для своего изучения требуют разработки и применения математических и компьютерных моделей, применения программных систем мультидисциплинарного анализа (CAE-систем мирового уровня)		методики проведения математического моделирования применительно к задачам механики сплошной среды. Основные вариационные принципы механики сплошных сред.		исчисления;
	Умеет	Формализовать поставленную задачу, применить классические математические модели к поставленной задаче, обосновать корректность математической модели. Применять основные методы математического и численного моделирования для решения теоретических и прикладных задач в механике сплошной среды. Самостоятельно осуществлять построение и анализ математических моделей в теории упругости, решать статические и динамические задачи теории пластин и оболочек.	- умение формулировать задачи вариационного исчисления - умение находить экстремали и исследовать их характер;	- способность формулировать задачи вариационного исчисления - способность находить экстремали и исследовать их характер;
	Владеет	Навыками формализации поставленной задачи, экспериментальными и теоретическими методами построения математических моделей. Основными методами математического и численного моделирования, применяющихся для моделирования в механике сплошной среды. Основными методами стационарной динамики деформируемых тел, нелинейной теории упругих оболочек.	- владение прямыми методами вариационного исчисления: метод Ритца и др. - владение методологией использования прямых методов для решения задач механики	- способность сформулировать и описать суть прямых методов вариационного исчисления: метода Ритца и др. - способность использовать прямые методы вариационного исчисления при решении задач механики
ПК-7 готовностью овладевать новыми современными методами и средствами проведения экспериментальных исследований по динамике и прочности, устойчивости, надежности, трению и износу машин и приборов; обрабатывать,	Знает	о вариационных принципах механики и физики	- знание основных определений и понятий вариационных принципов механики и физики	- способность дать определения основных понятий вариационных принципов механики и физики; - способность раскрыть основные положения вариационных принципов механики и физики
	Умеет	получить общее решение краевых задач для дифференциальных уравнений различными методами	- умение получить общее решения уравнения Эйлера, - умение получить необходимые условия минимума в задаче Больца - умение	- способность получить общее решения уравнения Эйлера, - способность получить необходимые условия минимума в задаче Больца - способность

анализировать и обобщать результаты экспериментов			использовать метод вариаций -умение применить численные методы вариационного исчисления: Ритца, метод Галеркина к решению задач различной природы	использовать метод вариаций -способность применить численные методы вариационного исчисления: Ритца, метод Галеркина к решению задач различной природы
	Владеет	методологией применения методов вариационного исчисления и математической физики к постановке, решению и исследованию различных задач, имеющих естественнонаучное содержание	- владение методологией применения методов вариационного исчисления и математической физики к постановке различных задач, имеющих естественнонаучное содержание - владение методами решения и исследования задач прикладной механики, используя положения вариационного исчисления и математической физики	- способность применить методы вариационного исчисления и математической физики к постановке различных задач, имеющих естественнонаучное содержание - способность применить методы вариационного исчисления и математической физики к решению и исследованию задач прикладной механики

## Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

### Оценочные средства для промежуточной аттестации

#### Перечень типовых вопросов к экзамену

1. Классическая задача вариационного исчисления, задача о брахистохроне, о наименьшей площади поверхности вращения. Понятие вариации кривой и функционала.

2. Основная лемма вариационного исчисления; необходимые условия экстремума интегрального функционала; необходимые условия минимума второго порядка.

3. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от  $y'$  или зависит от  $y'$  линейно.

4. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от  $x$  и  $y$  или не зависит от  $y$ .

5. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от  $x$ ; подынтегральная функция зависит только от  $y$ ; подынтегральная функция имеет вид:

6. Классическая задача вариационного исчисления: решение задачи о минимальной площади поверхности вращения.

7. Классическая задача вариационного исчисления: решение задачи о брахистохроне.

8. Задача вариационного исчисления для случая подынтегральной функции, зависящей от производных высших порядков.

9. Задача Больца. Необходимые условия минимума в задаче Больца. Многомерный случай задачи Больца. Задача со смешанными ограничениями.

10. Задача Больца со старшими производными.

11. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума в изопериметрической задаче.

12. Задача Дидоны.

13. Изопериметрическая задача с ограничениями типа неравенств; с функционалом типа Больца; с подвижными концами.

14. Необходимые условия сильного минимума в классической задаче вариационного исчисления.

15. Сопряженные точки, условие Якоби, поле экстремалей.

16. Достаточные условия минимума в классической задаче вариационного исчисления.

17. Теорема включения.

18. Инвариантный интеграл Гильберта.

19. Теорема об огибающей и необходимое условие экстремума.

20. Вторая вариация интегрального функционала.

21. Аналитический вариант условия Якоби.

22. Необходимые условия Вейерштрасса и Лежандра.



23. Понятие поля экстремалей.
24. Достаточные условия Вейерштрасса.
25. Уравнение Гамильтона–Якоби.
26. Потенциальная энергия.
27. Кинетическая энергия.
28. Связи. Обобщенные координаты.
29. Обобщенные скорости. Лагранжиан.
30. Принцип Гамильтона
31. Уравнения движений Лагранжа.
32. Обобщенные моменты. Гамильтоновы уравнения движения.
33. Гамильтониан. Канонические уравнения
34. Скобка Пуассона.
35. Функция поля. Уравнение Гамильтона–Якоби.
36. Вариационный метод в задаче на собственные значения.
37. Минимаксное свойство собственных чисел.
38. Существование минимума квадратичного функционала.
39. Метод Ритца решения задачи вариационного исчисления.
40. Метод Галеркина решения задачи вариационного исчисления.
41. Понятие сплошной среды.
42. Лагранжев и Эйлеров подход к описанию движения сплошной среды.
43. Полная (индивидуальная, субстанциональная), местная (локальная) и конвективная производная по времени.
44. Ковариантные и контравариантные векторы базиса. Ковариантные и контравариантные компоненты векторов.
45. Тензоры.
46. Производная по направлению. Градиент.
47. Ковариантное дифференцирование.
48. Векторные линии, линии тока, траектории. Векторные поверхности.

49. Деформирование сплошной среды. Тензоры деформаций Грина и Альманси.

50. Вектор перемещений.

51. Тензор скоростей деформаций.

52. Формула Коши-Гельмгольца.

53. Дивергенция.

54. Скорость относительного объёмного расширения.

55. Потенциал. Потенциальное движение.

56. Циркуляция. Теорема Стокса.

57. Кинематическая теорема Гельмгольца.

58. Теорема Остроградского-Гаусса.

59. Формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объёму.

60. Кинематическая теорема Кельвина.

61. О законах сохранения и теореме Нётер.

62. Закон сохранения массы.

63. Уравнение неразрывности.

64. Закон сохранения количества движения (импульса).

65. Формула Коши для вектора напряжений.

66. Тензор напряжений.

67. Дифференциальное уравнение движения.

### Типовые задания к экзамену

В задачах 1 – 6 найти все экстремали функционала  $J(y)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям.

$$1. J(y) = \int_0^1 \left( (y')^2 + xy \right) dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$2. J(y) = \int_0^{\pi} \left( 4y \cos x + (y')^2 - y^2 \right) dx; \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$3. J(y) = \int_1^e (2y - x^2 \cdot (y')^2) dx; \quad y(1) = e; \quad y(e) = 0.$$

$$4. J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + yy' + 12xy) dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$5. J(y) = \int_0^1 (e^y + xy') dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

$$6. J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + y^2 + xy) dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

В задачах 7 – 10 найти функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x) \in C^1([x_1, x_2])$ , на которых может достигаться экстремум функционала  $J(y_1, y_2)$  при указанных граничных условиях.

$$7. J(y_1, y_2) = \int_0^\pi ((y_1')^2 - (y_2')^2 + 2y_1' \cdot y_2' + 2y_1 \cos x + 2y_2^2) dx;$$

$$y_1(0) = -1; \quad y_2(0) = y_2(\pi) = 0; \quad y_1(\pi) = 1 + \pi.$$

$$8. J(y_1, y_2) = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 1; \quad y_1(1) = \frac{3}{2}; \quad y_2(1) = 1.$$

$$9. J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left( \frac{(y_1')^2 + (y_2')^2}{2} + 4y_1 \cdot y_2 \right) dx;$$

$$y_1(0) = 0; \quad y_2(0) = y_1(1) = 1; \quad y_2(1) = \frac{1}{2}.$$

$$10. J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left( \frac{(y_1')^2 + (y_2')^2}{2} - y_1 \cdot y_2 \right) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0; \quad y_1(1) = y_2(1) = 1.$$

В задачах 11-14 найти экстремали следующих функционалов в задачах Больца.

$$11. J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx + 4y^2(0) - 5y^2(1).$$

$$12. J(y) = \int_1^2 (x \cdot (y')^2 + y) dx; \quad y(1) = 0; \quad y(2)$$

– свободный конец.

$$13. J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2(y')^2 + y \cdot y' - 8y^2) dx + y(0) + y^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$14. J(y) = \int_1^2 ((y')^2 + 12xy) dx + 12y(1) + y^2(2).$$

В задачах 15-17 найти допустимые экстремали в изопериметрических задачах.

$$15. J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1; \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

$$16. J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx; \quad y(0) = y(1) = 0; \quad \int_0^1 y dx = 1. = 0.$$

$$17. J(y) = \int_0^{\pi} (y')^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(\pi) = 1; \quad \int_0^{\pi} y \sin x dx = 0.$$

18. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$J(y) = \int_0^1 \left( x^3 (y'')^2 + 100xy^2 - 20xy \right) dx \rightarrow \inf; \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

Решение можно искать в виде:  $y_n(x) = (x-1)^2 \cdot (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)$ .

Провести вычисления при  $n = 1$  и  $n = 2$ .

19. Найти методом Рунца приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$J(y) = \int_0^2 \left( (y')^2 + y^2 - 2xy \right) dx \rightarrow \inf, \quad y(0) = y(2) = 0$$

и сравнить его с точным решением. Приближенное решение можно искать в

виде  $y_n(x) = x \cdot (1-x) \cdot (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)$ .

Провести вычисления при  $n = 0$  и  $n = 1$ .

20. При изучении колебаний заделанного клина постоянной толщины приходится исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_0^1 \left( a \cdot x^3 \cdot (y'')^2 - b \cdot x \cdot y^2 \right) dx \rightarrow \inf, \quad y(1) = y'(1) = 0,$$

где  $a$  и  $b$  - положительные постоянные. За координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям, можно взять  $(x-1)^2$ ;  $(x-1)^2 \cdot x$ ;  $(x-1)^2 \cdot x^2$ ; ...;  $(x-1)^2 \cdot x^{k-1}$ ; ..., следовательно,

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k (x-1)^2 x^{k-1}.$$

Вычисления провести при  $n = 2$ .

### Принцип составления экзаменационного билета

Первые два вопроса являются теоретическими и предназначены для оценивания порогового уровня освоения дисциплины. Третий вопрос, в котором необходимо решить задачу, предназначен для оценки продвинутого и высокого уровня освоения.

### Пример экзаменационного билета

1. Основная лемма вариационного исчисления; необходимые условия экстремума интегрального функционала; необходимые условия минимума второго порядка.
2. Метод Ритца решения задачи вариационного исчисления.
3. Найти все экстремали функционала  $J(y)$  удовлетворяющие заданным граничным условиям.

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (y'')^2 - (y')^2 \right) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

### Критерии выставления оценки студенту на экзамене по дисциплине

Баллы (рейтинговая оценка)	Оценка экзамена (стандартная)	Требования к сформированным компетенциям
86-100	«отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту: обнаружившему всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умение применять его и владение изученным материалом; излагающему ответы полно, последовательно и логически стройно; усвоившему взаимосвязь основных и производных понятий; проявившему творческие способности в знании, умении и владении изученным материалом; знающему, умеющему и владеющему навыками приемами выполнения практических заданий и профессиональных задач; показывающему знакомство с основной и дополнительной учебной литературой; способному самостоятельно пополнять и развивать знания, умения и навыки в профессиональной деятельности
76-85	«хорошо»	Оценка «хорошо» выставляется студенту: обнаружившему системное знание, хорошее умение и владение учебным материалом; излагающему ответы грамотно и по существу заданных вопросов; не допускающему грубых неточностей; умеющему применять основные методики решения стандартных задач; способному самостоятельно пополнять умения и навыки в учебной деятельности
61-75	«удовлетворительно»	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту: обнаружившему знание учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и профессиональной

		деятельности; усвоившему взаимосвязь основных понятий; допускающему в ответах неточности, испытывающему затруднения при решении практических задач, способному ликвидировать пробелы в знаниях и умениях под руководством преподавателя
0-60	<i>«неудовлетворительно»</i>	<u>Оценка «неудовлетворительно»</u> выставляется студенту: обнаружившему большие пробелы в знании основного учебного материала; допускающему принципиальные ошибки в изложении материала или в ответах на вопросы; не умеющему применять имеющиеся знания в решении практических и профессиональных задач; не владеющему основными методиками решения задач или испытывающему значительные затруднения в этом; изучившим материал в объеме, недостаточном для дальнейшей учебы и профессиональной деятельности; не могущему продолжить обучение без дополнительных занятий дисциплине

### **Оценочные средства для текущей аттестации**

Текущая аттестация по дисциплине «Вариационные принципы механики сплошных сред» проводится в форме контрольных мероприятий (устного опроса, расчетно-графического задания, контрольных работ) по оцениванию фактических результатов обучения студентов и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
- степень усвоения теоретических знаний;
- уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;
- результаты самостоятельной работы.

### **Вопросы для устных опросов по дисциплине «Вариационные принципы механики сплошных сред»**

1. Введение: задачи о поиске экстремума в теории управления, пример задачи оптимального управления, общее представление о вариационном исчислении.
2. Примеры содержательных задач о поиске экстремума интегрального функционала (о минимуме определенного интеграла, брахистохроне, о минимальной поверхности вращения и др.).
3. Понятие функционала. Функционалы в метрических и линейных пространствах.
4. Формализованные задачи вариационного исчисления. Пространство  $C^1[a, b]$ : норма, метрика, близость элементов. Классификация экстремумов.
5. Условия локального экстремума функционалов.
6. Простейшая основная задача вариационного исчисления. Необходимое условие экстремума.
7. Основные леммы классического вариационного исчисления (Лагранжа, Дюбуа-Реймона).
8. Уравнение Эйлера (в двух формах).
9. Экстремали в регулярном и сингулярном случаях. Теорема Гильберта.
10. Случаи упрощения уравнений Эйлера.
11. Простейшая вариационная задача с подвижными границами. Выражение для дифференциала по параметру.
12. Простейшая задача с подвижными границами. Необходимые условия экстремума для случая свободных границ и условия трансверсальности.
13. Экстремали с изломами. Условия Вейерштрасса - Эрдмана.
14. Вторая вариация функционала. Основные леммы.
15. Вторая вариация функционала. Необходимое условие Лежандра.
16. Достаточные условия слабого и сильного относительного экстремума.
17. Необходимые условия Вейерштрасса сильного относительного экстремума. Принцип минимума в задачах на сильный экстремум.



18. Простейшая вариационная задача с несколькими неизвестными. Необходимое условие экстремума. Регулярные экстремали.

19. Каноническая форма системы дифференциальных уравнений Эйлера.

20. Вариационная задача Лагранжа на условный экстремум.

21. Задача Лагранжа со связями в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $x' = f(t, x)$ , в том числе в частной ситуации с функционалом  $\int_a^b F[t, x(t)]dt$ .

22. Метод (правило) множителей Лагранжа в изопериметрических задачах.

23. Уравнения движений Лагранжа. Первый интеграл.

24. Обобщенные моменты. Гамильтоновы уравнения движения.

25. Проблема минимума квадратичного функционала.

26. Минимаксное свойство собственных чисел.

27. Проекционные методы решения задач вариационного исчисления.

### **Критерии оценки устного опроса**

✓ 100-85 баллов выставляется студенту, обнаружившему всестороннее, систематическое и глубокое знание программного материала, умение применять его и владение изученным материалом; излагающему ответы полно, последовательно и логически стройно; усвоившему взаимосвязь основных и производных понятий; проявившему творческие способности в знании, умении и владении изученным материалом; знающему, умеющему и владеющему навыками приемами выполнения практических заданий и профессиональных задач; показывающему знакомство с основной и дополнительной учебной литературой; способному самостоятельно пополнять и развивать знания, умения и навыки в профессиональной деятельности

✓ 85-76 баллов выставляется студенту, обнаружившему системное знание, хорошее умение и владение учебным материалом; излагающему ответы грамотно и по существу заданных вопросов; не допускающему грубых неточностей; умеющему применять основные методики решения

стандартных задач; способному самостоятельно пополнять умения и навыки в учебной деятельности

✓ 75-61 балл выставляется студенту, обнаружившему знание учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и профессиональной деятельности; усвоившему взаимосвязь основных понятий; допускающему в ответах неточности, испытывающему затруднения при решении практических задач, способному ликвидировать пробелы в знаниях и умениях под руководством преподавателя

✓ 60-50 баллов выставляется студенту, обнаружившему большие пробелы в знании основного учебного материала; допускающему принципиальные ошибки в изложении материала или в ответах на вопросы; не умеющему применять имеющиеся знания в решении практических и профессиональных задач; не владеющему основными методиками решения задач или испытывающему значительные затруднения в этом.