



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

«СОГЛАСОВАНО»

Руководитель ОП

(подпись)

Голик С.С.

«УТВЕРЖДАЮ»



Заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики

(подпись)

Короченцев В.В.

«1» 05 2019 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Теория групп**  
**Направление подготовки – 03.03.02 Физика**  
**Экспериментальная физика**  
**Форма подготовки очная**

курс 3 семестр 5  
лекции 18 час.  
практические занятия 36 час.  
лабораторные работы 0 час.  
в том числе с использованием МАО лек. 4/пр.32 час.  
в том числе в электронной форме лек. 0/пр. 0час.  
всего часов аудиторной нагрузки 54час.  
в том числе с использованием МАО 36 час.  
самостоятельная работа 54 час.  
в том числе на подготовку к экзамену 0 час.  
курсовая работа / курсовой проект нет  
зачет 5 семестр  
экзамен не предусмотрен

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта, самостоятельно установленного ДВФУ, утвержденного приказом ректора от 07.07.2015 № 1282

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры общей и экспериментальной физики, протокол № 8 от «27» 05 2019 г.

Заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики В.В. Короченцев  
Составитель: к.ф.-м.н., доцент Гой А.А.

**Владивосток**  
**2019**

**Оборотная сторона титульного листа РПУД**

**I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

## **Аннотация к рабочей программе дисциплины «Теория групп»**

Курс «Теория групп» предназначен для студентов очной формы обучения направления подготовки 03.03.02 «Физика», профиль «Экспериментальная физика». Трудоемкость дисциплины – 3 зачетных единицы, 108 академических часов (лекций – 18 часов, практических занятий – 36 часов, самостоятельной работы – 54 часов). Курс относится к базовой части базового блока обязательных дисциплин (Б1.Б.11.07) и читается в 5 семестре (III курс).

Для освоения курса «Теория групп» необходимо обладать знаниями по курсам высшей математики «Математический анализ», «Линейная алгебра» и «Элементы функционального анализа». Знания, навыки и умения, полученные при изучении курса «Теория групп» будут необходимы для освоения материала по курсам теоретической физики, в особенности «Квантовая механика» и «Квантовая теория поля», а также курса «Симметрия физических систем».

Применение методов теории групп – эффективный качественный метод исследования различных физических систем. Не вызывает сомнений необходимость изучения на физическом уровне строгости этой математической дисциплины для студентов-физиков. От понимания теории групп во многом зависит общий уровень подготовки и практическая деятельность будущих специалистов-физиков, их ориентация в проблемах современной физики.

В связи с ограниченностью учебного времени, отводимого на этот курс, необходимо ограничиться лишь наиболее важными вопросами математического аппарата теории групп и уделить достаточное время физическим приложениям методов теории групп.

**Цель:** изложение базового материала по теории групп, который широко используется в современной теоретической физике и знание которого необходимо для понимания соответствующей научной литературы и проведения самостоятельных исследований.

### **Задачи:**

- познакомить студентов с базовым математическим аппаратом, основными понятиями и теоремами теории групп, с теории представлений групп;
- рассмотреть широкий круг приложений теории групп в теоретической физике, причем обсуждение приложений должно сопровождаться более детальным изучением соответствующих конкретных групп;

- обеспечить теоретическую подготовку и практические навыки для изучения других математических курсов и курсов теоретической физики (квантовая механика, теория гравитации и теория квантовых и классических полей).

Для успешного изучения дисциплины «Теория групп» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

- ОК-5 – способность использовать современные методы и технологии (в том числе информационные) в профессиональной деятельности;
- ОПК-1 – способность использовать в профессиональной деятельности базовые естественно-научные знания, включая знания о предмете и объектах изучения, методах исследования, современных концепциях, достижениях и ограничениях естественных наук (прежде всего химии, биологии, экологии, наук о земле и человеке).

Планируемые результаты обучения по данной дисциплине (знания, умения, владения), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы, характеризуют этапы формирования следующих компетенций (общефессиональные компетенции):

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-2	Знает	<ul style="list-style-type: none"> <li>• основные определения и понятия теории групп и их представлений, матричные представления групп, свойства генераторов и структурных констант;</li> <li>• структуру неприводимых представлений конечных групп;</li> </ul>
	Умеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>• решать задачи по всем разделам курса, использовать знания для решения задач теоретической физики и в образовательной деятельности;</li> <li>• анализировать приводимые представления, ставить и решать физические задачи методами теории групп;</li> </ul>
	Владеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>• навыками использования предметной терминологии при решении различных задач математики и теоретической физики;</li> <li>• навыками применения мощных методов теории симметрий и теории групп, необходимых для решения различных задач, возникающих как в математике, так и в теоретической физике.</li> </ul>

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Теория групп» применяются следующие методы активного/ интерактивного обучения:

- проблемные лекции;
- семинар по решению задач в диалоговом режиме;
- работа с текстом в рамках самостоятельной работы.

## **I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

### **Раздел I. Симметрии и абстрактные группы (10 час.)**

#### **Тема 1. Симметрия в физике (4 час., проблемная лекция)**

Общее определение симметрии. Симметрия в математике (симметрии равностороннего треугольника, правильные многогранники). Симметрия в физике (классическая физика, спонтанное нарушение симметрии, физика микромира, физика элементарных частиц, космология).

#### **Тема 2. Абстрактные группы (2 час.)**

Определение и простейшие теоремы. Классификация и примеры групп (абелевы группы, циклическая группа, группа  $D_3$ ). Основные понятия и теоремы (сдвиг по группе, подгруппа, порядок элемента, сопряженные совокупности, сопряженные элементы и класс, инвариантная подгруппа, фактор-группа, изоморфизм и гомоморфизм).

#### **Тема 3. Группа перестановок (2 час.)**

Принцип тождественности частиц, принцип запрета Паули. Координатная с спиновые волновые функции. Схемы Юнга. Группа перестановок. Теорема Кэли. Циклы. Циклическая структура перестановок. Оператор перестановки, чётность перестановки.

#### **Тема 4. Векторные пространства и линейные операторы (2 час.)**

Векторные пространства. Скалярное произведение. Ортонормированный базис. Евклидово  $n$ -мерное пространство. Функциональные пространства. Линейные операторы. Матричное представление. Сопряженный оператор. Унитарный оператор. Обратный оператор. Трансформированный оператор. Индуцированные преобразования функций.

## **Раздел II. Теория представлений групп (8 час.)**

### **Тема 5. Представления групп (2 час.)**

Определение представления группы. Матричные представления. Эквивалентные представления. Теорема Машке. Пример: группа  $D_3$ . Инвариантные подпространства. Приводимые и неприводимые представления.

### **Тема 6. Неприводимые представления (2 час.)**

Неприводимые представления группы. Леммы Шура. Неприводимые представления абелевых групп. Соотношения ортогональности. Неприводимые представления группы  $D_3$ . Характеры представлений и их свойства. Критерий неприводимости.

### **Тема 7. Непрерывные группы (2 час.)**

Примеры непрерывных групп. Инфинитезимальные операторы. Перестановочные соотношения. Группа двумерных вращений  $R_2$ . Неприводимые представления группы  $R_2$ . Двумерное представление группы  $R_2$ . Инфинитезимальные операторы группы  $R_2$ . Преобразования функций, индуцированные  $R_2$ . Активное и пассивное истолкование вращений.

### **Тема 8. Трёхмерные вращения (2 час.)**

Изотропия пространства и момент импульса. Трёхмерные вращения: углы Эйлера. Матрица поворота. Генераторы поворотов. Группа трёхмерных вращений  $R_3$ . Операторы момента импульса. Неприводимые представления группы  $R_3$

## **II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

### **Практические занятия (36 час.)**

**Занятие 1. Абстрактные группы (4 час., семинар по решению задач в диалоговом режиме)**

1. Образуют ли группу следующие множества матриц, если в качестве группового умножения взять обычное умножение матриц?

$$a) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \prod a_{ii} \neq 0;$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$b) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0;$$

2. Являются ли две группы шестого порядка  $G$  и  $R$  с таблицами умножения, приведёнными ниже, изоморфными?

E	G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>
G <sub>1</sub>	E	G <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>
G <sub>2</sub>	G <sub>5</sub>	E	G <sub>4</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>1</sub>
G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>	E	G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>
G <sub>4</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>5</sub>	E
G <sub>5</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>1</sub>	E	G <sub>4</sub>

E	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>
R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	E	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>3</sub>
R <sub>2</sub>	E	R <sub>1</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>
R <sub>3</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>4</sub>	E	R <sub>2</sub>	R <sub>1</sub>
R <sub>4</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>1</sub>	E	R <sub>2</sub>
R <sub>5</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>1</sub>	E

## Занятие 2. Абстрактные группы (4 час., семинар по решению задач в диалоговом режиме)

1. Постройте таблицу умножения группы  $D_4$  – собственных совмещений (вращений) плоского квадрата. Используя эту таблицу
  - найдите порядки всех элементов;
  - найдите все подгруппы группы  $D_4$ ;
  - разбейте группу на сопряженные совокупности справа и слева;
  - разбейте группу на классы взаимно сопряженных элементов;
  - найдите инвариантные подгруппы;
  - составьте таблицу умножения для соответствующей фактор-группы.
2. Доказать, что если группа  $H$  гомоморфна группе  $G$ , то:
  - единичному элементу группы  $G$  соответствует единичный элемент группы  $H$ ;
  - взаимно обратным элементам группы  $G$  соответствуют взаимно обратные элементы группы  $H$ ;
  - все элементы группы  $G$ , которые соответствуют единичному элементу группы  $H$ , образуют инвариантную подгруппу  $G$ ;
  - элементы группы  $G$ , соответствующие элементу  $H_i$ , образуют сопряжённую совокупность,  $NG_i$ , где  $G_i$  – любой из элементов группы  $G$ , соответствующий элементу  $H_i$ , а  $N$  – инвариантная подгруппа, соответствующая единичному элементу группы  $H$ .

**Занятие 3. Абстрактные группы (4 час., семинар по решению задач в диалоговом режиме)**

1. Доказать, что порядок группы является целым кратным порядка любого её элемента.
2. Доказать, что все элементы одного класса имеют один и тот же порядок.
3. Доказать, что центр группы всегда является её подгруппой.

**Занятие 4. Векторные пространства и линейные операторы (4 час., семинар по решению задач в диалоговом режиме)**

1. Пусть  $E_3$  – 3-мерное евклидовое пространство. Покажите, что если  $E_1$  – его одномерное подпространство, заданное векторами  $\{a, a, 0\}$ , то его ортогональное дополнение  $E_2$  определяется векторами  $\{b, -b, c\}$ . Представьте вектор  $\{1, 2, 3\}$  в виде суммы двух векторов, один из которых принадлежит подпространству  $E_1$ , а второй – подпространству  $E_2$ .
2. Пусть  $R$  – оператор поворота вокруг оси  $z$  на  $45^\circ$ , а  $T$  – оператор поворота вокруг оси  $x$  на  $90^\circ$ . Покажите геометрически, что  $TRT^{-1}$  есть оператор поворота вокруг оси  $y$  против часовой стрелки на  $45^\circ$ . Подтвердите этот результат, перемножая матрицы соответствующих операторов в базисе  $e_x, e_y, e_z$ .
3. Пусть преобразование  $R$  есть поворот вокруг оси  $z$  на  $90^\circ$ . Для трёх единичных векторов  $e_i$ , направленных вдоль осей  $x, y$  и  $z$ , найдите  $Re_i = e_i'$ . Вычислите индуцированное преобразование  $T(R) \psi(r)$ , где  $\psi(r)$  есть  
а)  $x$ ,    б)  $y$ ,    в)  $x^2$ ,    г)  $xy$ .  
Выполните то же самое, если  $R$  – поворот вокруг оси  $z$  на  $45^\circ$ .

**Занятие 5. Представления групп (4 час., семинар по решению задач в диалоговом режиме)**

1. Постройте представление группы  $D_4$  – собственных совмещений (вращений) плоского квадрата, при помощи матриц  $3 \times 3$  с базисными векторами  $e_x, e_y, e_z$ ; ось симметрии четвёртого порядка совпадает с осью  $z$ . Покажите, пользуясь найденными матрицами, что оно сводится к одномерному и двумерному представлению.

**Занятие 6. Неприводимые представления (4 час., семинар по решению задач в диалоговом режиме)**

1. Найдите характеры представлений (трехмерного, двумерного и одномерного) группы  $D_4$  – собственных совмещений (вращений) плоского квадрата. Проверьте, удовлетворяют ли данные представления соотношениям ортогональности и критерию неприводимости.



2. Определите характеры неприводимых представлений  $\chi^{(m)}(C^n)$ , где  $m = 0; 1; 2; \dots, (n - 1)$ , циклической группы порядка  $n$ .

**Занятие 7. Непрерывные группы (4 час., семинар по решению задач в диалоговом режиме)**

1. Покажите, что функции  $x \pm iy$  преобразуются по представлениям  $T^{(\pm 1)}$  группы  $R_2$ . Классифицируйте шесть квадратичных функций ( $x^2; y^2; z^2; xy; xz; yz$ ) переменных  $x, y$  и  $z$  в соответствии с их трансформационными свойствами по отношению к группе  $R_2$ .

**Занятие 8. Трёхмерные вращения (4 час., семинар по решению задач в диалоговом режиме)**

1. Исходя из выражения для оператора трёхмерного поворота

$$\mathbf{r}' = R_{\mathbf{k}}(\alpha) \mathbf{r} \approx \mathbf{r} + \sum_{q=x,y,z} \alpha_q [\mathbf{e}_q \times \mathbf{r}], \quad \alpha \ll 1,$$

установите вид генераторов  $X_x; X_y; X_z$ . Проверьте выполнение коммутационных соотношений.

2. Исходя из точного выражения для оператора трёхмерного поворота

$$\mathbf{r}' = R_{\mathbf{k}}(\alpha) \mathbf{r} = \mathbf{r} \cos \alpha + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} (1 - \cos \alpha) + [\mathbf{k} \times \mathbf{r}] \sin \alpha,$$

установите вид матриц поворота вокруг координатных осей и генераторов  $X_x; X_y; X_z$ .

**Занятие 9. Зачётное занятие (4 час.)**

### **III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Теория групп» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

#### IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Тема 1. Симметрия в физике	ОПК-2	знает общее определение симметрии; историю возникновения теории групп;	УО-2 коллоквиум	Вопрос № 1
			умеет анализировать симметрию естественных и искусственных объектов;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками использования предметной терминологии.	ПР-2 контрольная работа	
2	Тема 2. Абстрактные группы	ОПК-2	знает определение группы; примеры групп; классификацию и примеры групп	УО-1 собеседование	Вопросы № 2 – 4
			умеет доказывать простейшие теоремы; анализировать конкретные группы;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками использования теории групп при решении различных задач.	ПР-2 контрольная работа	
3	Тема 3. Группа перестановок	ОПК-2	знает определение группы перестановок; свойства группы перестановок;	УО-1 собеседование	Вопрос № 5
			умеет определять циклическую структуру перестановок;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками использования группы перестановок при решении задач квантовой механики.	ПР-2 контрольная работа	

4	Тема 4. Векторные пространства и линейные операторы	ОПК-2	знает определение векторных пространств; определение и свойства линейных операторов;	УО-1 собесе- дование	Вопрос № 6
			умеет выбирать и использовать ортонормированные базисы; выполнять базовые операции с матричными представлениями операторов;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками применения методов функционального анализа в теории групп;	ПР-2 контро- льная работа	
5	Тема 5. Представления групп	ОПК-2	знает определение представления группы; матричные представления групп;	УО-1 собесе- дование	Вопросы № 7 – 8
			умеет выделять инвариантные подпространства; строить матричные представления конечных групп;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками применения методов теории представлений групп для решения различных задач.	ПР-2 контро- льная работа	
6	Тема 6. Неприводимые представления	ОПК-2	знает определение неприводимых представлений групп; определение характеров представления и их свойств;	УО-1 собесе- дование	Вопросы № 9 – 11
			умеет разлагать представления групп на неприводимые; вычислять характеры представлений;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками применения методов теории представлений групп для решения различных задач.	ПР-2 контро- льная работа	
7	Тема 7. Непрерывные группы	ОПК-2	знает определение и свойства непрерывных групп;	УО-1 собесе- дование	Вопросы № 12 – 13

			определение и свойства инфинитезимальных операторов;		
			умеет определять инфинитезимальные операторы непрерывных групп;	ПР-11 решение задач	
			владеет методами применения теории непрерывных групп в теоретической физике.	ПР-2 контрольная работа	
8	Тема 8. Трёхмерные вращения	ОПК-2	знает способы параметризации трёхмерных вращений; неприводимые представления группы трёхмерных вращений;	УО-1 собеседование	Вопросы № 14 – 16
			умеет находить генераторы группы трёхмерных вращений;	ПР-11 решение задач	
			владеет методами использования представлений группы трёхмерных вращений в квантовой механике.	ПР-2 контрольная работа	

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

## **V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Основная литература**

*(электронные и печатные издания)*

1. Каргаполов, М.И. Основы теории групп [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 288 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/177>.
2. Ляпин, Е.С. Упражнения по теории групп [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Е.С. Ляпин, А.Я. Айзенштат, М.М. Лесохин. – Электрон. дан. –

- Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 272 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/528>.
3. Наймарк, М.А. Теория представлений групп [Электронный ресурс] : учеб. пособие – Электрон. дан. – Москва : Физматлит, 2010. – 576 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2751>.
  4. Курош А.Г. Теория групп. Москва : Физматлит, 2011. – 806 с. 4 экз. <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:662750&theme=FEFU>

### **Дополнительная литература** (печатные и электронные издания)

1. Эллиот Дж., Добер П. Симметрия в физике. М.: Мир, 1983. (В двух томах: т.1 – 364 с., т.2, – 416 с.) – по 3 экз. <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:48667&theme=FEFU>  
<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:48668&theme=FEFU>
2. Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Изд. Наука, 1971 г. – 318 с. 4 экз. <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:81948&theme=FEFU>
3. Петрашень М.В., Трифонов Е.Д. Применение теории групп в квантовой механике. М.: Изд. Наука, 1967 г. – 308 с. 1 экз. <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:684093&theme=FEFU>

### **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. <http://www.knigafund.ru> – электронно-библиотечная система «КнигаФонд»
2. <http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/groups.htm> – Павел С.А. Введение в теорию групп.
3. <http://nuclphys.sinp.msu.ru/thgr/> – Замиралов В.С. Основные понятия теории групп и их представлений и некоторые приложения к физике частиц.
4. [http://www.ph4s.ru/book\\_mat\\_teorgrup.html](http://www.ph4s.ru/book_mat_teorgrup.html) – библиотека по теории групп.

## **Перечень информационных технологий и программного обеспечения**

Лекционный материал оформляется в виде презентаций, подготовляемых в издательской системе LaTeX, класс Beamer. Для подготовки лекционных примеров и заданий для самостоятельной работы использовалась система компьютерной математики Maxima.

## **VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

На первой лекции студентам сообщается список литературы по курсу (основной и дополнительной, а также доступные ресурсы сети Internet) с подробной характеристикой каждого источника. Также сообщается структура курса и условия сдачи зачёта.

Лекционные занятия ориентированы на освещение основных тем в каждом разделе курса и призваны ориентировать студентов в предлагаемом материале, заложить научные основы для дальнейшей самостоятельной работы. Студенты имеют доступ к подготовленным преподавателем презентациям, используемых при чтении теоретического курса и содержащих минимально необходимый материал. Дополнительная информация по изучаемым разделам может быть получена при самостоятельном изучении рекомендованной литературы.

В ходе практических занятий по решению задач проверяется усвоение студентами теоретического материала и отрабатывается его практическое применение.

Две теоретические контрольные стимулируют студентов на детальное изучение материала.

## **VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

При чтении лекций по дисциплине «Теория групп» используется мультимедийное оборудование для демонстрации презентаций теоретического материала. Эти презентации (содержащие также задания для

самостоятельной работы) рассылаются студентам по электронной почте для обеспечения самостоятельной работы по курсу лекций и подготовке к практическим занятиям.

Для материально-технического обеспечения курса лекций необходимы:

- персональный компьютер Lenovo ThinkPad E125 с лицензионным и свободным программным обеспечением – MS PowerPoint 2007 и Acrobat Reader XI;
- проектор Benq MP770;
- переносной экран.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессиональ-  
ного образования

**«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)**

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ  
РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ  
по дисциплине «Теория групп»  
Направление подготовки – 03.03.02 Физика  
Экспериментальная физика  
Форма подготовки очная**

**Владивосток  
2019**



## План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

<b>№ п/п</b>	<b>Дата/сроки выполнения</b>	<b>Вид самостоятельной работы</b>	<b>Примерные нормы времени на выполнение</b>	<b>Форма контроля</b>
1.	Недели 1 – 2	Изучение теоретического материала, подготовка к решению задач	10 час.	Решение задач на практических занятиях
2.	Недели 3 – 4	Изучение теоретического материала, подготовка к решению задач	6 час.	Решение задач на практических занятиях
3.	Недели 5 – 6	Изучение теоретического материала, подготовка к решению задач	6 час.	Решение задач на практических занятиях
4.	Недели 7 – 8	Подготовка к теоретической контрольной №1	6 час.	Теоретическая контрольная №1
5.	Недели 9 – 10	Изучение теоретического материала, подготовка к решению задач	6 час.	Решение задач на практических занятиях
6.	Недели 11 – 12	Изучение теоретического материала, подготовка к решению задач	6 час.	Решение задач на практических занятиях
7.	Недели 13 – 14	Изучение теоретического материала, подготовка к решению задач	6 час.	Решение задач на практических занятиях
8.	Недели 15 – 16	Подготовка к теоретической контрольной №2	6 час.	Теоретическая контрольная №2
9.	Недели 17 – 18	Подготовка к зачету	6 час.	Зачет по теоретическому курсу

## **Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению**

Основное содержание самостоятельной работы по курсу «Теория групп» – подготовка к практическим занятиям (решению задач).

Самостоятельная работа помогает студентам:

1) овладеть знаниями:

- чтение текста учебника, первоисточника, дополнительной литературы и т.д.;
- составление плана текста, графическое изображение структуры текста, конспектирование текста, выписки из текста и т.д.;
- работа со справочниками и другой справочной литературой;
- использование компьютерной техники и Интернета;

2) закрепить и систематизировать знания:

- работа с конспектом лекции;
- решение задач;
- обработка текста, повторная работа над учебным материалом учебника, первоисточника, дополнительной литературы, обучающих видеофильмов.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности и уровня умений студентов.

Контроль результатов самостоятельной работы студентов должен осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия и внеаудиторную самостоятельную работу студентов по дисциплине, может проходить в письменной, устной или смешанной форме.

### **Требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы**

Основным результатом самостоятельной работы по дисциплине «Теория групп» является решение задач студентами на практических занятиях при минимальной помощи преподавателя.

## **Критерии оценки выполнения самостоятельной работы**

Общими критериями оценки результатов самостоятельной работы студентов являются:

- уровень освоения учебного материала;
- умение активно использовать электронные образовательные ресурсы, находить требующуюся информацию, изучать ее и применять на практике;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- умение ориентироваться в потоке информации, выделять главное;
- умение сформировать свою позицию, оценку и аргументировать ее.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессиональ-  
ного образования

**«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)**

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
**по дисциплине «Теория групп»**  
**Направление подготовки – 03.03.02 Физика**  
**Экспериментальная физика**  
**Форма подготовки очная**

**Владивосток**  
**2019**

## Паспорт ФОС по дисциплине «Теория групп»

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-2 способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей	Знает	<ul style="list-style-type: none"> <li>• основные определения и понятия теории групп и их представлений, матричные представления групп, свойства генераторов и структурных констант;</li> <li>• структуру неприводимых представлений конечных групп;</li> </ul>
	Умеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>• решать задачи по всем разделам курса, использовать знания для решения задач теоретической физики и в образовательной деятельности;</li> <li>• анализировать приводимые представления, ставить и решать физические задачи методами теории групп;</li> </ul>
	Владеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>• навыками использования предметной терминологии при решении различных задач математики и теоретической физики;</li> <li>• навыками применения мощных методов теории симметрий и теории групп, необходимых для решения различных задач, возникающих как в математике, так и в теоретической физике.</li> </ul>

### Контроль целей достижения курса

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Тема 1. Симметрия в физике	ОПК-2	знает общее определение симметрии; историю возникновения теории групп;	УО-2 коллоквиум	Вопрос № 1
			умеет анализировать симметрию естественных и искусственных объектов;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками использования предметной терминологии.	ПР-2 контрольная работа	
2	Тема 2. Абстрактные группы	ОПК-2	знает определение группы; примеры групп;	УО-1 собеседование	Вопросы № 2 – 4

			классификацию и примеры групп		
			умеет доказывать простейшие теоремы; анализировать конкретные группы;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками использования теории групп при решении различных задач.	ПР-2 контрольная работа	
3	Тема 3. Группа перестановок	ОПК-2	знает определение группы перестановок; свойства группы перестановок;	УО-1 собеседование	Вопросы № 5
			умеет определять циклическую структуру перестановок;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками использования группы перестановок при решении задач квантовой механики.	ПР-2 контрольная работа	
4	Тема 4. Векторные пространства и линейные операторы	ОПК-2	знает определение векторных пространств; определение и свойства линейных операторов;	УО-1 собеседование	Вопрос № 6
			умеет выбирать и использовать ортонормированные базисы; выполнять базовые операции с матричными представлениями операторов;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками применения методов функционального анализа в теории групп;	ПР-2 контрольная работа	
5	Тема 5. Представления групп	ОПК-2	знает определение представления группы; матричные представления групп;	УО-1 собеседование	Вопросы № 7 – 8
			умеет выделять инвариантные подпространства; строить матричные представления конечных групп;	ПР-11 решение задач	

			владеет навыками применения методов теории представлений групп для решения различных задач.	ПР-2 контрольная работа	
6	Тема 6. Неприводимые представления	ОПК-2	знает определение неприводимых представлений групп; определение характеров представления и их свойств;	УО-1 собеседование	Вопросы № 9 – 11
			умеет разлагать представления групп на неприводимые; вычислять характеры представлений;	ПР-11 решение задач	
			владеет навыками применения методов теории представлений групп для решения различных задач.	ПР-2 контрольная работа	
7	Тема 7. Непрерывные группы	ОПК-2	знает определение и свойства непрерывных групп; определение и свойства инфинитезимальных операторов;	УО-1 собеседование	Вопросы № 12 – 13
			умеет определять инфинитезимальные операторы непрерывных групп;	ПР-11 решение задач	
			владеет методами применения теории непрерывных групп в теоретической физике.	ПР-2 контрольная работа	
8	Тема 8. Трёхмерные вращения	ОПК-2	знает способы параметризации трёхмерных вращений; неприводимые представления группы трёхмерных вращений;	УО-1 собеседование	Вопросы № 14 – 16
			умеет находить генераторы группы трёхмерных вращений;	ПР-11 решение задач	
			владеет методами использования представлений группы трёхмерных вращений в квантовой механике.	ПР-2 контрольная работа	

## Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		Критерии	Показатели
ОПК-2 способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.	знает (пороговый уровень)	основные понятия и теоремы теории групп, способы описания свойств симметрии природных объектов и физических законов.	Знание основных понятий и теорем теории групп.	Способность сформулировать основные определения и понятия теории групп и их представлений.
	умеет (продвинутый уровень)	решать типовые задачи теории групп.	Умение решать типовые задачи теории групп.	Способность решать задачи теории групп.
	владеет (высокий уровень)	методами анализа свойств симметрии с помощью теории групп.	Владение методами теории групп.	Способность применить методы теории групп для анализа свойств симметрии природных объектов и физических законов.

### Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

#### Оценочные средства для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Теория групп» осуществляется в форме зачёта.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, хорошо проявившему себя в решении задач на практических занятиях и успешно написавшего две теоретические контрольные.

В случае устной сдачи зачета в конце семестра оценка «зачтено» выставляется студенту, который демонстрирует хорошее знание материала и умеет применять его при решении задач.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, не выполнившему контрольные задания (две теоретические контрольные) не проявившему себя положительно при решении задач.



## **Список вопросов, выносимых на зачёт по дисциплине «Теория групп»**

- 1. Симметрия.**  
Общее определение симметрии. Симметрии равностороннего треугольника. Принципы симметрии в физике: теорема Нётер, закон сохранения энергии, принцип относительности.
- 2. Абстрактные группы.**  
Определение группы. Примеры групп. Простейшие теоремы (единственность единичного и обратного элементов, обратный элемент от произведения). Абелевы группы. Циклическая группа.
- 3. Основные понятия и операции.**  
Сдвиг по группе. Подгруппа. Порядок элемента. Сопряженные совокупности, основные теоремы.
- 4. Основные понятия и операции.**  
Сопряженные элементы и класс. Инвариантная подгруппа. Факторгруппа. Изоморфизм и гомоморфизм.
- 5. Группа перестановок.**  
Перестановки. Группа перестановок. Циклы. Циклическая структура перестановок. Оператор перестановки, чётность перестановки.
- 6. Преобразование операторов и функций.**  
Трансформированный оператор. Индуцированные преобразования функций.
- 7. Представления групп.**  
Определение представления группы. Матричные представления. Переход к другому базису. Эквивалентные представления.
- 8. Приводимые и неприводимые представления.**  
Инвариантные подпространства. Разложение на неприводимые представления. Приводимые и неприводимые представления.
- 9. Неприводимые представления группы.**  
Приводимые и неприводимые представления. Разложение на неприводимые представления. Неэквивалентные представления. Неприводимые представления абелевых групп.
- 10. Соотношения ортогональности.**  
Первая и вторая леммы Шура. Соотношения ортогональности.
- 11. Характеры представлений.**  
Определение характеров представлений. Свойства характеров представлений. Критерий неприводимости.
- 12. Непрерывные группы.**

Определение непрерывных групп. Инфинитезимальные операторы и перестановочные соотношения.

**13. Группа двумерных вращений  $R_2$ .**

Группа двумерных вращений и её представления (неприводимые и двумерные). Инфинитезимальный оператор группы  $R_2$ . Активное и пассивное истолкование вращений.

**14. Трёхмерные вращения.**

Изотропия пространства и момент импульса. Параметризация трёхмерных поворотов: углы Эйлера и вектор поворота. Матрица поворота.

**15. Генераторы поворотов.**

Генераторы трёхмерных вращений. Операторы момента импульса и коммутационные соотношения.

**16. Неприводимые представления группы  $R_3$ .**

Повышающие и понижающие операторы. Неприводимые представления группы трёхмерных вращений.

## Оценочные средства для текущей аттестации

Текущая аттестация по дисциплине «Теория групп» проводится в форме двух контрольных по теоретическому материалу и решению задач на практических занятиях и в ходе самостоятельной работы.

Объектами оценивания выступают:

- активность на занятиях, посещаемость занятий по дисциплине;
- степень освоения теоретических знаний;
- уровень овладения навыками решения задач;
- результаты самостоятельной работы.

## Список задач для текущей аттестации

1. Образуют ли группу следующие множества матриц, если в качестве группового умножения взять обычное умножение матриц?

a)  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $\prod a_{ii} \neq 0$ ;

c)  $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ .

b)  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ;

2. Являются ли две группы шестого порядка  $G$  и  $R$  с таблицами умножения, приведёнными ниже, изоморфными?

E	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$
$G_1$	E	$G_4$	$G_5$	$G_2$	$G_3$
$G_2$	$G_5$	E	$G_4$	$G_3$	$G_1$
$G_3$	$G_4$	$G_5$	E	$G_1$	$G_2$
$G_4$	$G_3$	$G_1$	$G_2$	$G_5$	E
$G_5$	$G_2$	$G_3$	$G_1$	E	$G_4$

E	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$
$R_1$	$R_2$	E	$R_4$	$R_5$	$R_3$
$R_2$	E	$R_1$	$R_5$	$R_3$	$R_4$
$R_3$	$R_5$	$R_4$	E	$R_2$	$R_1$
$R_4$	$R_3$	$R_5$	$R_1$	E	$R_2$
$R_5$	$R_4$	$R_3$	$R_2$	$R_1$	E

3. Постройте таблицу умножения группы  $D_4$  – собственных совмещений (вращений) плоского квадрата. Используя эту таблицу
- найдите порядки всех элементов;
  - найдите все подгруппы группы  $D_4$ ;
  - разбейте группу на сопряженные совокупности справа и слева;
  - разбейте группу на классы взаимно сопряженных элементов;
  - найдите инвариантные подгруппы;
  - составьте таблицу умножения для соответствующей фактор-группы.
4. Доказать, что если группа  $H$  гомоморфна группе  $G$ , то:
- единичному элементу группы  $G$  соответствует единичный элемент группы  $H$ ;
  - взаимно обратным элементам группы  $G$  соответствуют взаимно обратные элементы группы  $H$ ;
  - все элементы группы  $G$ , которые соответствуют единичному элементу группы  $H$ , образуют инвариантную подгруппу  $G$ ;
  - элементы группы  $G$ , соответствующие элементу  $H_i$ , образуют сопряжённую совокупность,  $NG_i$ , где  $G_i$  – любой из элементов группы  $G$ , соответствующий элементу  $H_i$ , а  $N$  – инвариантная подгруппа, соответствующая единичному элементу группы  $H$ .
5. Доказать, что порядок группы является целым кратным порядка любого её элемента.
6. Доказать, что все элементы одного класса имеют один и тот же порядок.
7. Доказать, что центр группы всегда является её подгруппой.
8. Пусть  $E_3$  – 3-мерное евклидово пространство. Покажите, что если  $E_1$  – его одномерное подпространство, заданное векторами  $\{a, a, 0\}$ , то его ортогональное дополнение  $E_2$  определяется векторами  $\{b, -b, c\}$ . Представьте вектор  $\{1, 2, 3\}$  в виде суммы двух векторов, один из которых принадлежит подпространству  $E_1$ , а второй – подпространству  $E_2$ .
9. Пусть  $R$  – оператор поворота вокруг оси  $z$  на  $45^\circ$ , а  $T$  – оператор поворота вокруг оси  $x$  на  $90^\circ$ . Покажите геометрически, что  $TRT^{-1}$  есть оператор поворота вокруг оси  $y$  против часовой стрелки на  $45^\circ$ . Подтвердите этот результат, перемножая матрицы соответствующих операторов в базисе  $ex, ey, ez$ .

10. Пусть преобразование  $R$  есть поворот вокруг оси  $z$  на  $90^\circ$ . Для трёх единичных векторов  $e_i$ , направленных вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , найдите  $Re_i = e_i'$ .

Вычислите индуцированное преобразование  $T(R) \psi(r)$ , где  $\psi(r)$  есть

а)  $x$ , б)  $y$ , в)  $x^2$ , г)  $xy$ .

Выполните то же самое, если  $R$  – поворот вокруг оси  $z$  на  $45^\circ$ .

11. Постройте представление группы  $D_4$  – собственных совмещений (вращений) плоского квадрата, при помощи матриц  $3 \times 3$  с базисными векторами  $e_x, e_y, e_z$ ; ось симметрии четвёртого порядка совпадает с осью  $z$ . Покажите, пользуясь найденными матрицами, что оно сводится к одномерному и двумерному представлению.

12. Найдите характеры представлений (трехмерного, двумерного и одномерного) группы  $D_4$  – собственных совмещений (вращений) плоского квадрата. Проверьте, удовлетворяют ли данные представления соотношениям ортогональности и критерию неприводимости.

13. Определите характеры неприводимых представлений  $\chi^{(m)}(C_p^n)$ , где  $m = 0; 1; 2; \dots, (n - 1)$ , циклической группы порядка  $n$ .

14. Покажите, что функции  $x \pm iy$  преобразуются по представлениям  $T(\pm 1)$  группы  $R_2$ . Классифицируйте шесть квадратичных функций ( $x^2; y^2; z^2; xy; xz; yz$ ) переменных  $x, y$  и  $z$  в соответствии с их трансформационными свойствами по отношению к группе  $R_2$ .

15. Исходя из выражения для оператора трёхмерного поворота

$$\mathbf{r}' = R_{\mathbf{k}}(\alpha) \mathbf{r} \approx \mathbf{r} + \sum_{q=x,y,z} \alpha_q [\mathbf{e}_q \times \mathbf{r}], \quad \alpha \ll 0,$$

установите вид генераторов  $X_x; X_y; X_z$ . Проверьте выполнение коммутационных соотношений.

16. Исходя из точного выражения для оператора трёхмерного поворота

$$\mathbf{r}' = R_{\mathbf{k}}(\alpha) \mathbf{r} = \mathbf{r} \cos \alpha + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} (1 - \cos \alpha) + [\mathbf{k} \times \mathbf{r}] \sin \alpha,$$

установите вид матриц поворота вокруг координатных осей и генераторов  $X_x; X_y; X_z$ .

## Список вопросов, выносимых на теоретическую контрольную №1 по курсу «Теория групп»

### 1. Симметрия.

Общее определение симметрии. Симметрии равностороннего треугольника. Принципы симметрии в физике: теорема Нётер, закон сохранения энергии, принцип относительности.

- 2. Абстрактные группы.**  
Определение группы. Примеры групп. Простейшие теоремы (единственность единичного и обратного элементов, обратный элемент от произведения). Абелевы группы. Циклическая группа.
- 3. Основные понятия и операции.**  
Сдвиг по группе. Подгруппа. Порядок элемента. Сопряженные совокупности, основные теоремы.
- 4. Основные понятия и операции.**  
Сопряженные элементы и класс. Инвариантная подгруппа. Факторгруппа. Изоморфизм и гомоморфизм.
- 5. Группа перестановок.**  
Перестановки. Группа перестановок. Циклы. Циклическая структура перестановок. Оператор перестановки, чётность перестановки.
- 6. Преобразование операторов и функций.**  
Трансформированный оператор. Индуцированные преобразования функций.
- 7. Представления групп.**  
Определение представления группы. Матричные представления. Переход к другому базису. Эквивалентные представления.
- 8. Приводимые и неприводимые представления.**  
Инвариантные подпространства. Разложение на неприводимые представления. Приводимые и неприводимые представления.

**Список вопросов,  
выносимых на теоретическую контрольную №2  
по курсу «Теория групп»**

- 1. Неприводимые представления группы.**  
Приводимые и неприводимые представления. Разложение на неприводимые представления. Неэквивалентные представления. Неприводимые представления абелевых групп.
- 2. Соотношения ортогональности.**  
Первая и вторая леммы Шура. Соотношения ортогональности.
- 3. Характеры представлений.**  
Определение характеров представлений. Свойства характеров представлений. Критерий неприводимости.
- 4. Непрерывные группы.**  
Определение непрерывных групп. Инфинитезимальные операторы и перестановочные соотношения.

**5. Группа двумерных вращений  $R_2$ .**

Группа двумерных вращений и её представления (неприводимые и двумерные). Инфинитезимальный оператор группы  $R_2$ . Активное и пассивное истолкование вращений.

**6. Трёхмерные вращения.**

Изотропия пространства и момент импульса. Параметризация трёхмерных поворотов: углы Эйлера и вектор поворота. Матрица поворота.

**7. Генераторы поворотов.**

Генераторы трёхмерных вращений. Операторы момента импульса и коммутационные соотношения.

**8. Неприводимые представления группы  $R_3$ .**

Повышающие и понижающие операторы. Неприводимые представления группы трёхмерных вращений.