МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

«СОГЛАСОВАНО»	«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель ОП	Заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики
____________ Толик С.С.	____________ Короченцев В.В.
(подпись)	(подпись)
	«27» 05 2019 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Алгебра и аналитическая геометрия
Направление подготовки – 03.03.02 Физика
Экспериментальная физика
Форма подготовки очная

курс _1_ семестр _1,2_
лекции _90_ час.
практические занятия _72_ час.
лабораторные работы _0_ час.
в том числе с использованием МАО лек. _0_/пр. _0_/лаб. _0_ час.
всего часов аудиторной нагрузки _162_ час.
в том числе с использованием МАО _0_ час.
самостоятельная работа _72_ час.
в том числе на подготовку к экзамену _90_ час.
контрольные работы (_1_)
зачет не предусмотрен
экзамен _1,2_ семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта, самостоятельно установленного ДВФУ, утвержденного приказом ректора от 07.07.2015 № 1282

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры общей и экспериментальной физики, протокол № 8 от «27» 05 2019 г.

Заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики В.В. Короченцев
Составитель к.ф.-м.н., доцент П.В. Зиновьев

Владивосток
2019

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________ __________________

(подпись) (И.О. Фамилия)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________ __________________

(подпись) (И.О. Фамилия)

АННОТАЦИЯ

Рабочая программа дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия» разработана для студентов 1 курса 03.03.02 «Физика», профиль «Экспериментальная физика».

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к разделу Б1.Б.07.02 базовой части учебного плана.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц, 252 часа. Учебным планом предусмотрены лекционные занятия (54 час.) и практические занятия (72 час), самостоятельная работа (126 час., из них на подготовку к экзамену 54 час.). Дисциплина реализуется во 2 семестре 1 курса.

Содержание дисциплины «Алгебра» охватывает круг вопросов, необходимый для дальнейшего усвоения цикла специальных дисциплин по теоретической физике и математике, таких как «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление», «Оптика», «Векторный и тензорный анализ», «Теоретическая механика», «Электродинамика», «Квантовая механика», «Уравнения математической физики» и многие другие дисциплины обширно использующие математический аппарат.

В дисциплине «Алгебра» рассмотрены основные методы матричного исчисления, теория определителей, методы решения различных систем уравнений, комплексные числа, фундаментальные понятия линейных пространств и линейных операторов.

Содержание дисциплины «Аналитическая геометрия» охватывает круг вопросов, необходимый для дальнейшего усвоения цикла специальных дисциплин по теоретической физике и математике, таких как «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление», «Векторный и тензорный анализ», «Теоретическая механика», «Уравнения математической физики».

В дисциплине рассмотрены основные представления о векторах, о прямых на плоскости и в пространстве, о кривых и поверхностях второго порядка.

Цель освоения дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия»

– формирование системы знаний, умений, навыков по использованию математических методов; математического языка; развитие умения применять знания для решения практических задач при изучении других дисциплин.

– воспитание высокой математической культуры, привитие навыков современных видов мышления, привитие навыков использования геометрических методов решения задач как составляющую фундаментальной подготовки квалифицированного специалиста в области ядерных физики и технологий.

Задачи:

- формирование устойчивых навыков по компетентностному применению фундаментальных положений линейной алгебры при изучении дисциплин профессионального цикла и научном анализе ситуаций, с которыми выпускнику приходится сталкиваться в профессиональной и общекультурной деятельности;
- обучение применению методов линейной алгебры для построения математических моделей реальных физических процессов и анализа физических эксперименов;
- умение решать типичные задачи линейной алгебры, такие как решение линейных уравнений, выполнение операций над матрицами, нахождение собственных значений линейных операторов и т.д;
- освоение фундаментальных понятий линейного оператора и его основные свойства.
- овладение аппаратом высшей математики (аналитической геометрии);
- приобретение базы, необходимой для изучения прикладных, информационных, специальных дисциплин;
- овладение навыками обработки и анализа полученных данных с помощью современных информационных технологий.

Для успешного изучения дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия» у обучающихся достаточно знаний, полученных в объеме средней школы.

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие общекультурные / профессиональные компетенции (элементы компетенций).

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-1 способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования	Знает	основные понятия и методы матричного исчисления, теорию определителей, методы решения различных систем уравнений, комплексные числа, фундаментальные понятия линейных пространств и линейных операторов
	Умеет	применять методы линейной алгебры при решении физических задач.
	Владеет	инструментом для решения математических задач в своей предметной области.

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия» предусмотрены следующие методы активного/интерактивного обучения: лекция-беседа; групповая консультация.

I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

1 семестр (Линейная алгебра, 36 час)

Раздел I. Комплексные числа и рациональные дроби (4 час.)

Тема 1. Комплексные числа (2 час.) ***(лекция-беседа)***

Основные понятия. Действия над комплексными числами. Геометрическое изображение действий над комплексными числами.

Тема 2. Рациональные дроби (2 час.)

Основные понятия. Действия с рациональными дробями.

Раздел II. Матрицы и определители (10 час.)

Тема 1. Матрицы (2 час.) ***(лекция-беседа)***

Основные понятия. Виды матриц. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Транспонирование матриц.

Тема 2. Определитель матрицы (2 час.)

Понятие определителя. Свойства определителей. Миноры, дополнительные миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа и ее следствие.

Тема 3. Обратная матрица (2 час.)

Понятие обратной матрицы. Нахождение обратной матрицы.

Тема 4. Ранг матрицы (2 час.)

Определение ранга матрицы. Элементарные преобразования матрицы.

Тема 5. Линейная зависимость (2 час.)

Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы. Теорема о базисном миноре.

Раздел III. Системы линейных уравнений (6 час.)

Тема 1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (2 час.)

Основные понятия. Теорема Кронекера-Капелли. Решение СЛАУ матричным методом.

Тема 2. Решение СЛАУ (2 час.)

Решение СЛАУ методом Крамера, методом Гаусса.

Тема 3. Однородные СЛАУ (2 час.) ***(лекция-беседа)***

Системы линейных однородных уравнений. ФСР. Системы n линейных неоднородных уравнений с m неизвестными.

Раздел IV. Линейные пространства (4 час.)

Тема 1. Линейное пространство (2 ч.) ***(лекция-беседа)***

Понятие линейного пространства. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства. Базис линейного пространства.

Тема 2. Преобразование координат (2 час.) ***(лекция-беседа)***

Связь между координатами вектора в различных базисах. Подпространства линейного пространства.

Раздел V. Линейные операторы (12 час.)

Тема 1. Линейный оператор (ЛО) (2 час.)

Понятие ЛО. Связь между координатами вектора и координатами его образа.

Тема 2. Изменение базиса (2 час.) ***(лекция-беседа)***

Преобразование матрицы ЛО при переходе к новому базису.

Тема 3. Собственные векторы и собственные значения ЛО (2 ч.)

Определение и свойства собственных векторов и собственных значений ЛО.

Тема 4. Характеристический многочлен ЛО (2 час.)

Определение характеристического многочлена ЛО. Диагонализируемость ЛО.

Тема 5. Квадратичные формы (2 час.)

Основные понятия. Классификация квадратичных форм.

Тема 6. Квадратичные формы. Критерий Сильвестра (2 час.)

Свойства квадратичных форм. Критерий Сильвестра.

2 семестр (Аналитическая геометрия, 36 час)

Раздел I. Векторная алгебра (10 час.)

Тема 1. Вектор (2 час.)

Действия над векторами. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Декартовы координаты векторов и точек.

Тема 2. Произведения векторов (3 час.)

Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное произведение, смешанное произведение и их приложения к решению задач.

Тема 3. Прямая на плоскости (2 час.)

Способы задания прямой. Взаимное расположение прямых, угловые соотношения.

Тема 4. Прямая в пространстве (3 час.)

Способы задания прямой. Взаимное расположение прямых, угловые соотношения между прямыми, между прямой и плоскостью.

Раздел II. Аналитическая геометрия (8 час.)

Тема 1. Кривые второго порядка: окружность и эллипс (2 час.)

Определение, вывод канонического уравнения. Фокальный радиус и эксцентриситет.

Тема 2. Кривые второго порядка: гипербола и парабола (3 час.)

Определение, вывод канонического уравнения. Фокальный радиус, эксцентриситет и директрисы.

Тема 3. Поверхности второго порядка (3 час.)

Эллипсоид. Однополостный гиперболоид. Двуполостный гиперболоид. Эллиптический параболоид. Гиперболический параболоид. Конус второго порядка. Некоторые кривые третьего порядка.

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Практические занятия (36 час.)

1 семестр (Линейная алгебра, 72 час)

Занятие 1. Комплексные числа (4 час.) ***(групповая консультация)***

Занятие 2. Действия с матрицами. (4 час.) ***(групповая консультация)***

1. Действия с матрицами.
2. Определители.

Занятие 3. Матрицы. (4 час.) ***(групповая консультация)***

1. Обратная матрица.
2. Ранг матрицы.

Занятие 4-5. Системы линейных алгебраических уравнений (8 час.)

1. СЛАУ.
2. Матричный метод.
3. Метод Крамера.
4. Метод Гаусса.

Занятие 6-7. Системы уравнений (8 час.) ***(групповая консультация)***

1. Системы n уравнений с m неизвестными.
2. ФСР.
3. НФСР.

Занятие 8. Линейные пространства (4 час.) ***(групповая консультация)***

Занятие 9. Линейный оператор. Квадратичные формы (4 час.)

1. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
2. Квадратичные формы.

2 семестр (Аналитическая геометрия, 36 час)

Занятия 1-10. Векторная алгебра (20 час.)

1. Решение задач на действия над векторами.
2. Действия над векторами.
3. Прямая на плоскости.
4. Прямая в пространстве.
5. Решение задач о взаимном расположении прямых,
6. Определение углового соотношения между прямыми, между прямой и плоскостью.

Занятия 11-18. Аналитическая геометрия (16 час.)

1. Кривые второго порядка.
2. Определение, вывод канонического уравнения.
3. Фокальный радиус.
4. Эксцентриситет директрисы.
5. Решение задач о кривых второго порядка, поиск фокального радиуса, эксцентриситета и директрисы.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

- план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;
- характеристика заданий для самостоятельной работы студентов и методические рекомендации по их выполнению;
- требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;
- критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1		ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	

	Раздел I. Комплексные числа и рациональные дроби		умеет	Выполнение индивидуальных заданий (ПР-11) Контрольная работа (ПР-2)	Вопросы к экзамену № 1-3
			владеет		
2	Раздел II. Матрицы и определители	ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	Вопросы к экзамену № 4-16
			умеет	Контрольная работа (ПР-2)	
			владеет		
3	Раздел III. Системы линейных уравнений	ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	Вопросы к экзамену № 17-23
			умеет	Выполнение индивидуальных заданий (ПР-11) Контрольная работа (ПР-2)	
			владеет		
4	Раздел IV. Линейные пространства	ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	Вопросы к экзамену № 24-28
			умеет	Выполнение индивидуальных заданий (ПР-11) Контрольная работа (ПР-2)	
			владеет		
5	Раздел V. Линейные операторы	ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	Вопросы к экзамену № 29-37
			умеет	Контрольная работа (ПР-2)	
			владеет		

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература (Алгебра)

(электронные и печатные издания)

1. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Текст] : учебник для вузов / А. Г. Курош. – СПб. : Лань, 2013. – 431 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:770025&theme=FEFU

2. Кострикин, А.И. Линейная алгебра и геометрия [Текст] : учебное пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – СПб. : Лань, 2008. – 303 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281458&theme=FEFU

3. Мальцев, А.И. Основы линейной алгебры [Электронный ресурс] : учеб. – СПб. : Лань, 2009. – 480 с.

ЭБС «Elanbook.com»:

https://e.lanbook.com/book/251

4. Постников, М.М. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : учеб. пособие. – СПб. : Лань, 2009. – 400 с.

ЭБС «Elanbook.com»:

https://e.lanbook.com/book/319

5. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник / Д. В. Беклемишев. – СПб. : Лань, 2015. – 444 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:777158&theme=FEFU

6. Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре [Текст] : учебное пособие для вузов по математическим специальностям / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – СПб. : Лань, 2008. – 288 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281549&theme=FEFU

7. Боревич, З.И. Определители и матрицы [Текст] : учебное пособие / З. И. Боревич. – СПб. : Лань, 2009. – 184 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281936&theme=FEFU

8. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 304 с.

ЭБС «IPRbooks»:

http://www.iprbookshop.ru/20266

Дополнительная литература (Алгебра)

(печатные и электронные издания)

1. Фролов, С.В. Курс высшей математики [Текст] : учебное пособие для втузов т. 1 / С. В. Фролов, Р. Я. Шостак. – М. : Высшая школа, 1973. – 480 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:324397&theme=FEFU

2. Фролов, С.В. Курс высшей математики [Текст] : учебное пособие для втузов т. 2 / С. В. Фролов, Р. Я. Шостак. – М. : Высшая школа, 1973. – 400 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:324398&theme=FEFU

3. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре [Текст] : учебное пособие / И. В. Проскуряков. – СПб. : Краснодар, : Лань, 2010. – 475 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:305907&theme=FEFU

4. Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник / П. С. Александров. – СПб. : Лань, 2009. – 511 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:298699&theme=FEFU

5. Икрамов, Х.Д. Задачник по линейной алгебре [Текст] : учебное пособие / Х. Д. Икрамов ; под ред. В. В. Воеводина. – СПб. : Лань, 2006. – 319 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:243667&theme=FEFU

6. Воеводин, В.В. Линейная алгебра [Текст] : учебное пособие / В. В. Воеводин. – СПб. : Лань, 2008. – 400 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281419&theme=FEFU

7. Шипачев, В.С. Высшая математика [Текст] : учебник и практикум для бакалавров : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова ; Московский государственный университет. – М. : Юрайт, 2017. – 447 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:841112&theme=FEFU

8. Павлушков, И.В. Математика [Электронный ресурс] : учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. – М. : ГЭОТАР-Медиа, 2013. – 320 с.

ЭБС «КОНСУЛЬТАНТ СТУДЕНТА»:

http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785970426968.html

9. Шабунин, М.И. Математика [Электронный ресурс] : пособие для поступающих в вузы / М. И. Шабунин ; 6-е изд. (эл.). – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 694 с.

ЭБС «КОНСУЛЬТАНТ СТУДЕНТА»:
http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996309252.html

10. Будак, Б.А. Математика. Сборник задач по углублённому курсу [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Б. А. Будак [и др.] ; под ред. М. В. Федотова ; 3-е изд. (эл.). – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 329 с.

ЭБС «КОНСУЛЬТАНТ СТУДЕНТА»:
http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996328857.html

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

Не предусмотрены.

Основная литература (Геометрия)
(электронные и печатные издания)

1. Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. К. Фадеев. – СПб. : Лань, 2007. – 416 с.

ЭБС «Elanbook.com»:
https://e.lanbook.com/book/397

2. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. / А. Г. Курош. – СПб. : Лань, 2013. – 432 с.

ЭБС «Elanbook.com»:
https://e.lanbook.com/book/30198

3. Мальцев, И.А. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И. А. Мальцев. – СПб. : Лань, 2010. – 384 с.

ЭБС «Elanbook.com»:
https://e.lanbook.com/book/610

4. Постников, М.М. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М. М. Постников. – СПб. : Лань, 2009. – 400 с.

ЭБС «Elanbook.com»:
https://e.lanbook.com/book/319

5. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учеб. / Д. В. Беклемишев. – М. : Физматлит, 2009. – 312 с.

ЭБС «Elanbook.com»:
https://e.lanbook.com/book/2109

6. Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре [Электронный ресурс] : учеб. / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – СПб. : Лань, 2008. – 288 с.
ЭБС «Elanbook.com»:
https://e.lanbook.com/book/399
7. Шипачев, В.С. Начала высшей математики [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. С. Шипачев. – СПб. : Лань, 2013. – 384 с.
ЭБС «Elanbook.com»:
https://e.lanbook.com/book/5713
8. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с.
ЭБС «Elanbook.com»:
https://e.lanbook.com/book/92434

Дополнительная литература (Геометрия)

(печатные и электронные издания)

1. Фролов, С.В. Курс высшей математики : учебное пособие для втузов т. 1 [Текст] / С. В. Фролов, Р. Я. Шостак. – М. : Высшая школа, 1973. – 480 с.
ЭК НБ ДВФУ:
http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:324397&theme=FEFU
2. Фролов, С.В. Курс высшей математики : учебное пособие для втузов т. 2 [Текст] / С. В. Фролов, Р. Я. Шостак. – М. : Высшая школа, 1973. – 400 с.
ЭК НБ ДВФУ:
http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:324398&theme=FEFU
3. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие [Текст] / Д. В. Клетеник ; под ред. Н. В. Ефимова. – СПб. : Лань, 2010. – 223 с.
ЭК НБ ДВФУ:
http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:307475&theme=FEFU
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов : [учебное пособие для втузов] [Текст] / [Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.] ; под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Астрель, : АСТ, Владимир : ВКТ, [2010]. – 495 с.
ЭК НБ ДВФУ:
http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:416586&theme=FEFU
5. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – СПб. : Лань, 2010. – 480 с.
ЭБС «Elanbook.com»:
https://e.lanbook.com/book/529

6. Головина, Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения : учебное пособие для втузов [Текст] / Л. И. Головина. – М. : Наука, 1975. – 407 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:59204&theme=FEFU

7. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [учебное пособие для вузов] [Текст] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова [и др.]. – М. : АСТ, : Мир и Образование, [2014]. – 815 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:726249&theme=FEFU

8. Баврин, И.И. Высшая математика : учебник для педагогических вузов [Текст] / И. И. Баврин. – М. : Академия, 2005. – 611 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:255390&theme=FEFU

9. Шипачев, В.С. Высшая математика : учебник и практикум для бакалавров : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова ; Московский государственный университет. – М. : Юрайт, 2017. – 447 с.

ЭК НБ ДВФУ:

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:841112&theme=FEFU

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного достижения учебных целей занятий должны выполняться следующие основные требования:

-соответствие действий обучающихся ранее изученным на лекционных и семинарских занятиях методикам и методам.

-максимальное приближение действий студентов к реальным, соответствующим будущим функциональным обязанностям.

-поэтапное формирование умений и навыков, т.е. движение от знаний к умениям и навыкам, от простого к сложному и т.д..

-использование при работе на тренажерах или действующей технике фактических документов, технологических карт, бланков и т.п.

-выработка индивидуальных и коллективных умений и навыков.

- распределение времени, отведенного на занятие, на решение каждой задачи;

-подбор иллюстративного материала (графиков, таблиц, схем), необходимого для решения задач, продумывание расположения рисунков и записей на доске.

Студент должен научиться работать с книгой, документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой; формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

На изучение дисциплины отводится 54 часа аудиторных занятий. На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства. Формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Необходимо поддерживать непрерывный контакт с аудиторией, отвечать на возникающие у студентов вопросы. На практических занятиях преподаватель разбирает примеры по пройденной теме, выдает домашние задания, которые обучающиеся сдают в срок, назначенное преподавателем

В рамках данной дисциплины предусмотрено 126 часов самостоятельной работы, которая необходима при проработке материала лекции, выполнении индивидуальных заданий, подготовке к контрольной работе, экзамену.

В самостоятельную работу по дисциплине «Линейная алгебра» включены следующие виды деятельности:

– поиск информации по темам для самостоятельного изучения;

– разбор теоретических аспектов практических работ;

– подготовка к текущему и промежуточному контролю.

Для закрепления навыков и знаний студента, полученных на практических и лекционных занятиях, студенту в течение курса выдаются индивидуальные задания. Для выполнения индивидуальные задания необходимо использовать все полученные знания и умения.

Студенту следует тщательно планировать и организовывать время, необходимое для изучения дисциплины. Недопустимо откладывать ознакомление с теоретической частью и выполнение индивидуальных заданий, поскольку это неминуемо приведет к снижению качества освоения материала. Все виды работ по дисциплине рекомендуется выполнять по календарному плану, приведенному в приложении 1.

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине «Алгебра» необходима учебная аудитория.

Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия»

Направление подготовки – 03.03.02 Физика

Экспериментальная физика

Форма подготовки очная

Владивосток
2019

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

1 семестр

№ п/п	Дата/сроки выполнения, неделя	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение, час	Форма контроля
1	1-3	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю.	8	Опрос (УО-1)
2	1-4	Выполнение ИДЗ по теме «Комплексные числа»	10	Сдача индивидуальных заданий (ПР-11)
3	4-8	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю.	8	Опрос (УО-1)
4	7-9	Выполнение ИДЗ по теме «Матрицы и системы линейных алгебраических уравнений»	10	Сдача индивидуальных заданий (ПР-11)
5	9-12	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю.	8	Опрос (УО-1)
6	11-12	Выполнение ИДЗ по теме «Системы линейных алгебраических уравнений с m неизвестными»	10	Сдача индивидуальных заданий (ПР-11)
7	13-17	Изучение лекционного материала, подготовка к текущему контролю.	8	Опрос (УО-1)
8	15-17	Выполнение ИДЗ по теме «Линейные пространства»	10	Сдача индивидуальных заданий (ПР-11)
9	18	Подготовка к контрольной работе	9	Контрольная работа (ПР-2)
10	1-18	Подготовка к экзамену	45	Экзамен

2 семестр

№ п/п	Дата/сроки выполнения, неделя	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение, час.	Форма контроля
1	1-4 недели	Изучение лекционного материала, подготовка к контрольной работе.	8	Письменная работа

2	5-6 недели	Выполнение индивидуального задания	12	Зачет по заданию
3	7-8 недели	Выполнение индивидуального задания	12	Зачет по заданию
4	9-10 недели	Изучение лекционного материала, подготовка к тестированию.	8	Тест
5	11-14 недели	Выполнение индивидуального задания	12	Зачет по заданию
6	15-17 недели	Выполнение индивидуального задания.	12	Зачет по заданию
		Подготовка к тестированию.	8	Тест
7	18	Подготовка к экзамену	36	сдача экзамена

Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению

В рамках данной дисциплины предусмотрено 126 часов самостоятельной работы, которая необходима при проработке материала лекции, выполнении индивидуальных заданий, подготовке к контрольной работе, экзамену.

В самостоятельную работу по дисциплине «Линейная алгебра» включены следующие виды деятельности:

– поиск информации по темам для самостоятельного изучения;

– разбор теоретических аспектов практических работ;

– подготовка к текущему и промежуточному контролю.

Для закрепления навыков и знаний студента, полученных на практических и лекционных занятиях, студенту в течение курса выдаются индивидуальные задания. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо использовать все полученные знания и умения.

Студенту следует тщательно планировать и организовывать время, необходимое для изучения дисциплины. Недопустимо откладывать ознакомление с теоретической частью и выполнение индивидуальных заданий, поскольку это неминуемо приведет к снижению качества освоения материала. Все виды работ по дисциплине рекомендуется выполнять по календарному плану.

Примеры индивидуальных домашних заданий
Индивидуальное домашнее задание по теме «Комплексные числа».

Задание 1: Перевести комплексное число Z в показательную и тригонометрическую формы

$\boldsymbol{z = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2} i.}$

Задание 2: Найти модуль и аргумент комплексного числа Z

$z = (4 - 4i)(2 - 2i)^{-6}.$

Задание 3: Решить квадратное уравнение
$x^2 + 2x + 26 = 0.$
Задание 4: Записать число Z в алгебраической форме
$z(1 + 4i) = -1 + i.$
Задание 5: Найти частное и остаток
$\frac{x^3+2x^2+2x-3}{x+2}.$
Задание 6: Проверить, является ли x_0 корнем многочлена P(x)
$P(x) = x^2 + 2ix - 5 \quad x_0 = 2 - i.$
Задание 7: Найти кратность корня x_0
$P(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4 \quad x_0 = -1.$
Задание 8: Записать число Z в тригонометрической и показательной формах
$z = -2\sqrt{3} + 2i.$
Задание 9: Записать число Z в алгебраической и тригонометрической формах
$z = 6e^{150^\circ}.$

Индивидуальное домашнее задание по теме «Матрицы и системы линейных уравнений».

Задание 1: Вычислить определитель двумя способами:
а) разложив по элементам 1 столбца;
б) предварительно получив нули в 3 столбце

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Задание 2: Найти минор M_{22} и алгебраическое дополнение A_{23} определителя Δ.
Задание 3: По формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Задание 4: Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 23 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Индивидуальное домашнее задание по теме «Системы линейных алгебраических уравнений с m неизвестными».

Задание 1: Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5; \\ 4x - y + 10z = 11; \\ 5x + 3y - 5z = 9. \end{cases}$$

Задание 2: Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x + 4y - 5z = -2; \\ 3x + 2y + z = 7; \\ x - y + 10z = 20. \end{cases}$$

Задание 3: Решить неоднородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 2; \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -1; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$$

Задание 4: Решить однородную систему линейных уравнений. Найти общее решение и фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ -4x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 12x_4 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$$

Индивидуальное домашнее задание по теме «Линейные пространства».

Задание 1: а) Считая, что строки матрицы А являются векторами, проверить, можно ли их выбрать в качестве базиса в R^3.

б) Если можно, то разложить $\vec{B}$ по этому базису.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -7 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 2: а) Найти базис и размерность линейной оболочки $L[f_i]$.

б) Дополнить его до базиса пространства R^n.

$f_1 = (1, -1, 2, 0, 5);$

$f_2 = (2, 1, 5, 4, 2);$

$f_3 = (1, 2, 3, 4, -3).$

Задание 3: Решить системы уравнений АХ=0 и АХ=В. Записать НФСР. Найти размерности ядра и образа линейного оператора А.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Вопросы для самостоятельного повторения

Матрицы используются для решения стандартных задач в рамках дисциплины «Аналитическая геометрия». В связи с этим необходимо самостоятельное повторение теоретического материала.

1. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матрицы на число.
2. Перемножение матриц. Свойства умножения матриц.
3. Обратная матрица. Решения системы уравнений в матричной форме.
4. Вырожденная матрица, левая и правая обратная матрица, присоединенная или взаимная матрица.
5. Свойства ранга матрицы .Элементарные преобразования над матрицами.
6. Базис, свойства базиса (линейная зависимость и независимость).

Критерии оценки выполнения самостоятельной работы

Оценивание теоретического материала по теме «Матрицы» проводится в виде устного опроса при проверке решения индивидуальных домашних заданий.

Пример индивидуального задания

Индивидуальное задание № 1 (прямая и плоскость)

Вариант № 1

1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси *Oz* и проходящей через точки *A(2; 3; -1)* и *B (-1; 2; 4).*

2. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x+3y-4z+5=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую *x=3t+1 , y=2t+3, z= –t–2* параллельно прямой $2x-y+z-3=0, \qquad x+2y-z-5=0$.

Вариант № 2

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось *Oz* и точку *A (-2; 4; -4).*

2. Найти координаты следов прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{4}$ на координатных плоскостях (следом прямой на плоскости называется точка пересечения прямой с плоскостью).

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+1}{-5}, \qquad x-2y+z-15=0.$$

Критерии оценки выполнения самостоятельной работы
(Оценка умения решать задачи)

Отметка "Отлично"

1. В решении и объяснении нет ошибок.
2. Ход решения рациональный.

3. Если необходимо, решение произведено несколькими способами.
4. Допущены ошибки по невнимательности (оговорки, описки).

Отметка "Хорошо"

1. Существенных ошибок нет.
2. Допущены 1-2 несущественные ошибки или неполное объяснение, или использование 1 способа при заданных нескольких.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Допущено не более одной существенной ошибки, записи неполны, неточности.
2. Решение выполнено с ошибками в математических расчетах.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Решение осуществлено только с помощью учителя.
2. Допущены существенные ошибки.
3. Решение и объяснение построены не верно.

Приложение 2

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия»

Направление подготовки – 03.03.02 Физика
Экспериментальная физика
Форма подготовки очная

Владивосток
2019

Паспорт ОС

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-1 способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования	Знает	основные понятия и методы матричного исчисления, теорию определителей, методы решения различных систем уравнений, комплексные числа, фундаментальные понятия линейных пространств и линейных операторов
	Умеет	применять методы линейной алгебры при решении физических задач.
	Владеет	инструментом для решения математических задач в своей предметной области.

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства: текущий контроль	Оценочные средства: промежуточная аттестация
1	Раздел I. Комплексные числа и рациональные дроби	ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	Вопросы к экзамену № 1-3
			умеет	Выполнение индивидуальных заданий (ПР-11) Контрольная работа (ПР-2)	
			владеет		
2	Раздел II. Матрицы и определители	ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	Вопросы к экзамену № 4-16
			умеет	Контрольная работа (ПР-2)	
			владеет		
3	Раздел III. Системы линейных уравнений	ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	Вопросы к экзамену № 17-23
			умеет	Выполнение индивидуальных заданий (ПР-11) Контрольная работа (ПР-2)	
			владеет		
4	Раздел IV. Линейные пространства	ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	Вопросы к экзамену № 24-28
			умеет	Выполнение индивидуальных заданий (ПР-11) Контрольная работа (ПР-2)	
			владеет		
5		ОПК-1	знает	Опрос (УО-1)	

	Раздел V. Линейные операторы		умеет владеет	Контрольная работа (ПР-2)	Вопросы к экзамену № 29-37

Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**		**критерии**	**показатели**
ОПК-1 способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования	знает (пороговый уровень)	основные понятия и методы матричного исчисления, теорию определителей, методы решения различных систем уравнений, комплексные числа, фундаментальные понятия линейных пространств и линейных операторов	Знание определений, основных понятий алгебры; основных законов естественнонаучных (математических) дисциплин и их роли в профессиональной деятельности .	-способность дать определения основных понятий алгебры. -способность перечислить основные методы решения задач линейной алгебры; -способность объяснить выбранный метод решения конкретной задачи линейной алгебры.
	умеет (продвинутый)	применять методы линейной алгебры при решении физических задач.	Умение применять полученные знания для решения математических задач линейной алгебры, использовать математический язык и символику при построении моделей.	- способность самостоятельно изучить доказательство некоторых понятий алгебры; -способность применять изученные методы решения для нестандартного решения поставленных задач - способность обосновать выбранный метод решения.
	владеет (высокий)	инструментом для решения математических задач в своей предметной области.	Владение математическими методами решения задач линейной алгебры.	-Способность уверенно владеть математическими методами решения типовых задач линейной алгебры; -способность бегло и точно применять терминологический аппарат предметной области исследования в устных ответах на вопросы и в письменных работах

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

Промежуточная аттестация студентов. Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной. Промежуточная аттестация по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в форме экзамена, который выставляется при сдаче всех отчетных мероприятий по текущей аттестации.

Текущая аттестация студентов. Текущая аттестация студентов по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в форме контрольных мероприятий (собеседования, индивидуальные домашние задания, контрольная работа) по оцениванию фактических результатов обучения студентов и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
- степень усвоения теоретических знаний (собеседования, контрольные работы);
- уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы (собеседования, контрольные работы);
- результаты самостоятельной работы (собеседования, индивидуальные домашние задания).

Оценочные средства для промежуточной аттестации

1 Экзамен

Вопросы к экзамену

1. Комплексные числа. Основные понятия.
2. Действия над комплексными числами. Геометрическое изображение действий над комплексными числами.
3. Рациональные дроби.
4. Матрицы. Основные понятия.
5. Виды матриц.
6. Линейные операции над матрицами.
7. Умножение матриц. Транспонирование матриц.

8. Понятие определителя.
9. Свойства определителей.
10. Миноры, дополнительные миноры, алгебраические дополнения.
11. Теорема Лапласа и ее следствие.
12. Понятие обратной матрицы.
13. Нахождение обратной матрицы.
14. Понятие ранга матрицы. Элементарные преобразования матрицы.
15. Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы.
16. Теорема о базисном миноре.
17. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Теорема Кронекера-Капелли.
18. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
19. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
20. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
21. Системы линейных однородных уравнений.
22. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений.
23. Системы линейных неоднородных m уравнений с n неизвестными.
24. Понятие линейного пространства.
25. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства.
26. Базис линейного пространства.
27. Связь между координатами вектора в различных базисах.
28. Подпространства линейного пространства.
29. Понятие линейного оператора.
30. Матрица линейного оператора.
31. Связь между координатами вектора и координатами его образа.
32. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
33. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
34. Характеристический многочлен линейного оператора.
35. Диагонализируемость линейного оператора.
36. Квадратичные формы.
37. Критерий Сильвестра.

2 Пример экзаменационного билета

Билет №1

Задание 1

Комплексные числа. Основные понятия.

Задание 2

Нахождение обратной матрицы.

Задание 3

Связь между координатами вектора в различных базисах.

Критерии оценки к экзамену

Отметка "Отлично"

1. Дан полный и правильный ответ на основе самостоятельно изученного материала и проведенных ранее лабораторных и практических работ.

2. Материал понят и изучен.

3. Материал изложен в определенной логической последовательности, литературным языком.

4. Ответ самостоятельный.

Отметка "Хорошо"

1, 2, 3 – аналогично отметке "Отлично".

5. Допущены 2-3 несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя, наблюдалась "шероховатость" в изложении материала.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Учебный материал, в основном, изложен полно, но при этом допущены 1-2 существенные ошибки.

2. Ответ неполный, хотя и соответствует требуемой глубине, построен несвязно.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Незнание или непонимание большей или наиболее существенной части учебного материала.

2. Допущены существенные ошибки, которые не исправляются после уточняющих вопросов, материал изложен несвязно.

Оценочные средства для текущей аттестации

1. Контрольная работа

Пример заданий контрольной работы

Задание 1: Вычислить
$(-5-2i)(-3+2i)(2+4i)(2+2i)+\frac{-2-2i}{3+i}+(2+3i)^3.$

Задание 2: Вычислить
$\frac{\left(16\sqrt{2}-16\sqrt{2}i\right)^{12}}{2^{30}}.$

Задание 3: Вычислить $|A|$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 4: Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} -2x + 4y - z = 13; \\ -5x + 3y + 3za = 35; \\ -3x - 7y + 7z = 19. \end{cases}$$

Задание 5: Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} 5x + 5y + 4z = 50; \\ -3x + 2y + z = 12; \\ -6x + 2y + 4z = 24. \end{cases}$$

Задание 6: Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 25; \\ -x - 5y - 7z = 35; \\ 5x - y + 6z = -7. \end{cases}$$

Задание 7: Решить систему

$$\begin{cases} -5x - 4y + 19z = 39; \\ -5x + 3y + 12z = 32; \\ -5x - 11y + 26z = 46. \end{cases}$$

Задание 8: Решить систему

$$\begin{cases} 3x + 5y - 4z - 24t = 0; \\ -2x - 2y + 12t = 0; \\ 9x + 11y - 4z - 60t = 0. \end{cases}$$

Задание 9: Решить уравнение AX=B, где

$A = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -18 & 23 \\ 20 & -27 \end{pmatrix}$.

Задание 10: Решить уравнение CYD=F, где

$C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ -15 & -15 \end{pmatrix}$.

Критерии оценки контрольной работы

Отметка "Отлично"

1. В решении и объяснении нет ошибок.
2. Ход решения рациональный.
3. Если необходимо, решение произведено несколькими способами.
4. Допущены ошибки по невнимательности (оговорки, описки).

Отметка "Хорошо"

1. Существенных ошибок нет.
2. Допущены 1-2 несущественные ошибки или неполное объяснение, или использование 1 способа при заданных нескольких.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Допущено не более одной существенной ошибки, записи неполны, неточности.
2. Решение выполнено с ошибками в математических расчетах.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Решение осуществлено только с помощью учителя.
2. Допущены существенные ошибки.
3. Решение и объяснение построены не верно.

Вопросы к экзамену (геометрия)

1. Векторы: определение, равенство, единичные вектора, сложение векторов, умножение вектора на число. 1
2. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, угол между векторами. 5
3. Векторное произведение. Свойства векторного произведения. 6
4. Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения
5. Вектор, определение, модуль, равенство, свойства отношения «равно» векторов.
6. Вектора. Действие над векторами. Разложение вектора по базису.
7. Координаты вектора. Свойства координат. Коллинеарность и компланарность векторов.
8. Свойства векторного и смешанного произведения векторов.
9. Векторное произведение векторов. Свойства, выражение векторного произведения через координаты сомножителей.
10. Коллинеарные и компланарные векторы. Необходимые и достаточные условия. Угол между векторами.
11. Прямая в пространстве. Способы задания. Угол между прямыми.
12. Прямая на плоскости, неполные уравнения прямой.
13. Плоскость в пространстве. Неполные уравнения плоскости.
14. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
15. Угол между прямыми, между прямой и плоскостью (для различных видов задания прямой).
16. Прямая на плоскости, неполное уравнение прямой, различные способы задания прямой.
17. Расстояние от точки до прямой в пространстве
18. Расположение прямой относительно системы координат(на плоскости).Угловой коэффициент, геометрический смысл.
19. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Угловые соотношения между прямыми, между прямой и плоскостью.
20. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

21. Вывод общего уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой в отрезках.
22. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.
23. Фокальный радиус, эксцентриситет и директрисы гиперболы.
24. Фокальные радиусы гиперболы.
25. Эксцентриситет и фокальные радиусы эллипса.
26. Фокальный параметр. Уравнение эллипса и гиперболы в полярных координатах.
27. Фокальный параметр эллипса и гиперболы.
28. Параметрическое представление линии, уравнение линии в полярных координатах.
29. Уравнение прямой в нормальной форме. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду.
30. Асимптоты гиперболы. Парабола, вывод уравнения параболы.
31. Уравнения эллипса ,гиперболы и параболы в полярных координатах.
32. Вычисление расстояния от директрисы до соответствующего фокуса в случае эллипса и гиперболы.
33. Вывод канонического уравнения параболы.
34. Исследование канонического уравнения гиперболы и эллипса.
35. Окружность. Определение, общая теория.

Оценочные средства для текущей аттестации

1. Контрольная работа

Пример контрольной работы

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y - 12z - 3 = 0$ и $3x + y - 7z - 2 = 0$ и перпендикулярной плоскости $x + 2y + 5z - 1 = 0$

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

перпендикулярно плоскости $2x + 2y - z + 5 = 0$.

Оценка умения решать задачи:

Отметка "Отлично"

1. В решении и объяснении нет ошибок.
2. Ход решения рациональный.

3. Если необходимо, решение произведено несколькими способами.
4. Допущены ошибки по невнимательности (оговорки, описки).

Отметка "Хорошо"

1. Существенных ошибок нет.
2. Допущены 1-2 несущественные ошибки или неполное объяснение, или использование 1 способа при заданных нескольких.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Допущено не более одной существенной ошибки, записи неполны, неточности.
2. Решение выполнено с ошибками в математических расчетах.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Решение осуществлено только с помощью учителя.
2. Допущены существенные ошибки.
3. Решение и объяснение построены не верно.

2. Тест

Пример заданий теста по теме «Системы координат на плоскости и в пространстве. Векторная алгебра»

1. Точка М задана полярными координатами (1; 3π/4). Её декартовы координаты:

1.) (-√2/2;√2/2);
2.) (-√2/2; -√2/2);
3.) (1; √2/2);
4.) (1; -√2/2).

2. Векторы **a** = (1; 2; 0), **b** = (3; -1; 1), **c** = (0; 1; 1) являются:

1.) линейно зависимыми;
2.) линейно независимыми;
3.) коллинеарными;
4.) компланарными.

3. Линейно зависимыми являются векторы:

1.) **a** (1; 3), **b** (3; 1);
2.) **a** (1; 3), **b** (3; 2);
3.) **a** (-6; 4), **b** (3; -2);
4.) **a** (6; 4), **b** (3; -2);

4. Даны векторы **a** = (2; -1; -2) и **b** = (8; -4; 0), вектор **c** =2**a** и **d** = **b** - **a**, тогда угол между векторами **c** и **d** равен:

1.) 580; 2.) 560; 3.) 520; 4.) 500.

5. Векторы $\mathbf{a_1}$ = (l; 3; 1; 3), $\mathbf{a_2}$ = (2; 1; 1; 2) и $\mathbf{a_3}$ = (3; -1; 1; 1) являются:

1.) базисными;

2.) зависимыми;
3.) независимыми;
4.) равными.

6. **a** = (5; -1; 6) и **b** = (6; 3; -3), тогда проекция вектора **a** на **b** равна:
1.) $(1/9)\sqrt{54}$; 2.) $9/\sqrt{54}$; 3.) 9/6; 4.) $6/\sqrt{54}$.

7. Вершины пирамиды находятся в точках A (2; 3; 4), B (4; 7; 3), C (1; 2; 2), D (-2; 0; -1), тогда площадь грани ABC равна:
1.) $\sqrt{110}$; 2.) 10; 3.) $2/\sqrt{110}$; 4.) $\sqrt{110}/2$.

8. Вершины пирамиды находятся в точках A (2; 3; 4), B (4; 7; 3), C (1; 2; 2), D (-2; 0; -1), тогда объем пирамиды равен:
1.) 10; 2.) 11; 3.) 12; 4.) 13.

Пример заданий теста по теме «Аналитическая геометрия на плоскости»

1. Угол между прямыми находится по формуле:
1)$\varphi = -1/k_2$; 2.) $\varphi = k_2$; 3.) $\operatorname{tg}\varphi = (k_2 - k_1)/(1 + k_1k_2)$; 4.) $\varphi = \pi/2$.

2. Острый угол между прямыми $y = -3x + 7$ и $y = 2x + 1$ равен:
1.) $\pi/3$; 2.) $\pi/4$; 3.) $\pi/12$; 4.) $\pi/6$.

3. Уравнение прямой, проходящей через точки M (-1; 3), N (2; 5) имеет вид:
1.) $2x + 3y - 11 = 0$;
2.) $x + 3y + 4 = 0$;
3.) $2x - 3y + 11 = 0$;
4.) $2x - y + 11 = 0$.

4. Расстояние от точки M (1; 2) до прямой $20x - 21y - 58 = 0$ равно:
1.) 3; 2.) 2,5; 3.) 1,5; 4.) 80/29.

5. Координаты центра окружности $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$:
1.) (2; 1); 2.) (-1; -2); 3.) (1; 2); 4.) (3; 0).

6. Радиус окружности $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$:
1.) 2; 2.) 1; 3.) 3; 4.) 4.

7. Уравнение прямой, проходящей через точку M (-2; -5) параллельно прямой $3x + 4y + 2 = 0$, имеет вид:
1.) $3x - 4y + 3 = 0$;
2.) $3x + 4y + 14 = 0$;
3.) $3x + 4y + 26 = 0$;

4.) $4x + 3y + 26 = 0$.

8. Уравнение прямой, проходящей через точку М (-2; -5) перпендикулярно прямой $3x + 4y + 2 = 0$ имеет вид:

1.) $4x + 3y – 7 = 0$;
2.) $4x – 3y – 7 = 0$;
3.) $3x – 4y + 7 = 0$;
4.) $4x – 3y – 8 = 0$.

9. Кривая $16x^2 + 25y^2 = 9$ является:

1.) эллипсом; 2.) гиперболой; 3.) параболой; 4.) окружностью.

10. Кривая $3x^2 – y^2 – 12 = 0$ является:

1.) эллипсом; 2.) гиперболой; 3.) параболой; 4.) окружностью.

11. Кривая $y^2 = 8x$ является:

1.) эллипсом; 2.) гиперболой; 3.) параболой; 4.) окружностью.

12. Кривая $x^2 + y^2 = 2x + 4y – 4$ является:

1.) эллипсом; 2.) гиперболой; 3.) параболой; 4.) окружностью.

13. Параметрические уравнения эллипса имеют вид:

1.) $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$;
2.) $x = a \cos(t)$, $y = b \sin(t)$;
3.) $x = r (t – \sin(t))$, $y = r (1 – \cos(t))$;
4.) $x = a/\cos(t)$, $y = b \operatorname{tg}(t)$.

14. Параметрические уравнения окружности имеют вид:

1.) $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$;
2.) $x = a \cos(t)$, $y = b \sin(t)$;
3.) $x = r (t – \sin(t))$, $y = r (1 – \cos(t))$;
4.) $x = a/\cos(t)$, $y = b \operatorname{tg}(t)$.

Критерии оценки тестирования

Оценивание проводится по четырнадцатибальной шкале.

Отметка "Отлично"

По результатам работы набрано 14 баллов.

Отметка "Хорошо"

По результатам работы набрано 11-13 баллов.

Отметка "Удовлетворительно"

По результатам работы набрано 7-10 баллов.

Отметка "Неудовлетворительно"

По результатам работы набрано менее 7 баллов.

Пример заданий теста по теме «Аналитическая геометрия в пространстве».

1. Плоскость $3x - 4y + 5z - 60 = 0$ отсекает на осях координат «отрезки»:
1.) $a = 20$, $b = -15$, $c = 12$;
2.) $a = 10$, $b = -1$, $c = 12$;
3.) $a = 20$, $b = -15$, $c=1$;
4.) $a = 30$, $b = -10$, $c = 12$.

2. Расстояние от точки M (4; 3; 6) до плоскости $2x - y - 2z - 8 = 0$ равно:
1.) 10; 2.) 7; 3.) 5; 4.) 3.

3. Расстояние между плоскостями $x + 2y - 2z - 1 = 0$ и $x + 2y - 2z + 5 = 0$:
1.) 5; 2.) 4; 3.) 3; 4.) 2.

4. Расстояние между плоскостями $2x + y - 2z - 1 = 0$ и $2x + y - 2z + 5 = 0$:
1.) 5; 2.) 4; 3.) 3; 4.) 2.

5. Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $x + 2y - 2z - 1 = 0$, равна
1.) 1/3; 2.) 2/3; 3.) 1; 4.) 2.

6. Система уравнений $\{x_1 + 2x_2 = 5;\ 3x_2 + x_3 = 9;\ x_2 + 2x_3 = 8\}$ определяет:
1.) три взаимно параллельные плоскости;
2.) три взаимно перпендикулярные плоскости;
3.) три плоскости, пересекающиеся в одной точке;
4.) три плоскости, пересекающиеся по прямой.

7. Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $x + 2y - 3z - 1 = 0$ равна:
1.) $1/\sqrt{14}$; 2.) $2/\sqrt{14}$; 3.) 1; 4.) 14.

8. Плоскость $3x - 4y + 5z - 120 = 0$ отсекает на осях координат «отрезки»:
1.) $a = 20$, $b = -15$, $c = 12$;
2.) $a = 40$, $b = -30$, $c = 24$;
3.) $a = 20$, $b = -15$, $c = 1$;
4.) $a = 30$, $b = -10$, $c = 12$.

9. Расстояние от точки M (4; 3; 1) до плоскости $2x - y - 2z - 8 = 0$ равно:
1.) 3; 2.) 5; 3.) 5/3; 4.) -5/3.

10. Плоскость $2x - 4y + 5z - 120 = 0$ отсекает на осях координат «отрезки»:
1.) $a = 20$, $b = -15$, $c = 12$;
2.) $a = 40$, $b = 30$, $c = 24$;
3.) $a = 20$, $b = -15$, $c = 1$;

4.) a = 60, b = -30, c = 24.

Критерии оценки тестирования

Оценивание проводится по десятибальной шкале.

Отметка "Отлично"

По результатам работы набрано 10 баллов.

Отметка "Хорошо"

По результатам работы набрано 8-9 баллов.

Отметка "Удовлетворительно"

По результатам работы набрано 5-7 баллов.

Отметка "Неудовлетворительно"

По результатам работы набрано менее 5 баллов.

.

Приложение 3

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия»

Направление подготовки – 03.03.02 Физика
Экспериментальная физика
Форма подготовки очная

Владивосток
2019

Методические указания к решению задач векторной алгебре

Для отвлеченного изображения конкретных векторных величин используются векторы. Вектором (геометрическим) называется направленный отрезок прямой.

Два вектора называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Положение начальной точки таких векторов не играет никакой роли.

Поэтому геометрические векторы называются свободными.

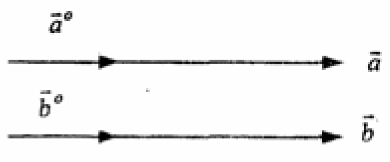
При изучении темы «Векторная алгебра» студенту следует обратить внимание на ниже рассмотренные вопросы.

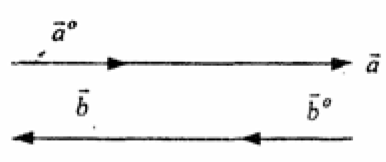
1. <u>Линейные операции над векторами</u> (сложение, вычитание, умножение на число).

Векторы необходимо уметь складывать как по правилу треугольника, так и по правилу параллелограмма.

2. <u>Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Базисные векторы. Декартов базис.</u>

Пример 1.2.1. Указать при каких значениях α и β возможно равенство $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, где a° и b° единичные векторы ($a^0 = a / |a|$, $b^0 = b / |b|$). Для решения приведенной задачи необходимо рассмотреть возможное расположение векторов *a* и *b* :





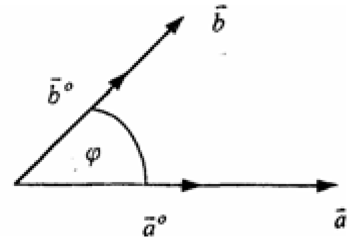


Рис .1.2.1 Рис .1.2.2

Рис .1.2.3

a) векторы *a* и *b* **сонаправлены (Рис. 1.2.1), тогда α=-β**;

b) векторы *a* и *b* имеют противоположное направление (рис.1.2.2). В этом случае **α=β** ;

c) векторы *a* и *b* образуют между собой угол φ. При этом угол φ отличен от 0 и π радиан (рис.1.2.3). Приведенное в условии равенство возможно лишь при α=β=0.

Рассмотренный пример дает представление о линейной зависимости и независимости векторов (важнейшее положение темы «Векторная алгебра»).

Линейной комбинацией *n* векторов x_i (i=1,n)

называется сумма произведений этих векторов на действительные числа *a*

$_i$ (i=1,n), а именно

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

(В рассмотренном примере записана линейная комбинация 2^x единичных векторов $a°$ и b°) .

Векторы x_i (i=l,n) называются линейно-зависимыми, если их линейная комбинация (1.2.1) равна нулю, а среди коэффициентов a_i (i=l,n) имеется хотя бы один отличный от нуля. На рис. 1. 2 .1-1. 2 . 2 изображены два линейно зависимых вектора. Они могут быть расположены на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Два вектора, расположенные на одной либо на двух параллельных прямых, называются коллинеарными.

Условие коллинеарности векторов *a = λb , где λÎR.*

Если три вектора расположены в одной либо в параллельных плоскостях, то они называются компланарными.

Компланарные векторы линейно зависимы. Необходимое и достаточное условие - компланарности векторов:

с = *αa+βb .*

Векторы x_i (i=l,n) называются линейно-независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации (1.2.1) возможно лишь в том случае, когда коэффициенты a_i(i=l,n) одновременно равны 0.

Случай двух линейно-независимых векторов представлен на рис. 1.2.3 (линейная комбинация *αa+βb* равна нулю лишь при одновременном обращении в ноль *α* и *β*) .

Пример 1.2.2. Векторы *a,b,c* некомпланарны (линейно независимы). Доказать, что векторы *m=a+2b-c,   n=3a-b+c* и *p=a+5b-3c* компланарны и найти их линейную зависимость.

Приравняем к нулю линейную комбинацию векторов *m,n,p* (*αm+βn+γk* = 0) и подставим в равенство разложения векторов *m,n,p* по векторам *a, b,c* .

$$\alpha(a+2b-c)+\beta(3a-b+c)+\gamma(-a+5b-3c)=(\alpha+3\beta-\gamma)a+(2\alpha-\beta+5\gamma)b+(-\alpha+\beta-3\gamma)c=0$$

Равенство нулю линейной комбинации векторов *a,b,c* возможно лишь в том случае, когда коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Из этого условия получаем систему линейных алгебраических уравнений, которую решим методом Гауса

(пример 1.1.11)

$$\begin{cases} \alpha+3\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha-\beta+5\gamma=0 \\ -\alpha+\beta-3\gamma=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$rgA=2; \begin{cases} \alpha=3\beta=\gamma \\ -\beta=-\gamma \\ \gamma=C \end{cases}; \begin{cases} \alpha=-2C \\ \beta=C \\ \gamma=C \end{cases}, C\in R$$

Коэффициенты равной нулю линейной комбинации векторов *m,n,p* могут быть

отличны от нуля, следовательно векторы *m,n,p* линейно зависимы

(компланарны). Подставляя α, β, γ в равенство

$\alpha m+\beta n+\gamma p=0$ и сокращая на С, получим $-2m+n+k=0$.

С понятием линейной независимости векторов тесно связано такое фундаментальное

понятие как базис.

Базисом на плоскости Q называется любая упорядоченная пара неколлинеарных

векторов, параллельных плоскости Q. Любой вектор с,

параллельный плоскости Q, можно представить в виде $c=\alpha a+\beta b$.

Базисом в трехмерном пространстве называется любая упорядоченная тройка

некомпланарных (линейно-независимых) векторов. Если *a,b,c*- базис в

пространстве, то любой вектор *d* пространства можно единственным образом

разложить по этому базису по формуле:

$d=\alpha a+\beta b+\gamma c$

Декартовым базисом на плоскости (рмс 1.2.4) называются два единичных,

взаимно-перпендикулярных вектора *i* и *j* ($|i|=|j|=1$,

i^j), совпадающих с положительным направлением осей ОХ и ОУ

соответственно.

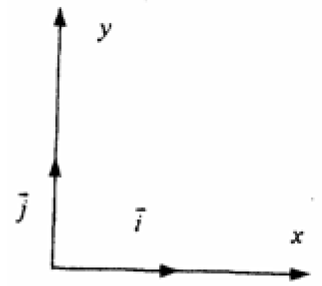


рис.1.2.4

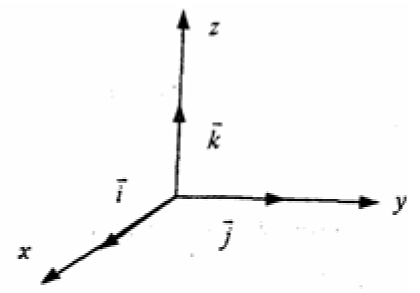


рис.1.2.5

Любой вектор плоскости a может быть единственным образом представлен в

виде $a=a_x i+a_y j$, где числа a_x

и a_y называются координатами вектора a .

Декартовым базисом в пространстве (рис.1.2.5.) называются три единичных взаимноперпендикулярных вектора $i,j,k,$ совпадающих с положительным направлением осей OX,OY и OZ соответственно. Любой вектор a может быть единственным образом представлен в виде

$a=a_x i+a_y+a_z k$, где числа a_x

, a_y , a_z называются координатами вектора a.

Если вектор $a=AB$ задается координатами начальной точки $A(x_a$

, $y_{a,}$ z_a $)$ и конечной $B(x_{b,}$ y

$_b$, z_b $),$ то его координаты имеют вид:

$a=(x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a)$.

Два вектора a и b равны в том и только в том случае, когда координаты их равны, т.е. $a_x=b_x$, $a_y=b$

$_y$, $a_z=b_z$.

<u>3.Скалярное произведение векторов</u>. Скалярным произведением векторов

a и b называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$a\,b=|a||b|cos(a,b)$

(1.2.2)

Из формулы (1.2.2) для ненулевых векторов можно вычислить косинус угла между

векторами

$$\cos(a,b)=\frac{ab}{|a||b|} \qquad (1.2.3)$$

Длина вектора $|a|$ определяется по формуле

$|a| = \sqrt{aa}$

(1.2.4)

Из свойств скалярного произведения следует обратить внимание на коммутативный (перестановочный) закон $ab=ba$.

Пример 1.2.3. Вычислить угол между векторами a и b , если

$a=2m+3n$, $b=m-2n$, $|m|=2$, $|n|=3$, $(m,n)=$

$\pi/3$. Угол между векторами вычисляется по формуле (1.2.3).

$(2m+3n)(m-2n)=2mm-4mn+3nm-6nn=2mm-mn-6nn=2\cdot2\cdot3\cdot cos0-2\cdot3\cdot cos($

$\pi/3)$--$6\cdot3\cdot3\cdot\cos0=12-3-54=-45$;

$$|a| = \sqrt{aa} = \sqrt{(2m+3n)^2} = \sqrt{4m^2+12mn+9n^2} = \sqrt{4\cdot 4+12\cdot 6\cdot \tfrac{1}{2}+9\cdot 9} = \sqrt{133};$$

$$|b| = \sqrt{bb} = \sqrt{(m-2n)^2} = \sqrt{m^2-4mn+4n^2} = \sqrt{4-4\cdot 6\cdot \tfrac{1}{2}+4\cdot 9} = \sqrt{28};$$

Таким образом, $\cos(ab) = \dfrac{-45}{\sqrt{28\cdot 133}} = \dfrac{-45}{\sqrt{4724}}$; $(ab) = \pi - \arccos\left(\dfrac{45}{\sqrt{4724}}\right)$.

Предположим в пространстве задан декартов базис { i , j, k } и два вектора

$a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$.

В декартовом базисе скалярное произведение векторов и длина вектора вычисляются по формулам:

$a\, b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (1.2.5)

$|a| = \sqrt{aa} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1.2.6)

Условие перпендикулярности векторов: ab=0 или

$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ (1.2.7)

Условие коллинеарности векторов:

$a = \lambda b$ или $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$ (1.2.8)

Пример 1.2.4. При каком значении α векторы $a(2,3,4)$ и $b(3, \alpha,-1)$ перпендикулярны?

Используя (1.2.7), имеем $ab=6+3\alpha -4=0$ или $3\alpha =-2$, $\alpha =-2/3$

Пример1.2.5.При каких значениях α и β векторы $a(2,4, \alpha)$ и $b(4,\beta,1)$коллинеарны?

Используя условие коллинеарности векторов (1.2.8), имеем: $2/4=4/\beta=\alpha/1$. Откуда $4/\beta =1/2$ или $\alpha/1=1/2$, $\beta = 8$, а $\alpha =1/2$

Пример 1.2. 6. Найти вектор b, коллинеарный вектору a(l,-2,-2) образующий с ортом j острый угол и имеющий длину $|b|$ =15.

Пусть вектор b имеет координаты b_x, b_y, b_z, Из условия коллинеарности (1.2.8) имеем $b = \lambda a$ или $b_x = \lambda a_x = \lambda$, $b_y = \lambda a_y = -2\lambda$, $b_z = \lambda a_z = -2\lambda$.

По формуле (1.2.6) вычисляем

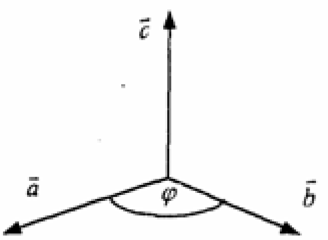
$$|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{9\lambda^2} = 3|\lambda| = 15.$$

Откуда $|\lambda|=5$ или $\lambda=\pm 5$. Получаем два вектора b; b_1 (5,-10,-10) и b_2 (-5,10,10). Так угол между вектором b

и ортом j острый, то $cos(b,j)>0$ и координата b_y
>0. Поэтому в качестве вектора b выбираем вектор b_2
т.е. $b =-5\,i+10\,j+10k$.

4. Векторное произведение векторов.

Необходимо обратить внимание студентов на определение правой и левой троек
векторов (рис.1.2.6 и 1.2.7).



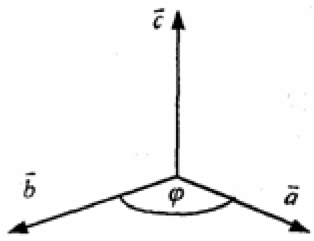


Рис.1.2.6
Рис.1.2.7

Тройка некомпланарных векторов a,b,c называется правой (рис.1.2.6) или
левой (рис.1.2.7), если будучи приведены к общему началу, эти векторы
располагаются так, как могут быть расположены соответственно большой,
указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

Векторным произведением векторов a и b называется вектор $c,$
который обозначается символом $c=a'b$ и удовлетворяет
следующим трем условиям:

1) вектор c перпендикулярен плоскости векторов a и $b;$
2)образует с векторами a $и$ b правую тройку;
3)длина вектора c
численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах a
и $b,$ т.е.

$|c|= |a|\times|b|\sin(a\ b)$
(1.2.9)

Из свойств векторного произведения следует обратить внимание на
антикоммутативность, т.е. $a'b=-b'a$

Пример 1. 2.7. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах
$a=2m+n$ и $b = m- n$, если $|m|=2$, $|n|=1$, $(m,n)=$
$\pi/6$

Вычислим векторное произведение векторов a, и b и воспользуемся формулой (1.2.9)

$$a'b =(2m+ n)\text{-}(m- n)= 2m'm- 2m'n+n'm\text{-}n'n =0\text{-}3m'n\text{-}0=\text{-}3m'n$$

$$S_{пар} = \frac{1}{2}\,|\,a \times b\,| = \frac{3}{2}\,2\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\,(ед^{\,2})$$

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\,S_{пар} = \frac{3}{4}\,(ед^{\,2})$$

В декартовом базисе { i,j,k} векторное произведение векторов $a(a_x,a_y,a_z)$ и

$b(b_x, b_y, b_z)$ вычисляется по формуле

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.2.10)$$

Пример1.2.8. Найти координаты вектора $b=(b_x,b_y,b_z)$, если он перпендикулярен векторам a_1 (2,-3,1) и a_2 (1,-2,3) и удовлетворяет условию;

$b(i+2j-7k)=10$.

Вектор b перпендикулярен векторам a_1 и a_2. Поэтому его можно искать в виде:

$$b=\lambda(a_1\times a_1)=\lambda\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\lambda(-7i-5j-k);b=-7\lambda i-5\lambda j-\lambda k$$

Удовлетворим условию $b(i+2j-7k)=10$; $-7\lambda-10\lambda+7\lambda=10$; $-10\lambda=10$, $\lambda=-1$.

Таким образом вектор имеет вид: $b=7i+5j+k$.

Пример 1.2.9.Вычислить площадь треугольника, вершины которого расположены в точках A(1,2,3), B(2,1,-1), C(3,-1,1).

$S_{\Delta ABC}=1/2\ |AB\text{x}AC|$.Вычислим координаты векторов AB и AC и векторное произведение $AB'AC$.

$$AB=AB(1,-1,-4);AC=AC(2,-3,-2);AB\times AC=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}=-10i-6j-k;$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{10^2+6^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{137}\,(ед^2)$$

5.Смешанное произведение трех векторов.

Смешанным произведением трех векторов a,b,c называется число, которое обозначается символом axb-c (смешанное произведение иногда называют векторно-скалярным).

Если векторы a,b,c некомпланарны, то смешанное произведение $a'b$-c равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $a,b,c,$ взятому со знаком "+", если упорядоченная тройка векторов a,b,c -правая, и со знаком "-", если эта тройка - левая.

Из свойств смешанного произведения трех векторов следует отметить следующие:

1)при круговой перестановке векторов смешанное произведение не меняется, т.е. (

ax $b) \times c$ = (сх$a) \times b$ = (bх$c) \times a;$

2)если в смешанном произведении поменять местами два соседних сомножителя, то

произведение изменит знак, т.е. (aх $b) \times c = -(a$х

$c) \times b$;

3) смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы

компланарны, т.е. условием компланарности векторов является равенство нулю

смешанного произведения этих векторов.

Смешанное произведение векторов в декартовом базисе

$\{i,j,k\}$.Если $a(a_x, a_y, a_z)$, $b(b_x, b_y, b_z,)$ и $c(c_x, c_y, c_z)$, то

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1.2.11)}$$

Условие компланарности векторов $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$ (1.2.12)

Наиболее распространенные задачи, решаемые при помощи смешанного произведения:

1)найти объем параллелепипеда, построенного на векторах a,b,c:

$V = |a$ х $b \times c|$**,**

2) найти объем тетраэдра, построенного на векторах a,b,c:

$V=1/6$ ($|a$ х $b \times c|$)

3) проверить компланарны ли векторы $a,b,c,$ если a х $b \times$

$c=0,$ то векторы компланарны, если a х $b \times c^1\ 0,$

то векторы некомпланарны;

4)проверить правую или левую тройку образуют векторы $a,b,c,$

>0 -тройка векторов - правая ,

a х $b \times c$=.

<0 - тройка векторов левая.

Замечание: смешанное произведение векторов $a,b,c,$ как правило, записывают в виде $a \times b \times c$.

Пример1.2.10. Вычислить длину высоты тетраэдра *ABCD,* проведенную из

вершины *D* к основанию *ABC,* если вершины тетраэдра имеют координаты:

A (1,2,0), B(2,1,1), C(0,-3,-1), D(3,3,4). Найдем координаты векторов, выходящих из вершины *A:*

AB(1,-1,1), AC(-1,-5,-1), AD(2,1,4), $V_{тетр}=1/6(|AB\times AC\times AD|)$; $V_{тетр}=1/3(S_{DABC}\times H_D)$;

$S_{DABC}=1/2\ (|AB\times AC|)$; $H_D=\frac{3V}{S_{\Delta ABC}}$. Отсюда

$$V_{тетр}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 1\\ -1 & -5 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -6 & 0\\ 3 & 0 & 5\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-6\left|\begin{matrix}1 & 1\\ 3 & 5\end{matrix}\right|\right|=2(ед^3)$$

$$AB\times AC=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -5 & -1\end{vmatrix}=6i-6k;\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}6\sqrt{1+1}=3\sqrt{2}(ед^2)$$

$$H_D=\frac{3\cdot 2}{3\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}(ед)$$

Вопросы для самопроверки

1.Сформулируйте правила треугольника и параллелограма сложения векторов.

2.Укажите принципиальное различие в формулах для вычисления длины вектора в произвольном и декартовом базисах.

3. Чему равно скалярное произведение базисных векторов в декартовом базисе?

4.Чему равно векторное произведение базисных векторов в декартовом базисе?

5.Запишите условие компланарности векторов. Приведите пример.

6.Можно ли построить треугольник на векторах *a,b,a+b* ?

7.Приведите пример условия, при выполнении которого из трех векторов *a, b,c*
можно образовать треугольник.

8. Докажите, что объем тетраэдра вычисляется по формуле $V=\frac{1}{6}|a\times b\times c|$

9. Вычислите угол между векторами, совпадающими со скрещивающимися ребрами
тетраэдра.

10.Как Вы считаете, произведение векторов *a*x*b*x*c*
(двойное векторное) является векторной величиной или скалярной?

. **Методические указания к решению задач по аналитической геометрии,**

При изучении аналитической геометрии в пространстве возникают затруднения, связанные с недостаточностью пространственных представлений. В таких случаях полезно пользоваться пространственными моделями (тетрадь-плоскость; карандаш, ручка-прямая,
отрезок прямой) и использовать их при разборе теоретического материала

наравне с рисунками, приведенных в задачниках.

Различные виды уравнения плоскости

1.Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0$
$,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору n(A,B,C) :
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
(1.3.1)
Пример 1.3.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 2, 3), перпендикулярно вектору n(2,-1,4). Используя уравнение (1.3.1), получим 2(x-l)-l(y-2)+4(z-3)=0 или 2x-y+4z-l2-0.

Пример 1. 3 . 2.Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0
(1,2,3) пареллельно векторам *a*(3,-1.,0) и *b*(2,l,2).
Плоскость пареллельна векторам *a* и *b*, поэтому вектор нормали к плоскости n(A,B,C) равен векторному произведению векторов)
a и *b* и находится по формуле (1.2.10):

$$n = a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2i-6j+5k$$

Уравнение искомой плоскости (1.3.1) имеет вид
-2(x-l)-6(y-2)+5(z-3)=0 или -2x-6y+5z-l=0 .
2.Общее уравнение плоскости:
Ax+By+Cz+D=0
(1.3.2)
В этом уравнении коэффициенты *A, B,C* -координаты вектора *n(A,B,C)* перпендикулярного плоскости.
3.Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Числа *a,b,c* равны величинам направленных отрезков, отсекаемых на осях координат.

4.Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1$
$,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2$
$)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не
лежащие на одной прямой

Пример 1.3.3.Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки ***M***
₁(1,2,3), M₂(-1,1,1) , M₃(0,2,1) .
В соответствии с уравнением (1.3.4) получаем

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(x-1)-2(y-2)-(z-3) = 2x-2y-z+5=0$$

т.е. $2x-2y-z+5=0$

и есть уравнение искомой плоскости.

Различные видах уравнений прямой в пространстве

1.Общее уравнение прямой $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ (1.3.5)

Прямая задана пересечением двух плоскостей с нормалями $n_1(A_1, B_1, C_1)$ и

$n_2(A_2, B_2, C_2)$

2.Канонические (стандартные) уравнения прямой, $a(m,n,p)$

Пример 1.3.4.Перейти от общих уравнений прямой

2x+3y-z+2=0

x-y-3z+6=0 к каноническим уравнениям. Прежде всего выберем какую-нибудь точку M_0 , например M_0 (0,0,2), удовлетворяющую общим уравнениям прямой. Если сразу не удается подобрать координаты точки M_0 , то эту точку можно найти из решения системы линейных уравнений (см. пример 1.1.11), которой задаются общие уравнения прямой.

Направляющий вектор прямой a может быть выбран в виде $a=n_1 \times n_2$ (см. 1.3.5), где n_1(2,3,-l) и n_2(1,-1,-3) -нормальные векторы к плоскостям, пересечением которых и задается прямая

$$a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -5i + 5j - 5k$$

'Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x}{-5} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-5} \quad \text{или} \quad \frac{x}{-1} = y = \frac{z-2}{-1}$$

3. Параметрические уравнения прямой

$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + pt,\ z = z_0 + ut,$

$t \in R$ (1.3.7)

Пример 1.3.5.В примере 1.3.4 от канонических уравнений прямой перейти к параметрическим уравнениям.

Ряд равных отношений в канонических уравнениях прямой примера 1.3.4 приравняем к t:

$$t = \frac{x}{-1} = y = \frac{z-2}{-1}$$

Откуда получим параметрические уравнения $x=-t, y=t, z=2-t,\ t \in R$.

4.Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad \textbf{(1.3.8)}$$

Замечание. В уравнениях прямой (1.3.6) и (1.3.8) допускаете равенство нулю одной

или двух координат вектора ***a(m,n,p).*** В этом случае нуль в

знаменателе воспринимается только лишь как информация о координатах вектора

a .

Задачи, относящиеся к плоскостям

Пусть заданы две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

1.Взаимное расположение двух плоскостей:

а)условие перпендикулярности плоскостей:

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$
$=0$

(1.3.9)

б)условие параллельности плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (1.3.10)$$

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (1.3.11)$$

2.Угол между плоскостями:

3. Расстояние от точки M_0 (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \textbf{(1.3.12)}$$

Пример 1. 3 . 6 . Найти расстояние между параллельными плоскостям

$2x+3y-z+1=0$ $\qquad$ $2x+3y-z+4=0.$

Это расстояние равно расстоянию от любой точки одно плоскости до другой.

Выберем на первой плоскости произвольную точку, например M_0 (0, 0,1). По формуле (1.3.12) находим

$$d=\frac{|2\cdot 0+3\cdot 0-1+4|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Пример 1.3.7.Найти угол между плоскостями x- 3y+z-1= 0 и y+z+2=0. По

формуле (1.3.11) находим

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot 0-3\cdot 1+1\cdot 1|}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{0+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{11}}$$

Замечание. Как правило, вычисляется острый угол между плоскостями.

Задачи относящиеся к прямым в пространстве

Пусть заданы две прямые в пространстве

1.Взаимное расположение двух прямых:

а) условие перпендикулярности прямых:

$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2$

$=0$

(1.3.14)

б) условие параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (1.3.15)$$

2.Угол между прямыми :

$$\cos\varphi=\frac{|a_1\cdot a_2|}{|a_1|\cdot|a_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (1.3.16)$$

3. Расстояние от точки $M\ (x_1,y_1,z_1)$ до прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad \mathbf{d}=\frac{|a\times\overline{M_0M_1}|}{|a|}, \qquad (1.3.17)$$

где $\bar{a}(m,n,p)$, $\quad \overline{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$,

а векторное произведение вычисляется по формуле (1.2.10).

4. Условие пересечения

прямых. Прямые задаются уравнениями (1.3.13). Рассмотрим смешанное

произведение $a_1\,a_2\,M_1M_2$,

$a_1\neq\lambda a_2$

Если $a_1\,a_2$

$M_1M_2\ = 0$

(1.3.18)

то прямые пересекаются, если

$a_1\,a_2\,M_1M_2\ \neq 0$

(1.3.19)

то прямые скрещиваются. Смешанное произведение векторов вычисляется по

формуле (1.2.11).

5. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Прямые заданы уравнениями (1.3.13). Если $a_1\,a_2\,M$

${}_1M_2\ \neq 0$ то расстояние d между прямыми вычисляется по

формуле

$$d=\frac{\left|a_1\cdot a_2\times M_1M_2\right|}{\left|a_1\times a_2\right|} \qquad (1.3.20)$$

Пример 1.3.8.Исследовать взаимное расположение прямых

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=2+3t\\ y=1-t\\ z=1+t\end{cases}$$

Первая прямая проходит через точку $M_1(1,-1,-2)$, а вторая прямая через точку $M_2(2,1,1)$. Направляющие векторы прямых a_1 (2,3,4) и a_2(3,-1,1) .

Вычислим смешанное произведение $a_1\, a_2\, M_1M_2$

$$\begin{vmatrix}2&3&4\\3&-1&1\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&-2\\0&-7&-8\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2\\-7&-8\end{vmatrix}=8-14=-6\neq 0$$

Так как выполняется условие (1.3.19), то прямые скрещиваются.

Пример 1.3.9.Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми примера 1.3.8. Используем формулу (1.3.20).

$$a_1\times a_2=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&3&4\\3&-1&1\end{vmatrix}=7i+10j-11k;\quad a_1a_2M_1M_2=-6$$

$$d=\frac{|-6|}{\sqrt{49+100+121}}=\frac{6}{\sqrt{170}}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть плоскость задана уравнением (1.3.2), а прямая-уравнением (1.3.6) , либо уравнением (1.3.7), тогда n(A,B,C)— нормаль к плоскости, $a(m,n,p)$ направляющий вектор прямой.

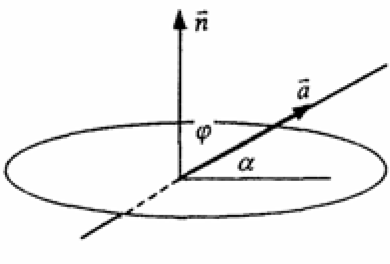


Рис.1.3.1

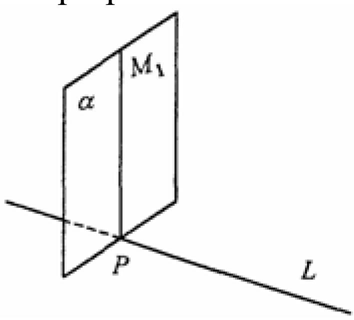


Рис.1.3.2

1.Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$n=\lambda a \quad \text{или} \quad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (1.3.21)$$

2.Условие параллельности прямой и плоскости:

$na=0$ или $Am+Bn+Cp=0$.

(1.3.22)

3.Угол между прямой и плоскостью (рис.1.3.1)

$$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\cos\varphi| = \frac{|an|}{|a||n|} \quad \textbf{(1.3.23)}$$

4.Координаты точки пересечения прямой и плоскости находятся из системы уравнений (1.3.2) и (1.3.7), а именно

$$\begin{cases} A_x+B_y+C_z+D=0 \\ x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \quad (1.3.24)$$

5. Проекция точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ на прямую (рис. 1.3.2). Координаты точки P определяются из системы

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p} \\ m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0 \end{cases} \quad \textbf{(1.3.24)}$$

где плоскость (α) проведена через точку M_1 перпендикулярно прямой L.

Прямая линия на плоскости

Уравнение прямой линии на плоскости может быть получено из канонических уравнений прямой в пространстве (1.3.6), если положить z_0 = 0 и p=0

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z}{0} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} \\ z=0 \end{cases} \quad \textbf{(1.3.26)}$$

В зависимости от условий задачи уравнение прямой на плоскости может быть записано в виде:

а)y=kx+b- (1.3.27) уравнение прямой с угловым коэффициентом;

б)ax+by+c=0 - (1.3.28) общее уравнение прямой

в)$y=y_0+k(x-x_0)$- (1.3.29) уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k;

г) $\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$ – (1.3.30)

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между двумя

прямыми $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+ b_2$

определяется по формуле

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| \qquad (1.3.31)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых имеет вид:

$k_1 = k_2$

(параллельности) (1.3.32)

$k_2 = -1/k_1$ (перпендикулярности) (1.3.33)

Пример 1. 3.10. Треугольник задан координатами вершин $A_1(1,2)$, $A_2(4,0)$, $A_3(6,3)$. Написать уравнения:

1) стороны A_1A_3 ;

2) медианы, проведенной из вершины A_2 ;

3) высоты, проведенной из вершины A_2

1) Воспользуемся уравнением (1.3.30)

$$\frac{y-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\quad;\qquad \frac{y-2}{3-2}=\frac{x-1}{6-1}\quad;\qquad y-2=\frac{1}{5}(x-1);$$

$y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{9}{5}$ – **уравнение стороны** A_1A_3.

2) Пусть точка K -точка пересечения медианы треугольника, проведенной из A_2

со стороной A_1A_3 . Точка K-середина отрезка A_1A_3. Поэтому ее координаты равны полусумме координат концов отрезка, а именно

$$K(\frac{7}{2},\frac{5}{2}).$$

Воспользуемся уравнением (1.3.30)

$$\frac{y-y_2}{y_k-y_2}=\frac{x-x_2}{x_k-x_2};\qquad \frac{y-0}{\frac{5}{2}-0}=\frac{x-4}{\frac{7}{2}-4};\qquad \frac{2}{5}y=-2(x-4);$$

$y=-5(x-4);$ $\quad y=-5x+20$ – **уравнение медианы** A_2K

3)Высота, проведенная из вершины A_2 перпендикулярна стороне A_1A_3, поэтому угловой коэффициент k определяется из условия (1.3.33):

$$k=-\frac{1}{k_{A_1A_3}}=-\frac{1}{1/5}=-5$$

Воспользуемся уравнением (1.3.29):

$y = y_2 + k(x-x_2)$; $y=0-5(x-4)$;

$y=-5x +20$, т.е. высота треугольника $A_1A_2A_3$, проведенная из вершины A_2 совпадает с медианой, проведенной из этой вершины.

Вопросы для самопроверки

1.Запишите условия перпендикулярности и параллельности:

а)прямых;

б)плоскостей;

в)прямой и плоскости.

2.Получите координаты точки К делящей данный отрезок АВ в отношении

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \lambda.$$

3.Какие особенности имеет уравнение плоскости, если она:

а)параллельна осям координат ОХ; ОУ; OZ;

б)перпендикулярна осям координат ОХ; ОУ; OZ;

в)параллельна плоскостям ОХУ; OXZ; OYZ .

4. Как найти точку, симметричную точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ относительно плоскости $Ax+ By+ Cz+D = 0$.

5. Составьте уравнение плоскости , проходящей через точку M_0 (x_0,y_0,z_0) параллельно двум прямым с направляющими векторами a_1 *и* a_2 , причем $a_1 \neq a_2$

6.Получите нормальное уравнение плоскости.

7.Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 , параллельно вектору a .

8.Выведите формулы для нахождения расстояния от точки до прямой, между двумя скрещивающимися прямыми.

9.Получите уравнение биссектрисы угла треугольника.

10.Получите формулу для нахождения угла между прямыми, лежащими в плоскости ХОУ.