



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

«СОГЛАСОВАНО»
Руководитель ОП
д.т.н., проф. Блиновская Я.Ю.

(подпись) (Ф.И.О.)

«14» июня 2019г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Заведующий БЧСиЗСОС
д.т.н., проф. Петухов В.И.

(подпись) (Ф.И.О.)

«14» июня 2019г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.Б.09 Высшая математика
Направление подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность»
профиль «Техносферная безопасность»
Форма подготовки: очная

курс 1-2, семестр 1-3
лекции 108 час.
практические занятия 144 час.
лабораторные работы -0
в том числе с использованием МАО лек.12 /пр.24/лаб. 0 час.
всего часов аудиторной нагрузки 252 час.
в том числе с использованием МАО 36 час.
самостоятельная работа 288 час.
в том числе на подготовку к экзамену 108 час.
контрольные работы 1 – 3 семестры
курсовая работа / курсовой проект не предусмотрены
зачет не предусмотрен
экзамен – 1-3 семестры

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта, самостоятельно устанавливаемого федеральным государственным автономным образовательным учреждением высшего образования «Дальневосточный государственный университет от 17.06.2016 « 12-13-1160 по направлению подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность» (уровень бакалавриата).

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры безопасности в чрезвычайных ситуациях и защиты окружающей среды, протокол № 10 от «14» июня 2019 г.

Заведующий кафедрой: д.т.н., профессор Петухов В.И.

Составитель: к.ф.-м.н. Ксенденко Л.С.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 2 из 90

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «27» июня 2016 № _____
_____ г. _____

Заведующая кафедрой _____ Р.П. Шепелева
(подпись) (И.О. Фамилия)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _____ 201 г. № _____

Заведующая кафедрой _____ Р.П. Шепелева
(подпись) (И.О. Фамилия)

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 3 из 90

ABSTRACT

Bachelor's degree in 20.03.01 «Techno sphere safety».

Study profiles: "Protection in emergency situations", "Environmental Engineering",
"Safety of technological processes and production".

Course title: Mathematical analysis.

Basic part of Block, 9 credits.

Instructor: Ksendzenko L.S.

Course description: limit and continuity of functions, differential calculus of functions of one and several variables, indefinite and multiple integrals, differential equations, series theory.

Form of final knowledge control: the first and second semester - test; third semester – exam.

Main course literature:

1. Dmitry Pisjnjenniy. Abstract of Lectures on higher mathematics: Full course. Publishing house Ayris Press, 2015.- 603 p. ISBN 978-5-8112-6043-0
2. Ryabushko A.P. Individual jobs in higher mathematics. At 4 parts. Part 1 .: schoolbook. – Minsk "Vysheyshaya School", 2013. - 304 p. Link: http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=65409
3. Ryabushko A.P. Individual jobs in higher mathematics. At 4 parts. Part 2 .: schoolbook. – Minsk "Vysheyshaya School", 2014. - 398 p. Link: http:?

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 4 из 90

[//e.lanbook.com/books/element.php P11_id = 65409](http://e.lanbook.com/books/element.php?P11_id=65409)

4. Ryabushko A.P. Individual jobs in higher mathematics. In 4 parts. Part 3 .: schoolbook. – Minsk "Vysheyshaya School", 2013. - 368 p. Link
http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=65410
5. Ryabushko A.P. Individual jobs in higher mathematics. At 4 parts. Part 4.: schoolbook. – Minsk "Vysheyshaya School", 2013. - 334 p. Link
http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=65411
6. Danko P.E., Popov A.G., Tatyana Kozhevnikova. Higher Mathematics in the exercises and tasks [textbook for high schools]. – 7-th ed., Rev. Moscow: AST: Peace and Education, 2014. ISBN: 978-5-17-083948-3

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 5 из 90

АННОТАЦИЯ

Место дисциплины «Математический анализ» в структуре ООП ВПО

Дисциплина «Математический анализ» относится к учебным дисциплинам базовой части профессионального цикла основной образовательной программы (ООП) направления подготовки 20.03.01 – *Техносферная безопасность*, квалификация (степень) – бакалавр. Профиль подготовки: «Безопасность технологических процессов и производств». Трудоемкость курса 324 ч. (9 ЗЕТ).

Для успешного изучения дисциплины «Математический анализ» студенты должны быть знакомы с основными положениями школьной математики. На материале математического анализа базируется большое число общих и специальных инженерных дисциплин, таких как, теория вероятностей и математическая статистика, прикладная математика, физика, механика, информатика, теория горения и взрыва и др.

Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки используются во всех без исключения естественнонаучных и инженерных дисциплинах, модулях и практиках ООП.

Изучение математического анализа позволяет будущему специалисту научно анализировать проблемы его профессиональной области (в том числе связанные с созданием новой техники и технологий), успешно решать разнообразные научно-технические задачи в теоретических и прикладных аспектах, самостоятельно – используя современные образовательные и информационные технологии – овладевать той новой информацией, с которой ему придётся столкнуться в производственной и научной деятельности.

Изучение теоретического и алгоритмического аппарата математического анализа способствует развитию у будущих специалистов склонности и способности к творческому мышлению, выработке системного подхода к исследуемым явлениям, умения самостоятельно строить и анализировать

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 6 из 90

математические модели различных систем.

Цели изучения дисциплины

Целями освоения дисциплины (модуля) Математика – Математический анализ являются формирование и развитие личности студентов, их способностей к алгоритмическому и логическому мышлению, а так же обучение основным математическим понятиям и методам математического анализа. Изучение курса математического анализа способствует расширению научного кругозора и повышению общей культуры будущего специалиста, развитию его мышления и становлению его мировоззрения.

Задачи дисциплины

1. Формирование устойчивых навыков по компетентностному применению фундаментальных положений математического анализа при изучении дисциплин профессионального цикла и научном анализе ситуаций, с которыми выпускнику приходится сталкиваться в профессиональной и общекультурной деятельности.

2. Освоение методов дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений, теории рядов и методов математической физики при решении практических задач.

3. Обучение применению методов математического анализа для построения математических моделей реальных процессов в области техносферной безопасности.

4. Формирование при изучении математического анализа элементов общекультурных и профессиональных компетенций.

Для успешного изучения дисциплины «Математический анализ» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 7 из 90

компетенции:

- Математические компетенции
- Ценностно-смысловые компетенции
- Общекультурные компетенции
- Информационные компетенции
- Коммуникативные компетенции
- Социально-трудовые компетенции
- Компетенции личностного самосовершенствования

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются элементы профессиональной компетенции ПК-22:

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования элементов компетенций	
Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК – 22);	Знает	Основные понятия и методы математического анализа, теории дифференциальных уравнений и методов математической физики (1-3 семестр обучения)
	Умеет	Использовать методы математического анализа, теории дифференциальных уравнений и методов математической физики при решении типовых задач
	Владеет	Методами математического анализа при решении простейших профессиональных задач (1-3 семестр обучения)

Для формирования элементов вышеуказанной компетенции в рамках дисциплины «Математический анализ» применяются следующие методы активного обучения: лекция-беседа и групповая консультация.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 8 из 90

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Раздел I. Математический анализ 72/ час.			
№ п/п	Тема	Содержание	Кол-во часов
1	Введение в математический анализ	Множества. Операции с множествами. Множество вещественных чисел. Комплексные числа. Функция. Способы задания функции. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.	4
2	Предел и непрерывность функции действительной переменной	Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Непрерывность функции. Основные свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация.	6
3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	Определение производной. Геометрический и физический смысл производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные основных элементарных функций. Производные функций, заданных неявно, параметрически. Понятие о производных высших порядков. Дифференциал, его свойства. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Исследование функций и построение их графиков.	10
4	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Функции нескольких переменных. Область определения, предел, непрерывность. Частные производные, полный дифференциал. Производная по направлению, градиент. Частные производные высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных.	5
5	Неопределенный интеграл	Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменного, метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных (дробных), тригонометрических и иррациональных выражений. О функциях, интегралы от которых не выражаются через	11

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 9 из 90

		элементарные функции.	
6	Определенный интеграл, несобственные интегралы	Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Методы вычисления определенных интегралов. Геометрические и физические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций.	8
7	Дифференциальные уравнения	Дифференциальные уравнения: основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференциальные уравнения высших порядков, основные понятия. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородные уравнения второго порядка. Структура общего решения однородного уравнения. Линейные неоднородные уравнения второго порядка. Структура общего решения неоднородного уравнения. Метод Лагранжа вариации постоянных. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.	12
8	Кратные интегралы	Задачи, приводящие к понятию двойного Интеграла. Определение двойного интеграла, свойства, применение. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах.	6
9	Числовые и функциональные ряды	Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопередающиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость рядов. Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.	10
	ИТОГО:		72
Раздел II. Ряды Фурье. Уравнения математической физики 18/ час			
№ п/п	Тема	Содержание	Кол-во часов
10	Ряды Фурье	Ряды Фурье для функции с периодом 2π . Ряды Фурье для функции с периодом $2l$. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.	6
		Классификация уравнений в частных	2

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 10 из 90

11	Уравнения математической физики	производных 2 порядка. Решение примеров.	
		Вывод уравнения колебаний струны. Постановка начальных и краевых условий. Вывод решения задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны методом Даламбера. Решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны методом Фурье. Гармонические колебания. Стоячие волны.	4
		Вывод уравнения линейной теплопроводности. Начальные и краевые условия. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье.	4
		Вывод уравнения Лапласа. Гармонические функции. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье.	2
	Итого:		18

Семестр I

Лекция 1. Множества. Операции с множествами. Множество вещественных чисел. Расширенное понятие числа. Понятие функции. Обзор элементарных функций (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 2. Модуль действительного числа. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. (2 часа).

Лекция 3. Предел функции непрерывного аргумента. Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Их свойства. (2 часа).

Лекция 4. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. (2 часа).

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 11 из 90

Лекция 5. Сравнение бесконечно малых величин. Непрерывные функции. Действия над ними. Точки разрыва. (2 часа).

Лекция 6. Задачи, приводящие к понятию производной. Ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции. (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 7. Производная сложной и обратной функций. Производная функций заданных неявно и параметрически (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 8. Дифференциал функции. Свойства. Инвариантность формы первого дифференциала (2 часа).

Лекция 9. Теоремы о конечных приращениях. Правило Лопиталья (2 часа).

Лекция 10. Исследование функций с помощью производных (2 часа).

Лекция 11. Выпуклость, вогнутость кривой. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Полное исследование функции и построение ее графика (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 12 из 90

Лекция 12. Функции нескольких переменных. Частные производные. Производная по направлению. Градиент. (2 часа).

Лекция 13. Частные производные высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных. (2 часа).

Лекция 14. Задачи на нахождение наименьших и наибольших значений функции. (2 часа).

Лекция 15. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. (2 часа).

Лекция 16. Основные методы интегрирования. (2 часа). Лекция проводится с **использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа»**. Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 17. Интегрирование выражений, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен. (2 часа). Лекция проводится с **использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа»**. Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 18. Интегрирование дробно-рациональных и тригонометрических функций. (2 часа). Лекция проводится с **использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа»**. Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Семестр II

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 13 из 90

Лекция 1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла, его свойства. Теорема существования. (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 2. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница. (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 3. Методы вычисления определенного интеграла. Несобственные интегралы. (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 4. Геометрические и физические приложения определенного интеграла. (2 часа).

Лекция 5. Задачи, приводящие к понятию дифференциальных уравнений. Основные определения. (2 часа).

Лекция 6. Типы дифференциальных уравнений I порядка и методы их решения. (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 14 из 90

является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного **использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа»**. Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. (2 часа).

Лекция 8. Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка. Теорема о структуре общего решения. (2 часа). Лекция проводится с **использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа»**. Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка. Теорема о структуре общего решения. (2 часа). Лекция проводится с применением метода активного обучения **«лекция-вдвоем»**.

Лекция 10. Метод вариации произвольных постоянных решения неоднородных дифференциальных уравнений II порядка. (2 часа).

Лекция 11. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений I порядка с постоянными коэффициентами (2 часа).

Лекция 12. Числовые ряды. Основные определения и примеры. Необходимый признак сходимости рядов (2 часа). вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 13. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (2 часа).

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 15 из 90

Лекция 14. Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Остаток ряда. Теорема Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда (2 часа).

Лекция 15. Понятие о функциональных рядах. Степенные ряды. Свойства. Теорема Абеля (2 часа).

Лекция 16. Ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций (2 часа).

Лекция 17. Применение рядов (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа». Лекция-беседа, или диалог с аудиторией является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Она предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией.

Лекция 18. Обзорная лекция.

Семестр III.

Лекция 1. Гармонические колебания. Ряды Фурье для функции с периодом 2π (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «Лекция с заранее запланированными ошибками» - рассчитана на стимулирование студентов к постоянному контролю предлагаемой информации (поиск ошибки: содержательной, методологической, методической, орфографической). В конце лекции проводится диагностика слушателей и разбор сделанных ошибок.

Лекция 2. Ряды Фурье для функции с периодом $2l$ (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «проблемная лекция». **Проблемная лекция** - на этой лекции новое знание вводится через проблемность вопроса, задачи или ситуации. При этом процесс познания студентов в сотрудничестве и диалоге с преподавателем приближается к исследовательской деятельности. Содержание проблемы раскрывается путем организации поиска ее решения или суммирования и анализа традиционных и

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 16 из 90

современных точек зрения.

Лекция 3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций (2 часа). Лекция проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа».

Лекция 4. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка начальных и граничных условий. Решение задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны методом Даламбера (2 часа).

Лекция 5. Решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны методом Фурье (2 часа).

Лекция 6. Вывод уравнения теплопроводности. Различные виды тепловых режимов. Постановка начальных и граничных условий. (2 часа).

Лекция 7. Вывод решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье (2 часа).

Лекция 8. Уравнение Лапласа и Пуассона. Постановка задач Дирихле и Неймана. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье (2 часа).

Лекция 9. Обзорная лекция (2 часа).

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

№ п/п	№ темы дисциплины	Темы практических занятий	Кол-во часов
I семестр			
1	1	Введение в математический анализ	4
2	2	Предел и непрерывность функции одной переменной	4
3	3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	12
4	4	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	8
5	5	Неопределенный интеграл	8
	СУММА:		36
II семестр			
6	6	Определенный интеграл. Несобственные интегралы	10
7	7	Дифференциальные уравнения	14

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 17 из 90

8	8	Поверхности II порядка. Двойные интегралы.	6
9	9	Числовые и функциональные ряды.	6
	СУММА:		36
III семестр			
10	10	Ряды Фурье	6
11	11	Уравнения математической физики	12
	СУММА:		18
	ИТОГО:		90

Практические занятия (90 час.)

Семестр I.

Занятие 1. Входной тест на знание элементарной математики (2 часа).

Занятие 2. Основные правила нахождения предела числовой последовательности и предела функции (**2 часа**). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация». Групповые консультации представляют собой своеобразную форму проведения практических занятий, основным содержанием которых является разъяснение отдельных, часто наиболее сложных или практически значимых вопросов изучаемой программы. После всех практических занятий студенты получают задачи для самостоятельной внеаудиторной работы. С каждым практическим занятием повышается сложность предлагаемых задач. Групповая консультация проводится с целью оказания помощи в самостоятельной работе, в подготовке к рубежной контрольной работе. Студенты сами предлагают для решения те задачи, которые вызвали какие-то затруднения или непонимание. К доске выходят студенты, готовые разъяснить возникшие вопросы. Преподаватель только контролирует ход решения задач, комментирует в случае необходимости какие-то ситуации и обобщает рассмотренный материал. Преимущество практики-консультации перед другими формами проведения практического занятия в том, что она позволяет в большей степени приблизить содержание занятия к практическим интересам обучаемых, в какой-то степени индивидуализировать

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 18 из 90

процесс обучения с учетом уровня понимания и восприятия материала каждым обучаемым.

Занятие 3. Первый и второй замечательные пределы (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 4. Сравнение бесконечно малых. Непрерывность и точки разрыва (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 5. Производные элементарных функций. Таблица производных. Касательная и нормаль к графику функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 6. Производная сложной функции. Логарифмическая производная. (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 7. Производная функции заданной неявно и параметрически (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 8. Контрольная работа по производным (2 часа).

Занятие 9. Теоремы Ролля, Коши, Лагранжа. Правило Лопиталя (неопределенности вида $\frac{0}{0}$), степенные неопределенности $0^\infty, \infty^0, 1^\infty$.

Занятие 10. Общая схема исследования и построения графика функции (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 11. Частные производные функции двух переменных. Полный дифференциал. Производная по направлению (2 часа).

Занятие 12. Градиент функции нескольких переменных (2 часа).

Занятие 13. Экстремум функции двух переменных (2 часа).

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 19 из 90

Занятие 14. Задачи на отыскание наименьших и наибольших значений функции (2 часа).

Занятие 15. Простейшие методы интегрирования: метод разложения, замены переменного, интегрирования по частям (2 часа).

Занятие 16. Интегрирование выражений, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 17. Интегрирование дробно-рациональных выражений (2 часа).

Занятие 18. Интегрирование тригонометрических функций (2 часа).

Семестр II.

Занятие 1. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 2. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 3. Несобственные интегралы (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 4. Геометрические приложения определенного интеграла (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 5. Физические приложения определенного интеграла (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 6. Дифференциальные уравнения I порядка и методы их решения (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 20 из 90

Занятие 7. Дифференциальные уравнения высших порядков и методы их решения (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 8. Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами (2 часа).

Занятие 9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами (2 часа).

Занятие 10. Метод вариации произвольных постоянных решения линейные неоднородных дифференциальных уравнений (2 часа).

Занятие 11. Системы линейных дифференциальных уравнений I порядка (2 часа).

Занятие 12. Контрольная работа по дифференциальным уравнениям (2 часа).

Занятие 13. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах (2 часа).

Занятие 14. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах (2 часа).

Занятие 15. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (2 часа).

Занятие 16. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость (2 часа).

Занятие 17. Степенные ряды. Ряд Тейлора (2 часа).

Занятие 18. Применение рядов (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Семестр III.

Занятие 1. Ряды Фурье для функции с периодом 2π (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 2. Ряды Фурье для функции с периодом $2l$ (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 21 из 90

консультация».

Занятие 3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций (2 часа).

Занятие 4. Классификация уравнений в частных производных 2 порядка (2 часа).

Занятие 5. Решение задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны методом Даламбера (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 6. Решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны методом Фурье (2 часа).

Занятие 7. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье (2 часа). Занятие проводится с использованием метода активного обучения «групповая консультация».

Занятие 8. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье (2 часа).

Занятие 9. Контрольная работа (2 часа).

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Математический анализ» представлено в Приложении 1. Оно содержит: план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию; характеристику заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению; требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п/п	Контролируемые разделы/темы	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства	-
-------	-----------------------------	---------------------------------------	--------------------	---

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»

Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 22 из 90
--------------------------------------	--	---	---------------

	дисциплины		Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1.	Введение в математический анализ.	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (сентябрь-октябрь 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние задания; 5. Коллоквиум	
2.	Предел и непрерывность функции действительной переменной.	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (сентябрь-декабрь 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние задания; 5. Коллоквиум	
3.	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (сентябрь-декабрь 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние задания; 5. Коллоквиум 6. Контрольная работа.	
4.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (сентябрь-декабрь 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние	

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»

Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 23 из 90
--------------------------------------	--	---	---------------

			здания; 5. Коллоквиум
5.	Неопределенный интеграл	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (сентябрь-декабрь 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние задания; 5. Коллоквиум
6.	Определенный интеграл, несобственные интегралы	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (февраль-май 2016)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние задания; 5. Коллоквиум
7.	Дифференциальные уравнения	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (февраль-май 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние задания; 5. Коллоквиум 6. Контрольная работа
8.	Кратные интегралы	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (февраль-май 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты;

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 24 из 90

			4. Индивидуальные домашние задания; 5. Коллоквиум 6. Экзаменационные вопросы
9.	Ряды	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (февраль-май 1 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние задания; 5 Коллоквиум.
10.	Ряды Фурье	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (сентябрь-декабрь 2 курса)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние задания; 5. Коллоквиум 6. Экзаменационные вопросы
11.	Уравнения математической физики	Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК– 22); (сентябрь-декабрь 2 курса, 2016г)	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние задания; 5. Контрольная работа 6. Экзаменационные вопросы

Типовые контрольные задания, ИДЗ, вопросы к коллоквиуму, экзаменационные вопросы, образцы билетов представлены в разделах «Контрольно-измерительные материалы» и «Материалы для самостоятельной работы студентов».

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 25 из 90

V. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Математический анализ: Учебное пособие / В.Г. Шершнеv. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 288 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-005488-9 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/342089>

2. Туганбаев, А. А. Математический анализ : интегралы[Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. А. Туганбаев. — 2-е изд., стереотип. — М. : ФЛИНТА, 2011. — 76 с. - ISBN 978-5-9765-1306-8 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/454655>

3. Математический анализ. Теория и практика: Учебное пособие / Шипачев В.С., - 3-е изд. - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-010073-9 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/469727>

Дополнительная литература:

1. Математический анализ для экономистов:практикум: Учебное пособие/Т.И.Демина, О.П.Шевякова - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/486418>

2. Математический анализ в вопросах и задачах : учебное пособие / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев и др., 5-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 480 с. ISBN 5-9221-0284-1 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/544581>

3. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч 1.: учебное пособие. –Минск «Высшая школа», 2013. – 304 с. Ссылка:

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 26 из 90

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65409

4. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч 2.: учебное пособие. –Минск «Высшая школа», 2014. – 398 с. Ссылка: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65409
5. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч 3.: учебное пособие. –Минск «Высшая школа», 2013. – 368 с. Ссылка http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65410
6. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч 4.: учебное пособие. –Минск «Высшая школа», 2013. – 334 с. Ссылка http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65411

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети

«Интернет»

1. www.for-stydents.ru/matematika/uchebniki/ – здесь представлены учебники
2. по высшей математике, которые можно скачать бесплатно.
3. <http://www.mathhelp.spb.ru/> – содержит лекции и видео лекции по высшей
4. математике.
5. dvfu.ru ⇒ *научная библиотека* ⇒ *электронный каталог* – содержит электронные информационные ресурсы Научной библиотеки ДВФУ.
6. Allmath.ru – математический портал, на котором опубликованы материалы по различным разделам математики.
7. <http://www.lib.mexmat.ru> – электронная библиотека механико-математического факультета Московского государственного университета
8. <http://www.mathnet.ru/> – общероссийский математический портал Math-Net.Ru – это современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 27 из 90

9. <http://www.benran.ru/>

библиотека по естественным наукам Российской Академии Наук.

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

На изучение дисциплины отводится 180 часов аудиторных занятий и 144 часов на самостоятельную работу. На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства, формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Преподаватель поддерживает непрерывный контакт с аудиторией, отвечает на возникающие у студентов вопросы.

На практических занятиях преподаватель сначала кратко опрашивает студентов по теории, затем подробно решает примеры по пройденной теме, взаимодействуя с учениками.

Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения, затем выдает индивидуальное домашнее задание.

После получения задания, студенту рекомендуется в этот же день приступить к его выполнению, как говорится, «по горячей памяти». Наиболее способным студентам предлагается выполнять задание сразу, в конце занятия. Они с удовольствием это делают.

В случае затруднения при выполнении домашнего задания студенту рекомендуется повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами, или прийти на еженедельную плановую консультацию и выполнить задание с помощью преподавателя.

После выполнения задания студент отдает его на проверку

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 28 из 90

преподавателю. Работа проверяется в течение 2-3 дней и в случае необходимости с соответствующими указаниями возвращается на доработку.

Работа зачитывается только в том случае, когда все задачи решены правильно.

В начале семестра для проведения текущей самостоятельной работы, подготовки к коллоквиуму, экзаменам старостам групп отправляются по электронной почте учебно-методическая литература и перечень вопросов к коллоквиуму и экзаменам. Затем старосты отправляют все эти файлы всем членам группы.

К экзамену студент допускается только в случае выполнения всех индивидуальных домашних заданий, контрольной работы и ответа на коллоквиуме, как минимум на удовлетворительную оценку.

Подготовку к экзамену удобно осуществлять по темам, которые преподаватель выделяет во время чтения лекций. Например, по первому семестру тема 1 «Введение в математический анализ».

В идеале, студент выписывает все определения в отдельную тетрадь (планшет) и заучивает их наизусть. Затем вносит в планшет формулировки теорем, формулы и заучивает их (хорошо работать в паре с товарищем). При наличии доказательства проводит доказательство, видимо с ошибками. Затем смотрит в конспект и исправляет ошибки.

Далее переходит к теме 2 «Предел и непрерывность функции действительной переменной» и т.д. Простудировав, таким образом, все темы, затем сводит весь материал в единое целое, устанавливая связи между его частями. Например, понятие предела вводится на первой лекции в теме 1, затем используется на всех лекциях при изучении тем 2,3,4.

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 29 из 90

Учебные аудитории кампуса ДВФУ.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 30 из 90



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
 Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
 высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ
РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ
по дисциплине «Математический анализ»
Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность
Профиль: «Безопасность технологических процессов и производств»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 31 из 90

Приложение I

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
Семестр I				
1	01.09	Входной тест по элементарной математике	2 часа	Проверка теста
2	08.09-15.09	Выполнение ИДЗ по теме «Пределы»	2	Прием и защита задания
3	15.09-22.09	Выполнение ИДЗ по теме «I, II замечательные пределы»	2	Прием и защита задания
4	22.09-29.09	Выполнение РГЗ по теме «Непрерывность функции и точки разрыва, сравнение б/м»	2	Прием и защита задания
5	29.09-13.10	Выполнение ИДЗ по теме «Основные правила дифференцирования, геометрический смысл производной. Производная сложной функции»	2	Прием и защита задания
6	29.09-20.10	Подготовка к контрольной работе по теме «Производная», изучение базовой литературы.	4	Опрос на коллоквиуме
	20.10	Контрольная работа по теме: «Производные».	2 часа	Проверка контрольной работы
7	03.11-10.11	Выполнение РГЗ по теме «Полное исследование функции, построение графика»	2	Прием и защита задания
8	08.09-10.11	Подготовка к коллоквиуму по теме «Введение в анализ. Производные и их приложения», изучение базовой литературы.	6	Опрос на коллоквиуме
9	10.11-24.11	Выполнение ИДЗ по теме «Экстремум функции 2-х переменных, отыскание наибольшего и наименьшего значений функции»	2	Прием и защита задания
10	8.12-15.12	Выполнение ИДЗ по теме «Табличные интегралы, метод интегрирования по частям»	2	Прием и защита задания
11	15.12-29.12	Выполнение ИДЗ по теме «Интегрирование дробно-	2	Прием и защита задания

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 32 из 90

		рациональных, тригонометрических и некоторых иррациональных функций»		
12	Январь нового года	Подготовка к зачету, изучение конспектов и базовой литературы.	6	Зачет
Семестр II				
1	10.02-24.02	Выполнение ИДЗ по теме «Определенный интеграл»	3	Прием и защита задания
2	24.02-10.03	Выполнение РГЗ по теме «Геометрические и физические приложения определенного интеграла»	4	Прием и защита задания
3	17.03-24.03	Выполнение ИДЗ по теме «Дифференциальные уравнения I порядка»	2	Прием и защита задания
4	31.03-14.04	Выполнение ИДЗ по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков и линейные неоднородные ДУ II порядка»	3	Прием и защита задания
5	14.04-28.04	Подготовка к контрольной работе по теме «Дифференциальные уравнения», изучение базовой литературы.	6	Опрос на коллоквиуме
6	28.04	Контрольная работа по теме: «Дифференциальные уравнения».	2 часа	Проверка контрольной работы
7	5.05-12.05	Выполнение ИДЗ по теме «Двойной интеграл»	2	Прием и защита задания
8	19.05-2.06	Выполнение ИДЗ по теме «Ряды»	2	Прием и защита задания
9	17.03-9.06	Подготовка к коллоквиуму по теме « Дифференциальные уравнения. Ряды», изучение базовой литературы.	6	Опрос на коллоквиуме
10	Вторая половина июня	Подготовка к зачету, изучение конспектов и базовой литературы	6	Зачет
Семестр III				
1	3.09-1.10	Выполнение ИДЗ по теме «Ряды Фурье»	2	Прием и защита задания
2	15.10-29.10	Выполнение ИДЗ по теме «Решение задачи Коши для уравнения колебаний в случае бесконечной струны методом Даламбера»	2	Прием и защита задания

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 33 из 90

3	29.10-12.11	Выполнение ИДЗ по теме «Решение смешанной задачи для уравнения колебаний методом Фурье»	2	Прием и защита задания
4	12.11-26.11	Выполнение ИДЗ по теме «Решение I краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье»	2	Прием и защита задания
5	26.11-10.12	Выполнение ИДЗ по теме «Решение задачи Дирихле для круга»	2	Прием и защита задания
6	24.12	Контрольная работа по теме: «Решение задач математической физики».	2 часа	Проверка контрольной работы
7	Январь нового года	Подготовка к экзамену, изучение конспектов и базовой литературы.	6	Экзамен

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены в разделе «Материалы для самостоятельной работы студентов»). Работа сдается преподавателю на проверку и выдается через 2-3 дня. Критерии оценки: студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя. При наличии ошибок указывается сама ошибка и средства для ее устранения. После чего работа возвращается для доработки. Работа не зачитывается до тех пор, пока все задания не будут выполнены правильно. При затруднении выполнения ИДЗ студент выполняет работу на консультации с помощью преподавателя.

Кроме того, с целью более тщательного изучения теоретического материала и выработки элементов компетенции ПК-22 один раз в семестр проводится коллоквиум во внеурочное время. Список вопросов к коллоквиуму приводится в Приложении 2.

По данной дисциплине автором разработаны методические рекомендации:

1. "Высшая математика"- программа, методические указания и контрольные

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 34 из 90

задания для студентов 2 курса технических специальностей заочной форм обучения.

2. Ксендзенко Л.С., Гузев М.А., Макаров В.В., Макарова Н.В. Математические методы строительной геотехнологии. Учебное пособие. Владивосток, ДВГТУ, 2003. 220 с

3. Ксендзенко Л.С. «Типовой расчет по теме «Ряды». Владивосток, ДВГТУ, 2003. 25 с

4. Ксендзенко Л.С. Уравнения математической физики. Методические указания и контрольные задания для студентов технических специальностей.

Владивосток : Изд. дом Дальневост. Федерал. Ун-та. 2013. 48 с.

5. Ксендзенко Л.С. Прикладная математика. Учебно-методическое пособие.

Владивосток : Изд. дом Дальневост. Федерал. Ун-та. 2014. 256 с.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 35 из 90



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
 Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
 высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Математический анализ»
Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность
Профиль «Безопасность технологических процессов и производств»

Форма подготовки очная

Владивосток
2015

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 36 из 90

Приложение II

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Математический анализ»

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК – 22);	Знает	методы математического анализа, математической физики их роль в профессиональной деятельности,
	Умеет	применять полученные знания для решения математических задач, использовать математический язык и символику при построении моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные, применять методы математического анализа, математической физики при решении профессиональных задач
	Владеет	математическим языком предметной области: основными терминами, понятиями, определениями, методами математического анализа, математической физики; основными способами представления математической информации (аналитическим, графическим, символьным, словесным и др.), используемых при решении профессиональных задач

Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		Критерии	Показатели	Баллы
Способность использовать законы и методы математического анализа при решении профессиональных задач – (ПК – 22);	знает (пороговый уровень)	Основную и дополнительную литературу по данному вопросу, Об основных понятиях и методах математичес	Определения и может привести примеры основных понятий математического анализа и уравнений математической физики	-способность самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по общеобразовательным и специальным дисциплинам при решении	62 - 74

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»

Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 37 из 90
--------------------------------------	--	---	---------------

		кого анализа и уравнений математической физики		профессиональных задач	
	умеет (продвинутый)	Работать решать задачи, разбирать конспекты лекций. Умеет применять методы математического анализа и уравнений математической физики к решению задач.	Умение работать самостоятельно, решая задачи и разбирая конспект лекций, интернет-источники, умение вычислять пределы, производные, интегралы, решать д.у., применять ряды при решении профессиональных задач	- способность применять методы математического анализа и уравнений математической физики при решении профессиональных задач; -способность логически верно выстраивать устную и письменную речь, аргументировать выводы и результаты исследования.	74-84
	владеет (высокий)	Опыт самостоятельного решения задач в ограниченное время на потоковых контрольных работах, анализом допущенных ошибок.	Владение методами математического анализа и математической физики решения типовых задач, навыками применения математических знаний при изучении специальной литературы	-способность самостоятельного изучения литературы по математике и ее приложениям; -способность самостоятельно выбрать метод решения задачи и обосновать его; способность самостоятельно решить задачу и грамотно оформить решение задачи; -способность логически верно выстраивать устную и письменную речь, аргументировать выводы и результаты исследования.	85-100

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 38 из 90

Шкала измерения уровня сформированности компетенций

Итоговый балл	1-61	62-74	75-84	85-100
Оценка (пятибалльная шкала)	2 (незачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
Уровень сформированности компетенций	отсутствует	пороговый (базовый)	продвинутый	высокий (креативный)

Перечень используемых оценочных средств (ОС)

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства		
			текущий контроль	промежуточная аттестация	
1	Введение в математический анализ	ПК-22	Знает понятия функции и способы ее задания, числовой последовательности, ее свойства, модуля числа, свойства модуля, второй замечательный предел;	Устный опрос на практическом занятии, коллоквиум (вопросы 1-4)	Вопросы 1-3 из перечня вопросов для подготовки к зачету
			умеет вычислять предел числовой последовательности,	Решение задач на практическом занятии. ИДЗ	
			Владеет методами вычисления предела числовой последовательности	Коллоквиум.	Зачет
2	Предел и непрерывность функции	ПК-22	знает определение предела функции, бесконечно малой,	Устный опрос на практическом занятии,	Вопросы 4-9 из перечня вопросов к зачету

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»

Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 39 из 90
--------------------------------------	--	---	---------------

			бесконечно большой, свойства пределов, I и II замечательные пределы; знает какая функция наз. непрерывной, виды разрывов функции		
			Умеет раскрывать неопределенности, исследовать функцию на непрерывность и разрыв	ИДЗ «Пределы. Исследование функции на непрерывность и разрыв»	
			владеет методами нахождения пределов функций, исследования функций на непрерывность и разрыв	Тест. Коллоквиум (вопросы 5-8)	Зачет
3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	ПК-22	знает определения производной и дифференциала, их свойства, геометрический и физический смысл, таблицу производных, уравнения касательной и нормали к графику функции, приложения производной к исследованию функций и решению задач практики	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 9-19,	Вопросы 10-31 из перечня вопросов к зачету
			умеет вычислять производные и дифференциалы, исследовать функции и	Контрольная работа. ИДЗ «Производные», РГЗ	

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»

Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 40 из 90
--------------------------------------	--	---	---------------

			строить их графики, решать прикладные задачи	«Полное исследование функции и построение графика»	
			владеет техникой вычисления производных, дифференциалов, исследования функций и построения ее графика, методами решения прикладных задач		Зачет
4	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	ПК-22	знает определения функции 2-х переменных, ее области определения, геометрический смысл, непрерывности, предела, частных производных, полного дифференциала, экстремума	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 28-33, стр. 51	Вопросы 32-43 из перечня вопросов к зачету
			умеет вычислять частные производные, исследовать функции на экстремум, находить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, решать прикладные задачи	Решение задач на практическом занятии РГЗ «Экстремум функции 2-х переменных»	
			владеет техникой вычисления производных, дифференциалов,		Зачет

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»

Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 41 из 90
--------------------------------------	--	---	---------------

			исследования функций и построения ее графика, методами решения прикладных задач		
5	Неопределенный интеграл	ПК-22	знает определение неопределенного интеграла, его свойства, таблицу интегралов, методы интегрирования	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 20-25	Вопросы 44-50 из перечня вопросов к зачету
			умеет вычислять неопределенные, решать прикладные задачи на их применение	Решение задач на практическом занятии ИДЗ «Неопределенный интеграл»	
			владеет техникой и методами вычисления неопределенных, методами решения прикладных задач		Зачет
6	Определенный интеграл, несобственные интегралы	ПК-22	знает определение определенного, несобственного интегралов, его свойства, их свойства, методы вычисления и приложения к задачам практики	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 27-33	Вопросы 51-70 из перечня вопросов к зачету
			умеет вычислять определенные, несобственные интегралы, решать прикладные задачи, исследовать на	Решение задач на практическом занятии ИДЗ «Приложения определенного интеграла»	

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 42 из 90

			сходимость несобственные интегралы		
			владеет методами вычисления определенных, несобственных интегралов и их приложением к задачам практики		Зачет
7	Дифференциальные уравнения и системы	ПК-22	знает определение и типы д.у. 1 порядка и методы их решения; д.у. 2 порядка, допускающие понижение порядка, линейные однородные и неоднородные д.у. 2 порядка, системы д.у. с постоянными коэффициентами и методы их решения, приложения д.у. к задачам практики	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 34-41	Вопросы 71-80 из перечня вопросов к зачету
			умеет определить тип д.у. 1 порядка и решить его; решать д.у. второго порядков, решать системы линейных уравнений; применять д.у. к решению задач профессиональной сферы	Решение задач на практическом занятии ИДЗ «Д.у. I и II порядков» Контрольная работа	
			владеет методами решения д.у. и их приложением в профессиональной сфере		Зачет
8	Двойной	ПК-22	знает определение	Устный опрос	Вопросы 81-82 из

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»

Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 43 из 90
--------------------------------------	--	---	---------------

	интеграл		двойного интеграла, геометрический смысл, свойства, применение, методы вычисления	на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 42 - 47	перечня вопросов к зачету
			умеет вычислять двойные интегралы, решать прикладные задачи на их применение	Решение задач на практическом занятии	
			владеет техникой и методами вычисления неопределенных, методами решения прикладных задач		Зачет
9	Ряды	ПК-22	знает определение, свойства, признаки сходимости рядов, теорему Лейбница сходимости знакопеременующегося ряда, определение степенного ряда (Тэйлора) и его интервала сходимости, методы разложения функций в ряды Тэйлора, применение рядов к задачам практики	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 48-56	Вопросы 83-91 из перечня вопросов к зачету
			умеет исследовать ряды на сходимость, находить интервал	Решение задач на практическом занятии ИДЗ «Ряды»	

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»

Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 44 из 90
--------------------------------------	--	---	---------------

			сходимости, разлагать функции в ряды Тэйлора ; решать прикладные задачи на применение рядов		
			владеет методами решения прикладных задач на применение рядов		Зачет
10	Ряды Фурье. Уравнения математическ ой физики	ПК-22	знает определение ряда Фурье, вывод уравнения колебаний, уравнения теплопроводности , Лапласа, постановку задачи Коши и краевых задач, методы Даламбера и Фурье решения задачи Коши и краевых задач; приложения основных уравнений в частных производных 2 порядка к задачам практики	Устный опрос на практическом занятии. Опрос на коллоквиуме. Вопросы 57- 72	Вопросы 92-108 из перечня вопросов к экзамену
			умеет разлагать функцию в ряд Фурье; решать задачу Коши для уравнения колебаний струны методом Даламбера; решать методом Фурье первую смешанную задачу для волнового уравнения и уравнения	Решение задач на практическом занятии. ИДЗ	

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 45 из 90

			теплопроводности на отрезке; задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге; применять д.у. в частных производных 2 порядка к решению задач профессиональной сферы		
			Владеет методами разложения функции в ряд Фурье; методами Даламбера и Фурье решения основных задач для уравнений колебаний струны, теплопроводности, Лапласа и их приложениями в профессиональной сфере		Экзамен

Вопросы к коллоквиуму по дисциплине «Математический анализ»

Введение в анализ

1. Что называется функцией действительного аргумента? Как можно задать функцию? Привести примеры.

2. Что называется числовой последовательностью?

3. Какая числовая последовательность называется сходящейся? Что называется пределом последовательности? Дать геометрическую интерпретацию предела.

4. Чему равен $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 46 из 90

соответственно при $n = m$, $n > m$, $n < m$?

5. Дать определения предела функции в точке и на бесконечности.

6. Какие функции называются бесконечно малыми (*б.м.*) в точке $x=a$? Какие *б.м.* называются эквивалентными? В чем состоит принцип замены *б.м.*? Когда он применяется? Привести примеры эквивалентных *б.м.*

7. Какая функция называется непрерывной в точке $x = x_0$; на интервале (a, b) ?

Дать геометрическую иллюстрацию определения.

8. Что называется точкой разрыва функции? Как классифицируются точки разрыва? Какого рода разрывы имеют функции

$$y = \frac{\sin x}{x}, \quad y = \frac{\cos x}{x}, \quad y = \frac{|x|}{x}, \quad y = \sin \frac{1}{x} ?$$

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

9. Что называется производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$? Каков геометрический и механический смысл производной? Чему равна производная постоянной?

10. Что называется касательной к кривой в заданной точке M ? Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$.

11. Какая функция называется дифференцируемой в точке $x = x_0$? Что называется дифференциалом функции $y = f(x)$?

12. Каков геометрический смысл теорем Ферма, Ролля, Лагранжа?

13. Сформулировать правило Лопиталю для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

14. Какие функции называются возрастающими, убывающими, монотонными на интервале (a, b) ? Сформулировать признак монотонности дифференцируемой на интервале (a, b) функции.

15. Какая точка называется точкой максимума (минимума) функции $y = f(x)$?

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 47 из 90

Сформулировать необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Является ли это условие достаточным? Привести пример.

16. Сформулировать I достаточное условие экстремума непрерывной функции.

17. Какая кривая называется выпуклой вверх (вниз) на интервале (a,b) ? Что называется точкой перегиба кривой?

18. Какое условие является достаточным для выпуклости вверх (вниз) графика функции $y = f(x)$ на интервале (a,b) ?

19. Что называется асимптотой кривой? Какие асимптоты может иметь кривая? Сколько вертикальных, горизонтальных, наклонных асимптот может быть у графика функции $y = f(x)$? Привести пример функций имеющих а) одну, две, три вертикальные асимптоты, б) бесконечное множество вертикальных асимптот, в) одну вертикальную и одну горизонтальную асимптоту.

Функции нескольких переменных

20. Дать определения частных производных 1 порядка функции $z = f(x, y)$.

21. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных? Какова его связь с полным приращением?

22. Что называется производной функции по данному направлению в данной точке? Каков ее физический смысл?

23. Что называется градиентом функции? Куда указывает его направление?

24. Каково необходимое условие экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке? Является ли оно достаточным?

25. Каково достаточное условие экстремума функции двух переменных?

Неопределенный и определенный интеграл функции одной переменной

26. Дать определение первообразной и неопределенного интеграла.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 48 из 90

Сформулировать свойства неопределенного интеграла.

27. Что называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$? Каков геометрический смысл определенного интеграла на отрезке $[a, b]$ от неотрицательной функции?

28. Сформулировать теорему о среднем.

29. Какова связь между неопределенным и определенным интегралами от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции? Написать формулу Ньютона-Лейбница.

30. Сформулировать определения несобственных интегралов 1-го рода:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx .$$

31. Сформулировать признаки сравнения сходимости несобственных интегралов 1 рода. При каких $p > 0$ сходится несобственный интеграл $\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$?

32. Сформулировать определения несобственных интегралов II рода от неограниченных функций (особая точка функции является концом отрезка интегрирования или является его внутренней точкой).

33. При каких значениях $p > 0$ сходятся несобственные интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$?

Дифференциальные уравнения

34. Что называется общим решением ДУ первого порядка?

35. Какие ДУ первого порядка называются ДУ с разделяющимися переменными? Однородными? Линейными? Бернулли? В полных дифференциалах?

36. Что называется общим решением ДУ n -го порядка?

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 49 из 90

37. Какой общий вид имеют линейные ДУ n -го порядка?

38. Что называется фундаментальной системой решений линейного однородного ДУ n -го порядка? Может ли нулевое решение входить в фундаментальную систему решений? Сколько фундаментальных систем решений имеет такое ДУ? Почему?

39. Какова структура общего решения линейного однородного ДУ n -го порядка?

40. Как зависит структура фундаментальной системы решений линейного однородного ДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами от корней характеристического уравнения?

41. Какова структура общего решения линейного неоднородного ДУ n -го порядка.

Кратные интегралы

42. Что называется двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по плоской области D ? Как с помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской области D ?

43. Что называется тройным интегралом от функции $u = f(x, y, z)$ по пространственной области V ? Как с помощью тройного интеграла вычислить объем области V ?

44. Что называется криволинейным интегралом 1-го рода (по длине дуги)? Как с помощью криволинейного интеграла 1 рода вычислить длину дуги?

45. Как свести вычисление криволинейного интеграла 1 рода к вычислению определенного интеграла на отрезке, если а) плоская кривая задана явным уравнением, б) плоская или пространственная кривая задана параметрически?

46. Что называется поверхностным интегралом 1-го рода (по площади поверхности)? Как с помощью поверхностного интеграла 1 рода вычислить площадь пространственной поверхности?

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 50 из 90

47. Как свести вычисление поверхностного интеграла 1-го рода к вычислению двойного интеграла?

Ряды

48. Что называется числовым рядом, его общим членом, частичной суммой?

49. Какой ряд называется сходящимся? Что называется суммой ряда?

50. Сформулировать необходимый признак сходимости ряда. Является ли он достаточным? Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n+2}$? Почему?

51. Сформулировать достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (признаки сравнения, Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши).

52. Каково условие сходимости ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$?

53. Какой ряд называется знакопеременным? Знакопеременным? Привести примеры.

54. Сформулировать признак Лейбница и следствие из него об оценке погрешности вычисления суммы ряда. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

55. Какие ряды называются абсолютно и условно сходящимися? Привести пример ряда, сходящегося условно, и пример ряда, сходящегося абсолютно.

56. Дать определение ряда Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 . Каково необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора?

57. Сформулировать теорему Дирихле о достаточных условиях разложимости периодической функции в ряд Фурье?

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 51 из 90

58. Каковы особенности разложения в ряд Фурье четных и нечетных функций?

Уравнения математической физики

59. Перечислите основные уравнения математической физики. Запишите их уравнения.

60. Выведите уравнение колебаний струны.

61. Постановка начальных и краевых условий. Основные определения.

62. Вывод решения задачи Коши для уравнения колебаний в случае ∞ струны методом Даламбера.

63. Решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны методом Фурье.

64. Гармонические колебания. Стоячие волны.

65. Вывод уравнения линейной теплопроводности.

66. Начальные и краевые условия.

67. Решение I краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье.

68. Вывод уравнения Лапласа.

69. Гармонические функции. Краевые задачи для уравнения Лапласа.

Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье.

70. Найти решение задач: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x, t)|_{t=0} = x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x, t)|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x^3$.

71. Найти форму струны, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент

$t = \pi$, если $u(x, t)|_{t=0} = \cos x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x$.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 52 из 90

72. Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при граничных условиях

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \text{ и начальном условии } u(x,0) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l-x, & \text{если } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases},$$

Перечень типовых вопросов, предлагаемых на зачетах (1,2 семестр) и экзамене (3 семестр)

I семестр

1. Целые, рациональные, действительные числа. Числовые множества, операции над множествами.
2. Переменная величина. Функция: основные понятия (аргумент, значение функции, область определения, множество значений, нули функции, возрастание, убывание, четность, нечетность, периодичность). Обратная функция. Способы задания функции.
3. Числовая последовательность. Понятие и свойства предела последовательности. Ограниченность последовательности.
4. Предел функции: определение, свойства.
5. Первый и второй замечательные пределы.
6. Вычисление пределов: понятие неопределенности и методы раскрытия основных неопределенностей.
7. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.
8. Бесконечно малые и бесконечно большие величины: классификация, свойства, эквивалентности.
9. Теорема о связи предела функции и бесконечно малой. Доказать.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 53 из 90

- 10.** Производная функции одной переменной: понятие, геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
- 11.** Правила дифференцирования.
- 12.** Производная сложной функции.
- 13.** Таблица производных основных элементарных функций.
- 14.** Связь дифференцируемости и непрерывности функции
- 15.** Дифференцирование обратных, неявных и параметрически заданных функций.
- 16.** Дифференциал: определение, свойства, геометрический смысл.
- 17.** Теорема Ферма.
- 18.** Теорема Ролля.
- 19.** Теорема Коши.
- 20.** Доказать теорему Лагранжа.
- 21.** Правило Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$).
- 22.** Правило Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$).
- 23.** Монотонность функции на данном промежутке.
- 24.** Экстремум функции.
- 25.** Необходимое условие экстремума дифференцируемых функций
- 26.** Достаточное условие экстремума.
- 27.** Наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.
- 28.** Выпуклость и вогнутость графика функции на заданном промежутке; точка перегиба.
- 29.** Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.
- 30.** Асимптоты графика функции.
- 31.** Общий план исследования функции и построения графика.
- 32.** Функция нескольких переменных: понятие, область определения,

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 54 из 90

множество значений, линии и поверхности уровня.

33. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.
34. Частные и полное приращения функции двух переменных. Частные производные функции двух переменных.
35. Частные и полный дифференциалы. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
36. Производные сложных функций двух переменных. Полная производная.
37. Производные функции, заданной неявно.
38. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных.
39. Градиент функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
40. Производная по направлению.
41. Необходимое условие экстремума функции двух переменных. Пример.
42. Достаточное условие экстремума функции двух переменных. Пример.
43. Наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.
44. Первообразная и неопределенный интеграл: понятие, свойства. Таблица неопределенных интегралов.
45. Интегрирование по частям.
46. Замена переменной.
47. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен.
48. Интегрирование дробно-рациональных функций.
49. Интегрирование простейших иррациональных выражений.
50. Интегрирование тригонометрических выражений.

II семестр

51. Определенный интеграл: определение, свойства, геометрический смысл.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 55 из 90

52. Теорема о среднем. Доказать.
53. Теорема Барроу. Доказать.
54. Вывод формулы Ньютона-Лейбница.
55. Замена переменной в определенном интеграле.
56. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Вывод.
57. Вычисление площадей плоских фигур.
58. Вычисление длин дуг плоских кривых.
59. Вычисление объемов тел.
60. Физические приложения определенного интеграла.
70. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода: определение, признаки сходимости.
71. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: понятие, общее и частные решения, задача Коши.
72. Условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.
73. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения.
74. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения Бернулли.
75. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия.
76. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка: основные типы и методы интегрирования.
77. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения. Метод вариации постоянных.
78. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
79. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 56 из 90

80. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений I порядка с постоянными коэффициентами

81. Определение двойного интеграла, свойства, применение.

82. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах

83. Числовой ряд с положительными членами.

84. Необходимый признак сходимости. Доказать. Пример.

85. Достаточный признак расходимости рядов. Доказать. Пример.

86. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши. Примеры.

87. Интегральный признак сходимости числовых рядов с положительными членами.

88. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды: определения; признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда; условная и абсолютная сходимость.

89. Степенные ряды: определение; радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.

90. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций: e^x , $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$.

91. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях.

Семестр III.

92. Разложение в ряд Фурье функции с периодом 2π . Теорема Дирихле.

93. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

94. Разложение в ряд Фурье функции с периодом $2l$.

95. Перечислите основные уравнения математической физики. Запишите их уравнения.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 57 из 90

96. Выведите уравнение колебаний струны.

97. Постановка начальных и краевых условий. Основные определения.

98. Вывод решения задачи Коши для уравнения колебаний в случае ∞ струны методом Даламбера.

99. Решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны методом Фурье.

100. Гармонические колебания. Стоячие волны.

101. Вывод уравнения линейной теплопроводности.

102. Начальные и краевые условия.

103. Решение I краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье.

104. Вывод уравнения Лапласа.

105. Гармонические функции. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье.

106. Найти решение задач: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x, t)|_{t=0} = x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; u(x, t)|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x^3.$$

107. Найти форму струны, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t = \pi$,

если $u(x, t)|_{t=0} = \cos x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x$.

108. Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при граничных условиях

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \text{ и начальном условии } u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l - x, & \text{если } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases},$$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 58 из 90

Контрольные и индивидуальные задания

Образцы индивидуальных заданий

Предел и непрерывность функции. Сравнение бесконечно малых величин

ИДЗ № 1. Пределы функций.

Пример задания.

1. Вычислить предел

$$1.1 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$$

$$1.2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$$

$$1.3 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2-x}}{x-1}$$

$$1.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$1.5 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$$

2. Сравнить бесконечно малые $\alpha = \sin^2 x$ и $\beta = 1 - \cos 2x$ при $x \rightarrow 0$

3. Найти точки разрыва функции и определить их род $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} e^{1/x}$

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

ИДЗ № 2.

Пример задания.

1. Найти производные данных функций

$$1.1 y = \frac{x^3 - \sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x^2}}, y' = ?$$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 59 из 90

$$1.2 \quad y = x^2 \cdot 2^{x-1}, \quad y' = ?$$

$$1.3 \quad y = \sin^3 x, \quad y'' = ?$$

$$1.4 \quad y = \frac{\sin 2x - \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}, \quad y'(\pi/4) = ?$$

2. Написать уравнение касательной к графику данной функции в точке $x = x_0$,

$$x^3 - y^2 + 2y = 0, \quad x_0 = -1$$

3. Записать дифференциал данной функции и вычислить его в точке $x = x_0$ для

$$\Delta x = 0,1$$

$$y = x\sqrt{\sin(\pi x/2)}, \quad x_0 = 1$$

Интегральное исчисление.

ИДЗ № 3.

Пример задания.

1. Найти неопределенный интеграл

$$1.1 \quad \int \frac{x^3 - 2x\sqrt{x} + 1}{x} dx$$

$$1.2 \quad \int x e^{-x^2} dx$$

$$1.3 \quad \int x^2 \ln x dx$$

$$1.4 \quad \int \cos^2 x dx$$

$$1.5 \quad \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$$

2. Вычислить определенный интеграл

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 60 из 90

$$2.1 \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$$

$$2.2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \ln(\sin x) dx$$

3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной данными линиями

$$x = 1; x = 4; xy = 4$$

4. Вычислить несобственные интегралы

$$4.1 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

$$4.2 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Дифференциальные уравнения

ИДЗ №4.

Пример задания.

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

$$1.1 \quad x(y-1)dx - (x+1)ydy = 0$$

$$1.2 \quad y' - xy = x$$

$$1.3 \quad y'' - y' - 2y = 0$$

2. Найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям

$$2.1 \quad y' - y = xy^2, \quad y(0) = 0$$

$$2.2 \quad y'' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 61 из 90

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Ряды

ИДЗ №5.

Пример задания.

Вариант 1

1) Найти общий член ряда $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \dots$;

2) исследовать ряды на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{7n^2+3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{(n+1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

3) исследовать на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}$

4) найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n(2n-1)} x^n$;

5) вычислить приближенно $\int_0^{0.5} x^2 \cos 2x dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Уравнения математической физики

ИДЗ №6.

Пример задания.

В каждом варианте нужно выполнить следующие задания:

1. Привести уравнение к каноническому виду.
2. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке.
3. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
4. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 62 из 90

Вариант 1

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = x(x-1), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 4, \quad t > 0; \quad u(x, t)|_{t=0} = x(4-x), \quad 0 < x < 4,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(4, t) = 0, \quad t > 0.$$

$$4. \Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad u|_{r=1} = 2 \cos \varphi.$$

Образцы билетов для зачета(1, 2 семестр) и экзаменационных билетов (3 семестр)

Билет 1 (Семестр 1)

Теоретические вопросы

1. Теорема о связи функции, предела и бесконечно малой. Доказать.
2. Сформулировать теорему Ролля. Выяснить геометрический смысл.

Задачи

$$3. \text{Вычислить } y'(e) \text{ для функции } y = \frac{\ln^2 x}{x-1}.$$

$$4. \text{Найти данный неопределенный интеграл } \int x \cdot \ln x dx.$$

$$5. \text{Найти предел функции } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{3/x}.$$

Билет 2(Семестр 1)

Теоретические вопросы

1. Второй замечательный предел. Определение. Различные формы записи.

Пример.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 63 из 90

2. Интегрирование дробно-рациональных функций. Пример.

Задачи

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}(1;1,5)$ для функции $z(x, y) = \frac{1}{28} \operatorname{tg} \frac{2y-3x}{5x+6y}$.

2. Вычислить определенный интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2-x}}{x-1}$

Билет 1 (Семестр 2)

Теоретические вопросы

1. Несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом.

Определение. Пример.

2. Метод решения дифференциального уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$.

Пример.

Задачи

1. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2}{5n^3+1}$

2. Найти общее решение уравнения $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x + 3$, касательной к ней в точке (3,6), и осями координат.

Билет 2 (Семестр 2)

Теоретические вопросы

1. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Пример.

2. Метод решения линейных дифференциальных уравнений I порядка.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 64 из 90

Пример.

Задачи

1. Найти длину дуги всей линии, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{2n+1}$

3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям $y''+4y = 2x+1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Билет 1 (Семестр 3)

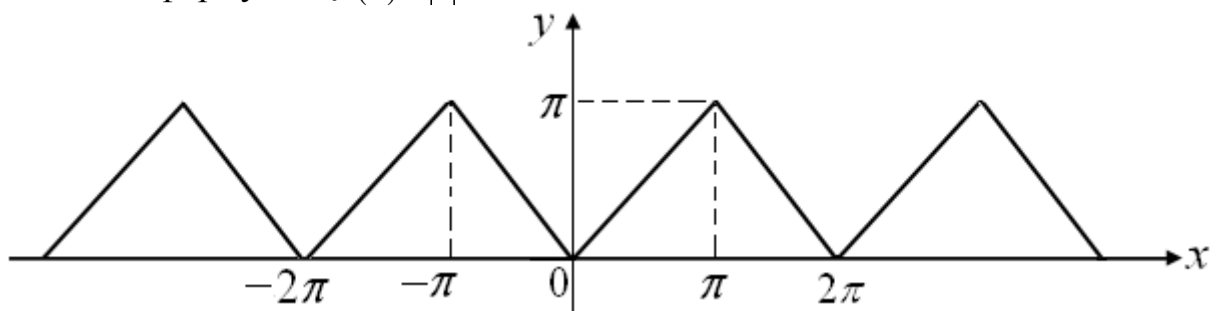
Теоретические вопросы

1. Вывод уравнения линейной теплопроводности.
2. Сформулировать теорему Дирихле.

Задачи

1. В области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ решить задачу $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = 4x$.

2. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , заданную на интервале $-\pi < x \leq \pi$ формулой $f(x) = |x|$:



Вариант контрольной работы (Семестр 2)

1. Найти частное решение дифференциального уравнения $x^2 y^2 \cdot y' + 1 = y$, удовлетворяющее начальному условию: $y(0) = 1$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x + \cos x$.

3. Решить задачу Коши: $y'' + 5y' - 6y = \cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»

Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 65 из 90
--------------------------------------	--	---	---------------

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 66 из 90



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
 Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
 высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине «Математический анализ»
Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность
 Профили: «Безопасность технологических процессов и производств», «Защита
 в чрезвычайных ситуациях» и «Инженерная защита окружающей среды».
 Образовательная программа бакалавриата
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 67 из 90

Семестр I. Методические указания по теме « Предел функции».

Вопросы для самопроверки

1. Функция. Область определения функции.
2. Что называется последовательностью, пределом числовой последовательности?
3. Сформулируйте определение предела функции.
4. Назовите основные свойства пределов функции.
5. Какая функция называется бесконечно малой? Бесконечно большой? Связь между ними.
6. Типы неопределённости и правила их раскрытия.
7. Формулы первого и второго замечательных пределов.
8. Дайте определение односторонних пределов функции в точке.
9. Какая функция называется непрерывной в точке, на интервале?
10. Какая точка называется точкой разрыва функции?

Примеры решения задач

Задача. Найти пределы функций:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 2x^4}{4x^4 + 3x^2 + 1}.$$

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Вынося за скобку и в числителе и

в знаменателе x в наибольшей степени, получим

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(\frac{7}{x^3} - 2 \right)}{x^4 \left(4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x^3} - 2}{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{0 - 2}{4 + 0 + 0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2},$$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 68 из 90

так как $\frac{7}{x^3}$, $\frac{3}{x^2}$ и $\frac{1}{x^4}$ – величины бесконечно малые при $x \rightarrow \infty$, т.е. стремятся к нулю.

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x + 12}.$$

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители: числитель – по формуле сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, а знаменатель – по формуле разложения квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Получим

$$A = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 4)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{x + 4}.$$

После сокращения дроби, следует подставить предельное значение $x = -3$ в сокращенную дробь. Получим $A = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-3 - 3}{-3 + 4} = \frac{-6}{1} = -6$.

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 5} - x \right).$$

Решение. Имеем неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела на сопряженное выражение, приводящее к разности квадратов:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x - 5} - x \right) \left(\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x \right)}{\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}} + x}. \end{aligned}$$

При $x \rightarrow +\infty$ $|x| = x$ по определению модуля; поэтому

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 69 из 90

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-5}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(-2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+1\right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{-2-0}{\sqrt{1-0-0}+1} = -1,
 \end{aligned}$$

так как при $x \rightarrow +\infty$ $\frac{5}{x}$, $\frac{2}{x}$ и $\frac{5}{x^2}$ – бесконечно малые величины.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Сделаем преобразования,

приводящие ко второму замечательному пределу $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x^2}}.$$

Выражение в квадратных скобках $x \rightarrow 0$ представляет собой замечательный

предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right] = e$, следовательно, $A = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}}$.

Найдем предел показателя степени, используя первый замечательный

предел $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $A = e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} \right)^{-3x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Выделим целую часть дроби

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 70 из 90

$$\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1 - 4}{2x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 1} + \frac{-4}{2x^2 + 1} = 1 + \frac{-4}{2x^2 + 1}.$$

Здесь $a(x) = -\frac{4}{2x^2 + 1}$ является бесконечно малой величиной при $x \rightarrow \infty$.

Умножим показатель степени на $\left(a(x) \cdot \frac{1}{a(x)}\right)$, это действие не нарушает знака равенства:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} \right)^{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{2x^2 + 1}{-4} \cdot (-3x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-4}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{2x^2 + 1}{-4}} \right)^{\frac{12x^2}{2x^2 + 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2}{2x^2 + 1}}, \end{aligned}$$

ибо $\lim_{a(x) \rightarrow 0} (1 + a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e$. Найдем $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2}{2x^2 + 1}$. Имеем неопределенность вида

$\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, предел 1-го типа. Вынесем за скобки x^2 , так как вторая степень

наибольшая:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{12}{2} = 6,$$

так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Таким образом, искомый предел равен $e^a = e^6$.

Методические указания по теме «Производная функции»

Вопросы для самопроверки.

1. Дать определение производной.
2. Напишите основные правила дифференцирования.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 71 из 90

3. Формулы дифференцирования основных элементарных функций.
4. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
5. Логарифмическое дифференцирование.

Таблица производных основных элементарных функций

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования.

$(u+v)' = u' + v'$	$(cu)' = c \cdot u'$
$(u \cdot v)' = uv' + vu'$	$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\frac{c}{u}\right)' = -\frac{c}{u^2} u'$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 72 из 90

Примеры решения задач

Задача. Найти производные заданных функций:

a) $y = 2x^2 - 5 \cdot 2^x + 4x - 7 \log_2 x - \ln 2$.

Решение. Используя правила дифференцирования, получим:

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2)' - (5 \cdot 2^x)' + (4x)' - (7 \log_2 x)' - (\ln 2)' = \\ &= 2(x^2)' - 5 \cdot (2^x)' + 4x' - 7(\log_2 x)' - 0 = \\ &= 10x^4 - 5 \cdot 2^x \ln 2 + 4 - \frac{7}{x \ln 2}. \end{aligned}$$

b) $y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$.

Решение. Используя правила дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} y' &= (1 + x^2)' \cdot \operatorname{arctg} x + (1 + x^2) \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \\ &= 2x \cdot \operatorname{arctg} x + (1 + x^2) \cdot \frac{1}{1 + x^2} = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1. \end{aligned}$$

c) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

Решение. Используя правила дифференцирования, получим:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x + \cos x)' (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}. \end{aligned}$$

d) $y = \log_3(2x^3 + 1)$

Решение. По правилам дифференцирования сложной функции, получим:

$$y' = (\log_3(2x^3 + 1))' = \frac{1}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3} (2x^3 + 1)' = \frac{6x^2}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3}.$$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 73 из 90

е) $y = x^{x^3}$.

Решение. Имеем показательно-степенную функцию. Используя метод логарифмического дифференцирования, получим:

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = (\ln x^{x^3})' = (x^3 \cdot \ln x)' = 3x^2 \cdot \ln x + \frac{x^3}{x} = x^2(3 \ln x + 1).$$

Отсюда имеем:

$$y' = y \cdot (\ln y)' = y \cdot x^2(3 \ln x + 1) = x^{x^3} \cdot x^2(3 \ln x + 1) = x^{x^3+2} \cdot (3 \ln x + 1).$$

ф) $y = \frac{(3x+2)^4 \sqrt[3]{5x-1}}{(1-2x)^3 \sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Здесь заданную функцию также целесообразно предварительно прологарифмировать:

$$\ln y = 4 \ln(3x+2) + \frac{1}{3} \ln(5x-1) - 3 \ln(1-2x) - \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

Найдем производную $(\ln y)' = \frac{12}{3x+2} + \frac{5}{3 \cdot (5x-1)} + \frac{6}{1-2x} + \frac{x}{1-x^2}$.

Тогда

$$y' = y \cdot (\ln y)' = \frac{(3x+2)^4 \sqrt[3]{5x-1}}{(1-2x)^3 \sqrt{1-x^2}} \cdot \left(\frac{12}{3x+2} + \frac{5}{3 \cdot (5x-1)} + \frac{6}{1-2x} + \frac{x}{1-x^2} \right).$$

«Приложения производной для исследования функций»

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется четной, нечетной и функцией общего вида?
2. Какая функция называется возрастающей, убывающей, монотонной?
3. Каковы признаки возрастания и убывания функции.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 74 из 90

4. Сформулируйте необходимые и достаточные признаки экстремума функции.
5. Назовите I и II достаточный признак возрастания, убывания функции.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте правило нахождения экстремума функции, интервалов возрастания, убывания.
8. Какая функция называется выпуклой?
9. Как найти интервалы вогнутости и выпуклости графика?
10. Сформулируйте достаточный признак существования точки перегиба.
11. Что называется асимптотой кривой? Какие виды асимптот Вы знаете?

Схема исследования функции и построение графика:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на четность – нечетность;
- 3) найти вертикальные асимптоты;
- 4) исследовать поведение функции в бесконечности; найти горизонтальные и наклонные асимптоты;
- 5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;
- 6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;
- 7) найти точки пересечения графика функции с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график функции.

Исследование функции проводится одновременно с построением графиков.

Примеры решения задач

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 75 из 90

Задача. Исследовать функцию $y = \frac{2x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. Область определения: $(-\infty;1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$. Точки $x = -1$ и $x = 1$ - точки разрыва функции.
2. $f(-x) = -f(x)$, т.е. функция нечетная; ее график симметричен относительно начала координат и достаточно провести исследование функции на интервале $[0;+\infty)$.
3. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$.

Прямые $x = 1$ и $x = -1$ (по симметрии) – вертикальные асимптоты.

4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0$. Прямая $y = 0$ (ось абсцисс) - двусторонняя горизонтальная асимптота.

5. $y' = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} > 0$ при всех допустимых x . Экстремумов нет, функция

возрастает на интервалах $(-\infty;1), (-1;1), (1;+\infty)$

6. $y'' = \frac{4x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$, $y'' = 0$ при $x = 0$.

Знаки второй производной исследуем в таблице:

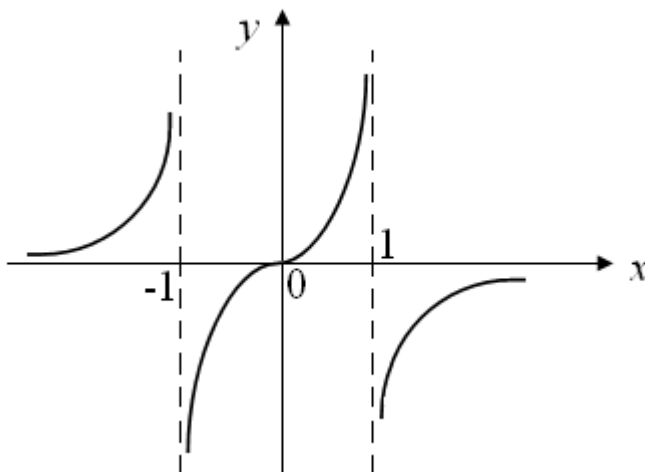
x	$(-\infty;1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
y''	+	-	+	-
y	∪	∩	∪	∩

Хотя $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через три точки $x = -1, x = 0, x = 1$, но график функции имеет только одну точку перегиба $x = 0$, ибо в двух других точках $x = -1, x = 1$ функция не определена.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 76 из 90

7. Точка пересечения с осями – начало координат (0,0) .

Построим график функции $y = \frac{2x}{1-x^2}$:



«Неопределенный интеграл»

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
4. В чем сущность метода непосредственного интегрирования?
5. Дифференциал функции. В чем сущность метода замены переменной?
6. В чем сущность метода интегрирования по частям?
7. Поясните, как вычислить интеграл от функций, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен?
8. Как вычислить интеграл от дробно-рациональной функции?
9. Как вычислить интеграл от тригонометрических функций?

Таблица интегралов

$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
-------------------	--

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 77 из 90

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$
$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
$\int \operatorname{tg}x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
$\int \operatorname{ctg}x dx = \ln \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$

Примеры решения задач

Метод непосредственного интегрирования

Задача. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{9-4x^2}$.

Решение. Вынося постоянный множитель $\left(-\frac{1}{4}\right)$ за знак интеграла, приходим к

табличному интегралу $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ при $a = \frac{3}{2} \neq 0$:

$$\int \frac{dx}{9-4x^2} = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-3/2}{x+3/2} \right| + C = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2x+3}{2x-3} \right| + C.$$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 78 из 90

$$2. \int \frac{(2\sqrt[3]{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x^4}} dx.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2\sqrt[3]{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x^4}} dx &= \int \frac{4x^{2/3} + 4x^{1/3} + 1}{x^{4/3}} dx = \int \left(4x^{-2/3} + \frac{4}{x} + x^{-4/3} \right) dx = \\ &= 4 \int x^{-2/3} dx + 4 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-4/3} dx = 12x^{1/3} + 4 \ln|x| - 3x^{-1/3} + C \end{aligned}$$

$$3. \int \cos^2(x/2) dx.$$

Решение:

$$\int \cos^2(x/2) dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C.$$

Метод замены переменной

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

Решение. Заметим, что $4x^2+1=(2x)^2+1$, а $dx=\frac{1}{2}d(2x)$. Тогда, используя формулу

$$\int \frac{d(x)}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \text{ при } a=1, \text{ находим}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+1}} = \frac{1}{2} \ln|2x+\sqrt{4x^2+1}| + C.$$

$$5. \int \frac{xdx}{\sqrt{3-4x^2-4x}}.$$

Решение. Выделим полный квадрат в подкоренном выражении

$$3-4x^2-4x=4-(2x+1)^2. \text{ Положим } 2x+1=t. \text{ Тогда } x=\frac{1}{2}(t-1) \text{ и } dx=\frac{1}{2}dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-4x^2-4x}} = \int \frac{1}{4} \frac{(t-1)dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}.$$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 79 из 90

Второй из двух полученных интегралов – табличный; для нахождения первого

заметим, что $tdt = -\frac{1}{2}d(4-t^2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{3-4x^2-4x}} &= -\frac{1}{8} \int (4-t^2)^{-1/2} d(4-t^2) - \frac{1}{4} \arcsin(t/2) = \\ &= -\frac{1}{4} (4-t^2)^{1/2} - \frac{1}{4} \arcsin(t/2) + C = \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{3-4x^2-4x} - \frac{1}{4} \arcsin(x+1/2) + C. \end{aligned}$$

Метод интегрирования по частям

6. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Положим $u = \ln x$ и $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Тогда $du = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$ и

$$v = \int dv = \int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2}. \text{ Вообще говоря, по определению неопределенного}$$

интеграла полученное выражение для v должно содержать постоянную

интегрирования C . Однако при применении формулы $\int u dv = uv - \int v du$

эта постоянная из окончательного выражения выпадает. Поэтому в выражении

для v удобно полагать $C = 0$. Окончательно, имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2x^{1/2} \ln x - \int 2x^{1/2} \frac{1}{x} dx = \\ &= 2x^{1/2} \ln x - 2 \int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} \ln x - 4x^{1/2} + C. \end{aligned}$$

7. $\int x^2 e^{-x+1} dx$.

Решение. Положим $u = x^2$, $dv = e^{-x+1} dx$. Тогда $du = 2x dx$ и

$$v = \int dv = \int e^{-x+1} dx = -\int e^{-x+1} d(-x+1) = -e^{-x+1}.$$

Применяя формулу $\int u dv = uv - \int v du$ интегрирования по частям, получаем:

$$\int x^2 e^{-x+1} dx = -x^2 e^{-x+1} + 2 \int e^{-x+1} x dx.$$

К полученному интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям, полагая $u = x$, $dv = e^{-x+1} dx$. Тогда $du = dx$, $v = -e^{-x+1}$ и

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 80 из 90

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x+1} dx &= -x^2 e^{-x+1} - 2x e^{-x+1} + 2 \int e^{-x+1} dx = \\ &= -x^2 e^{-x+1} - 2x e^{-x+1} - 2e^{-x+1} + C = \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x+1} + C. \end{aligned}$$

8. $\int x \arcsin x dx$.

Решение. Положим $u = \arcsin x$, $dv = x dx$. Тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Применяя $\int u dv = uv - \int v du$, получаем

$$\begin{aligned} \int x \arcsin x dx &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{(\sqrt{1-x^2})^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Второй из полученных интегралов – табличный, первый найдем подстановкой $x = \sin t$ (см. ниже интегрирование иррациональностей):

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t) = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Окончательно, получаем

$$\int x \arcsin x dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + C.$$

9. $\int e^{2x} \cos 3x dx$.

Решение. Пусть $u = \cos 3x$, $dv = e^{2x} dx$. Тогда $du = -3 \sin 3x dx$, $v = \frac{1}{2} e^{2x}$. Обозначая

искомый интеграл через J , получаем

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 81 из 90

$$J = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx .$$

К полученному интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям, где $u = \sin 3x$, $dv = e^{2x} dx$:

$$J = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx \right),$$

или

$$J = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} J + C_1 .$$

Выражая из последнего равенства искомый интеграл J , окончательно имеем

$$J = \frac{1}{13} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) e^{2x} + C, \text{ где } C = \frac{4}{13} C_1 .$$

Интегрирование рациональностей

Метод неопределенных коэффициентов

$$10. \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)} .$$

Решение. Записывая подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, имеем:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1} ,$$

или после приведения выражения правой части к общему знаменателю:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1(x^2-1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} .$$

Полученное равенство выполняется тождественно (т.е. при любых значениях переменной x), только если

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 82 из 90

$$x^2 = A_1(x^2 - 1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2.$$

Полагая, что здесь $x=1$, получаем $1=2A_2$ и, следовательно, $A_2=1/2$. При $x=-1$, имеем $1=4A_3$ и поэтому $A_3=1/4$. Положим $x=0$. Тогда $0=-A_1+A_2+A_3$. Подставляя в последнее равенство найденные значения A_2 и A_3 , получаем $A_1=3/4$.

Используя найденное представление для подынтегральной функции, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)} &= \int \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Интегрирование иррациональностей

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, где R – рациональная функция, находятся с помощью подстановок $x = a \sin t$, $x = a \cdot \operatorname{tg} t$,

$x = \frac{a}{\cos t}$ соответственно.

$$11. \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx.$$

Решение. Положим $x = \frac{1}{\cos t}$, где $t \in [0, \pi]$ и $t \neq \frac{\pi}{2}$. Тогда $dx = \frac{\sin t dt}{\cos^2 t}$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx &= \int \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} \frac{\cos t \sin t}{\cos^2 t} dt = \int \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \frac{\sin t}{\cos t} dt = \\ &= \int |\operatorname{tg} t| \operatorname{tg} t dt. \end{aligned}$$

При сделанных предположениях $\sin t > 0$. Если $x > 0$, т. е. $\cos t > 0$, то

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 83 из 90

$|tgt| = tgt$ и

$$\int tg^2 t dt = \int ((1 + tg^2 t) - 1) dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt = tgt - t + C.$$

Так как $\cos t = \frac{1}{x}$, то $t = \arccos \frac{1}{x}$ и

$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\sqrt{\cos^2 t}} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 1} - \arccos \frac{1}{x} + C.$$

Если $x < 0$, т.е. $\cos t < 0$, то $|tgt| = -tgt$, и аналогично получим, что

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = -\sqrt{x^2 - 1} + \arccos \frac{1}{x} + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция,

допускают рационализацию с помощью универсальной подстановки $t = tg \frac{x}{2}$,

где $-\pi < x < \pi$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

12. $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$.

Решение. Полагая $t = tg(x/2)$, получаем $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(3 + \frac{5(1-t^2)}{1+t^2} \right)} =$

$$= 2 \int \frac{dt}{8 - 2t^2} = \int \frac{dt}{4 - t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{tg(x/2) + 2}{tg(x/2) - 2} \right| + C.$$

Семестр II.

Методические указания по теме «Определенный интеграл»

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 84 из 90

Вопросы для самопроверки

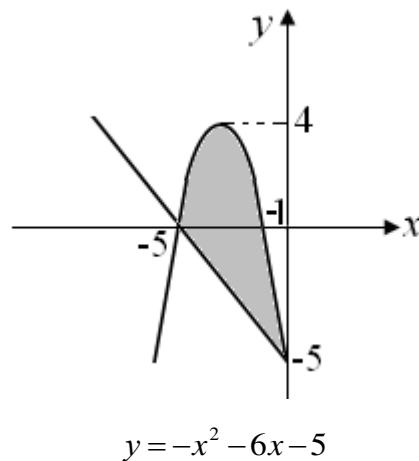
1. Что называется определенным интегралом?
2. Какими свойствами обладает определенный интеграл?
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Формула для вычисления площади фигуры.
5. Формула для вычисления объема тел вращения.

Примеры решения задач

Задача. а) Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = -x^2 - 6x - 5, \quad y = -x - 5.$$

Решение. Искомая площадь S это площадь заштрихованной части фигуры, образованной прямой $y = -x - 5$, проходящей через точки $(-5, 0)$, $(0, -5)$ и параболой



с вершиной в точке $(-3, 4)$, пересекающей ось Ox в точках

$$x_1 = -5 \text{ и } x_2 = -1:$$

$$y' = -2x - 6 = 0, \text{ откуда } x = -3, \text{ а } y(-3) = 4;$$

$$-x^2 - 6x - 5 = 0, \text{ откуда } x_1 = -5 \text{ и } x_2 = -1.$$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 85 из 90

Площадь S фигуры вычислим, используя формулу $S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$,

в которой $y = f(x)$ – уравнение параболы

$$y = -x^2 - 6x - 5, \text{ а } y = \varphi(x) \text{ – уравнение прямой } y = -x - 5.$$

Пределы интегрирования a и b найдем из условия $f(x) = \varphi(x)$:

$$-x^2 - 6x - 5 = -x - 5,$$

$$x^2 + 5x = 0,$$

$$x(x + 5) = 0,$$

откуда $a = -5$ и $b = 0$ – соответственно нижний и верхний пределы интегрирования. Таким образом,

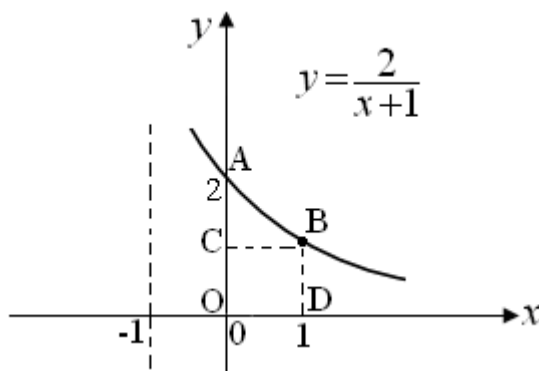
$$S = \int_{-5}^0 (-x^2 - 5x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_{-5}^0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}.$$

2) Найти объемы тел, образованных вращением вокруг плоской фигуры вокруг осей координат, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x+1}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Решение. Объем V_x , образованный вращением вокруг оси Ox , находим

непосредственно из формулы $V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx$:

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} \right)^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x+1)^{-2} d(x+1) = -4\pi (x+1)^{-1} \Big|_0^1 = 2\pi.$$



ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 86 из 90

Объем V_y равен сумме двух объемов: $V_y = V_{ABC} + V_{BDOC}$, где V_{ABC} , V_{BDOC} – объемы тел, полученных при вращении вокруг оси Oy соответственно криволинейного треугольника ABC и квадрата $BDOC$. 2

Применяя формулу $V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy$, получаем

$$V_{ABC} = \pi \int_1^2 \left(\frac{2-y}{y} \right)^2 dy = \pi \int_1^2 \left(4y^{-2} - \frac{4}{y} + 1 \right) dy = \pi \left(-4y^{-1} - 4 \ln|y| + y \right) \Big|_1^2 = \pi(3 - 4 \ln 2).$$

$$V_{BDOC} = \pi \int_0^1 1^2 dy = \pi y \Big|_0^1 = \pi. \text{ Тогда общий объем равен}$$

$$V_y = V_{ABC} + V_{BDOC} = \pi(3 - 4 \ln 2) + \pi = 4\pi(1 - \ln 2).$$

Методические указания по теме «Дифференциальные уравнения»

Покажем на примерах решение дифференциальных уравнений. Прежде чем решить уравнение, необходимо определить его тип. Уравнение первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0.$$

Разделив обе части уравнения на $N_1(y) \cdot M_2(x)$, получаем уравнение с разделёнными переменными и интегрируем его.

Пример I. Найти общее решение уравнения

$$(xy + x)dx - (x^2y + y)dy = 0 \Rightarrow x(y+1)dx - y(x^2+1)dy = 0$$

В результате разделения переменных получаем $\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{ydy}{y+1} = 0$.

Интегрируем

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 87 из 90

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} - \int \frac{(y+1)-1}{y+1} dy = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - y + \ln(y+1) = \ln C \Rightarrow$$

$$\ln(\sqrt{x^2+1} \cdot |y+1|) = \ln|C \cdot e^y|, \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2+1} \cdot (y+1) = C \cdot e^y - \text{общий}$$

интеграл уравнения.

Уравнение $y' = f(x, y)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если при замене x на λx и y на λy оно не изменится.

Пример 2. Решить уравнение $y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0$.

Переменные не разделяются. Заменим x на λx и y на λy . Получим

$$\lambda^3 y^2 dx + \lambda^3 (x^2 - xy) dy = 0, \quad \text{сократим на } \lambda^3: y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0.$$

Следовательно, данное уравнение однородное первого порядка. Решим его с помощью подстановки $y = u \cdot x$, где $u(x)$ – новая функция, относительно которой получаем уравнение с разделяющимися переменными.

Последнее уравнение запишем в виде $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ и делаем подстановку

$$y = u \cdot x, \quad y' = u'x + u, \quad \text{отсюда получаем} \quad x \frac{du}{dx} + u = \frac{u^2}{u-1}.$$

Разделяя переменные, находим $\frac{dx}{x} + \frac{(1-u)}{u} du = 0$. Интегрируя это уравнение, находим его общий интеграл $u \cdot x = C \cdot e^u$.

Приняв во внимание, что $u = \frac{y}{x}$, из последней формулы получаем общий интеграл уравнения $y = C \cdot e^{y/x}$.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Его решают с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где u и v – неизвестные функции.

Пример 3. Решить уравнение $y' \cdot \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} x$.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 88 из 90

Решение.

Из данного уравнения получаем $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = 2 \cos^2 x$

Пусть $y = u \cdot v$ тогда $y' = u'v + uv'$. При подстановке в последнее уравнение находим $u'v + uv' - u \cdot v \cdot \operatorname{tg} x = 2 \cos^2 x$, или

$$u'v + u(v' - v \cdot \operatorname{tg} x) = 2 \cos^2 x. \quad (*)$$

Для определения v имеем уравнение $v' - v \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx$.

Интегрируя последнее уравнение, получаем $v = \frac{1}{\cos x}$ При этом уравнение

(*) дает

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \cos^2 x \quad \text{или} \quad du = 2 \cos^3 x dx, \quad \text{откуда}$$

$$u = 2 \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) + C.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения будет:

$$y = u \cdot v, \quad \text{т.е.} \quad y = \frac{1}{\cos x} \left(2 \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + C \right).$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' = -\frac{(y')^2}{2y}$

Данное уравнение 2-го порядка не содержит независимой переменной и относится к типу уравнений $f(y, y', y'') = 0$.

Пусть $y' = p$, тогда $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$. Из уравнения получаем $\frac{dp}{dy} \cdot p = -\frac{p^2}{2y}$, т.е.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}.$$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 89 из 90

В результате интегрирования находим: $\ln p = -\frac{1}{2} \ln y + \ln C_1$, т.е. $p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$,

или $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$, т.е. $\frac{1}{C_1} \sqrt{y} dy = dx$ Отсюда находим

$\frac{2}{3C_1} y^{3/2} = x + C_2$ – общий интеграл данного уравнения.

Пример 5. Найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - y' = e^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Решение.

Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' - y' = 0$$

Характеристическое уравнение: $K^2 - K = 0$ имеет действительные различные корни

$k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $y_{o.o.} = C_1 + C_2 e^x$.

Частное решение \bar{y} данного линейного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $\bar{y} = A x e^x$, так как коэффициент при x показательной функции e^x (равный единице) совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Подставим \bar{y} в неоднородное уравнение, вычислив прежде $\bar{y}' = A e^x(1+x)$, $\bar{y}'' = A e^x(2+x)$.

Имеем $A e^x(2+x) - A e^x(1+x) = e^x$, откуда $A e^x = e^x$, или $A = 1$. Следовательно, частное решение имеет вид $\bar{y} = x \cdot e^x$.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 90 из 90

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y_{O.H.} = y_{O.O.} + \bar{y}$.

Поэтому $y_{O.H.} = C_1 + C_2 \cdot e^x + x \cdot e^x$. Используя начальные условия, определяем C_1 и C_2 :

$$0 = C_1 + C_2 e^0 + 0 \cdot e^0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0.$$

$$y'_{O.H.} = 0 + C_2 e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x, \text{ или } 2 = C_2 e^0 + e^0 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 + 1 = 2, C_2 = 1, \text{ т.к. } C_1 = -C_2, \text{ то } C_1 = -1.$$

Следовательно, искомое частное решение будет $y = -1 + e^x + x e^x$.

Пример 6. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x \end{aligned} \right\}.$$

Решение. Будем искать решение в виде $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$.

Подставляя эти выражения в данную систему дифференциальных уравнений, после сокращения на $e^{\lambda t}$, имеем

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda)\alpha - \beta &= 0 \\ -2\alpha - \lambda\beta &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (*)$$

Ненулевое решение системы алгебраических уравнений (*) существует только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (**)$$

Раскрывая определитель, получаем характеристическое уравнение

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 91 из 90

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, (**), корни которого $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$. При $\lambda_1 = 2$ из второго равенства системы (*) находим $\beta = -\alpha$; при $\lambda_2 = -1$ находим $\beta = 2\alpha$.

Таким образом, получаем два решения:

$$x_1 = C_1 e^{2t}, y_1 = -C_1 e^{2t} \text{ и } x_2 = C_2 e^{-t}, y_2 = 2C_2 e^{-t}. \text{ Их сумма также}$$

является решением данной системы. Окончательно имеем

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, y(t) = -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{-t}.$$

Задача.

Материальная точка массы 1г отталкивается вдоль прямой от некоторого центра с силой, пропорциональной ее расстоянию от этого центра (коэффициент пропорциональности равен 4). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности равен 3). В начале движения расстояние от центра равно 1 см, а скорость – нулю. Найти закон движения.

Решение.

По второму закону Ньютона равнодействующая сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на ускорение движения $F = ma$, $m = 1г$,

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ где } x \text{ – расстояние точки от центра.}$$

Получаем уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = 4x - 3\frac{dx}{dt}$, с начальными

$$\text{условиями } x\Big|_{t=0} = 1, x'\Big|_{t=0} = 0.$$

Имеем линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами $x'' + 3x' - 4x = 0$. Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 3k - 4 = 0$, $k_1 = -4$, $k_2 = 1$. Отсюда $x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t$.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 92 из 90

Для определения произвольных постоянных находим $x'(t) = -4C_1e^{-4t} + C_2e^t$

и, используя начальное условие, получаем систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -4C_1 + C_2 = 0. \end{cases} \text{ Решая, находим } C_1 = \frac{1}{5} \text{ и } C_2 = \frac{4}{5}. \text{ Тогда}$$

$$x(t) = \frac{1}{5}(4e^t + e^{-4t}).$$

Методические указания по теме «Ряды»

1) ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Среди достаточных признаков сходимости рядов с положительными членами наиболее эффективным является интегральный признак Коши. Поэтому, если другие признаки не позволяют решить вопрос о сходимости или расходимости числового ряда с положительными членами, то следует обратиться к интегральному признаку Коши.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$

а) с помощью признака Даламбера; б) используя интегральный признак.

Решение: по условию $u_n = \frac{2n}{n^2+1}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{(n^2+1)+1}$

а) найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(n^2+1)}{((n+1)^2+1) \cdot 2n} = 1.$

т.е. признак Даламбера не позволяет сделать заключение о сходимости или расходимости ряда.

б) члены данного ряда положительные и убывают, за функцию $f(x)$, о которой

идет речь в интегральном признаке (см. п.6), возьмем функцию $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 93 из 90

при $x \geq 1$. Эта функция непрерывна и убывает, причем $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Так как

$$\int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln|x^2+1| \Big|_1^n = \infty, \text{ то несобственный}$$

интеграл расходится, следовательно, данный ряд расходится.

Данный пример можно решить, применяя теорему сравнения рядов.

Теорема. Даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Поведение

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ известно, т.е. известно сходится он или расходится. Требуется

определить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Если предел отношения общих членов данных рядов при $n \rightarrow \infty$ есть число, не равное нулю и бесконечности, то оба ряда ведут себя одинаково, т.е. или оба сходятся, или оба расходятся, т.е., если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty,$$

то оба ряда ведут себя одинаково.

Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

Общий член гармонического ряда $u_n = \frac{1}{n}$, общий член исследуемого ряда

$$v_n = \frac{2n}{n^2+1}. \text{ Находим } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2+1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0, \neq \infty, \text{ откуда исследуемый}$$

ряд расходится.

2) ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

Ряд

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 94 из 90

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (1)$$

члены которого являются функциями от переменной x , называется функциональным. При подстановке x в функциональный ряд (1), получим числовой ряд, который может быть сходящимся или расходящимся.

Совокупность значений x , при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости. Частным случаем функционального ряда является степенной ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad (2) \text{ или}$$

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n. \quad (3)$$

Областью сходимости степенного ряда является интервал числовой оси, симметричный относительно точки $x=0$ (для ряда (2)) или $x=x_0$ (для ряда (3)). Этот интервал может быть закрытым, открытым или полуоткрытым.

Для нахождения интервала сходимости степенных рядов обычно используют признак Даламбера.

Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{5^{n-1} \cdot n}$.

$$u_n = \frac{(-x)^n}{5^{n-1} \cdot n}; \quad u_{n+1} = \frac{(-x)^{n+1}}{5^n(n+1)}.$$

Используя признак Даламбера, ищем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot 5^{n-1} \cdot n}{5^n(n+1)x^n} \right| = \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{5}.$$

Определяем, при каких значениях x этот предел будет меньше 1, т.е. решаем неравенство $\frac{|x|}{5} < 1$, $|x| < 5$, $-5 < x < 5$. $x = \pm 5$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 95 из 90

По признаку Даламбера при любом значении x из найденного интервала данный ряд сходится, а при $|x| > 5$ расходится. Граничные точки $x = \pm 5$ этого интервала, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ и признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда, исследуем особо.

При $x = -5$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5)^n}{5^{n-1} \cdot n}$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$, который расходится, что следует из сравнения его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\left(\frac{5}{n} > \frac{1}{n}\right)$.

При $x = 5$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^{n-1} \cdot n}$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5}{n}$, который сходится по признаку Лейбница (члены этого ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю).

Следовательно, интервалом сходимости данного ряда является $-5 < x \leq 5$, $R = 5$.

3) ПРИЛОЖЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Ряды часто используются для приближенного вычисления значений функций, интегралов и решения дифференциальных уравнений. Студентам следует обратить внимание на замечание [9, гл.16, §7], в котором показано, как оценить погрешность, получающуюся при замене суммы знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, суммой первых его членов; допустимая абсолютная погрешность не превосходит модуля первого

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 96 из 90

отброшенного члена. Здесь [9] в списке литературы это Пискунов Н.С., Т.2. «Дифференциальное и интегральное исчисления».

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с точностью до 0,001,

разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем

проинтегрировать его почленно: $\int_0^1 x \cos \sqrt{x} dx$.

Рассмотрим разложение $\cos x$ в ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \text{ Отсюда}$$

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Интегрируя в пределах от 0 до 1, найдем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos \sqrt{x} dx &= \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \frac{x^5}{8!} - \dots \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^5}{5 \cdot 6!} + \frac{x^6}{6 \cdot 8!} - \dots \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{96} - \frac{1}{3600} + \dots \approx \\ &\approx 0,5 - 0,1667 + 0,0104 = 0,343. \end{aligned}$$

Четвертый член этого знакопередающегося ряда по модулю меньше 0,001, поэтому для вычисления приближенного значения интеграла с точностью до 0,001 достаточно взять сумму первых трех членов ряда, при этом допускаем ошибку $|\tau_n| < 0,0003$.

Семестр III РЯДЫ ФУРЬЕ

Литература. [9, гл.17, §1-7, 10 (доказательство можно опустить)].

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 97 из 90

Тригонометрические ряды играют важную роль в математике. Они находят широкое применение в приложениях, где их используют при решении задач математической физики, в электротехнике, метрологии и т.д. Чаще всего тригонометрические ряды используются при изучении тригонометрических процессов, поэтому основное внимание в учебнике уделено разложению в ряд Фурье периодических функций (с периодом 2π и с периодом 2λ).

Рядом Фурье для функции $f(x)$ в интервале $(-1;1)$ называется тригонометрический ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{1} + b_n \frac{\pi n x}{1} \right), \quad (*)$$

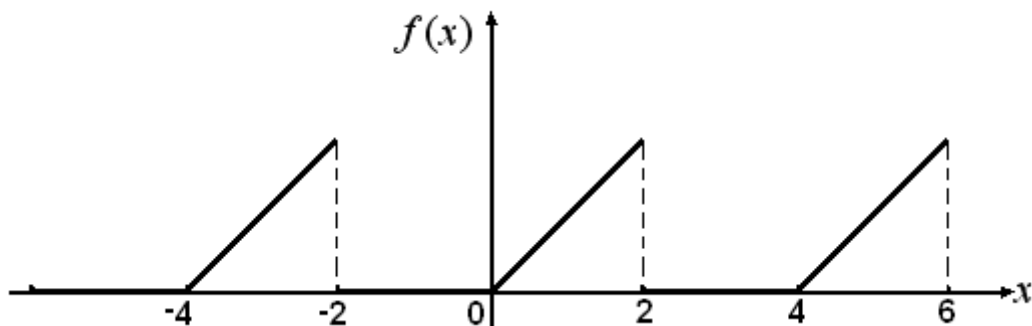
если его коэффициенты a_0, a_n, b_n вычислены по формулам Фурье

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos \frac{n\pi x}{1} dx, \quad b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin \frac{n\pi x}{1} dx,$$

$n=1,2,3,\dots$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 98 из 90

Решение. Здесь $1 = 2$. Вычислим коэффициент

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{4}{4} = 1.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \left(u = x, du = dx, dv = \cos \frac{n\pi x}{2} dx, v = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi n} \cdot x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\pi n} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n - \cos 0) = \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \left(u = x, du = dx, dv = \sin \frac{n\pi x}{2} dx, \right.$$

$$v = \int \sin \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= \left. -\frac{2}{\pi n} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\pi n} x \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\pi n} \cdot 2 \cdot \cos \pi n + \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \right)$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi n} (-1)^n, \text{ здесь } \cos \pi n = (-1)^n$$

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 99 из 90

Подставляя найденные значения коэффициентов a_0 , a_n и b_n в формулу (*), учитывая, что $\lambda = 2$, получим:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n x}{2}$$

Полученный ряд сходится к функции $f(x)$ во всех точках непрерывности, а в точках разрыва I-го рода сумма ряда

$$S(x) \Big|_{x=C} = \frac{f(C-0) + f(C+0)}{2}.$$

Например, $S(x) \Big|_{x=2} = \frac{f(2-0) + f(2+0)}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$

Методические указания по теме «Кратные интегралы и их приложения».

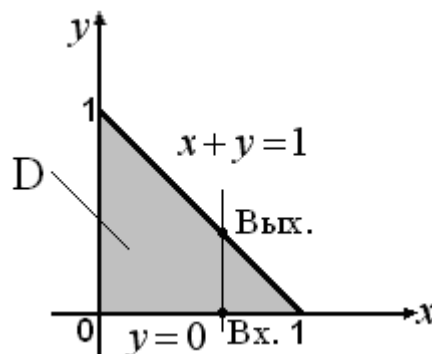
Пример 1. Вычислить двойной интеграл вдоль области D (см. рисунок)

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Для вычисления двойного интеграла необходимо представить его в виде двукратного, причем подынтегральную функцию поставить под знак внутреннего интеграла. Взять внутренний интеграл и от полученного результата взять внешний. Чтобы расставить пределы интегрирования по переменной x проектируем область D на ось Ox . Левая проекция равна нулю, правая равна 1, следовательно, нижний предел интегрирования по переменной x будет 0, а верхний 1. Чтобы расставить пределы интегрирования по переменной y , через область D проводим прямую параллельно оси Oy и отмечаем точку входа в область D и точку выхода из нее. Т.к. точка входа лежит на прямой

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 100 из 90

$y=0$, то нижний предел интегрирования по переменной y будет 0. Точка выхода лежит на прямой $x+y=1$, из уравнения этой прямой находим: $y=1-x$,



тогда верхний предел интегрирования по переменной y будет $1-x$. Находим

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \\ &= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3} dx \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Обратите внимание на то, что при вычислении внутреннего интеграла по аргументу y другой аргумент x считается величиной постоянной.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными уравнениями в декартовых координатах, перейдя к полярным координатам ($a>0$).

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2, \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, y=0$$

Решение. Искомую площадь удобно искать в полярных координатах. Известна связь декартовых координат с полярными:

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 101 из 90

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, x^2 + y^2 = r^2$$

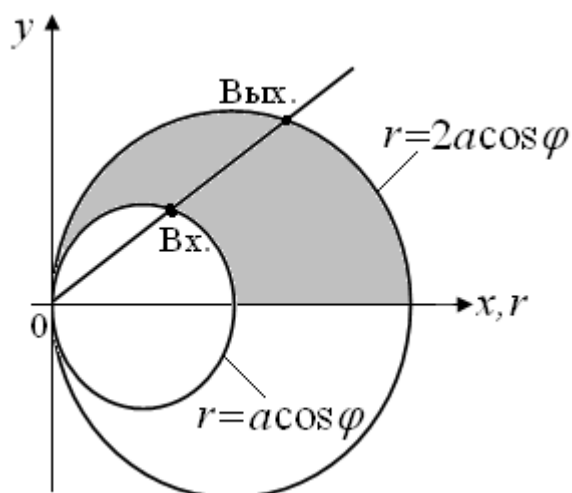
Площадь плоской области D находят по формуле $S = \iint_D dx dy$, или,

переходя к полярным координатам:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.$$

Запишем уравнения данных окружностей в полярных координатах.

Имеем $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, или $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$, откуда $x^2 + y^2 = 2ax$, или $r^2 = 2ar \cos \varphi$, $r = 2a \cos \varphi$. Аналогично, полярное уравнение второй окружности примет вид: $r = a \cos \varphi$. Из рисунка видно, что полярный угол в области D изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, т.е. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Если из полюса 0 через область D провести полярный радиус, то точка входа в область D будет на окружности $r = a \cos \varphi$, а точка выхода из области на окружности $r = 2a \cos \varphi$, поэтому $a \cos \varphi \leq r \leq 2a \cos \varphi$.



ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
Рабочая учебная программа дисциплины «Математический анализ»			
Разработал доцент Ксендзенко Л.С.	Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 2019-2020 учебный год	Контрольный экземпляр находится на кафедре Алгебры, геометрии и анализа	Лист 102 из 90

Таким образом, площадь S области D равна

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{2a \cos \varphi} r dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_{a \cos \varphi}^{2a \cos \varphi} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (4a^2 \cos^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{3a^2}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{3a^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right) = \frac{3a^2 \pi}{8}, \quad \text{т.к. } \sin \pi = 0
 \end{aligned}$$

В данной задаче легко сделать проверку. Искомая площадь равна половине от разности площади круга радиуса $R = a$ и радиуса $R = a/2$. Известно, $S_{\text{круга}} = \pi R^2$. Тогда искомая площадь $S = \frac{1}{2} \left(\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{4} \right) = \frac{3\pi a^2}{8}$.

Методические указания по уравнениям математической физики имеются в читальном зале инженерной школы в кампусе ДВФУ: «Уравнения математической физики». Методические указания и контрольные задания для студентов 2 курса технических специальностей очной и заочной форм обучения. Владивосток, 2013. Составители: Ксендзенко Л.С., Жигалкина Г.В.