



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДВФУ)

---

---

**ШКОЛА ЭКОНОМИКИ И МЕНЕДЖМЕНТА**

СОГЛАСОВАНО

Руководитель ОП

Е.Г. Юрченко

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой бизнес-информатики и  
экономико-математических методов

Ю.Д. Шмидт

« 20 » сентября 2018 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Линейная алгебра

**Направление подготовки 38.03.01 Экономика**

(Бизнес-информатика)

**Форма подготовки очная**

курс 1 семестр 1

лекции – 36 час.

практические занятия – 72 час.

лабораторные работы – 00 час.

в том числе с использованием МАО лек. 0 / пр. 0 / лаб. 00 час.

всего часов аудиторной нагрузки – 108 час.

в том числе с использованием МАО – 0 час.

самостоятельная работа – 72 час.

в том числе на подготовку к экзамену – 36 час.

контрольные работы (количество) – не предусмотрены

курсовая работа / курсовой проект – не предусмотрены

зачет – не предусмотрен

экзамен – 1 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта, самостоятельно устанавливаемого ДВФУ, утвержденного приказом ректора от 04.04.2016 № 12-13-592

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры бизнес-информатики и экономико-математических методов, протокол № 8 от « 20 » сентября 2018 г.

Заведующий кафедрой: д-р экон. наук, проф. Ю.Д. Шмидт

Составитель: д-р экон. наук, проф. Ю.Д. Шмидт

**Владивосток**  
**2018**

**I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**III. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**IV. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

## **ABSTRACT**

**Bachelor's degree in** 38.03.01 Economy

**Educational program:** «Business Informatics»

**Course title:** «Linear Algebra »

**Basic part of Block 1, 5 credits**

**Instructor:** Shmidt Yuriy Davydovich , doctor of economic Sciences, Professor.

**At the beginning of the course a student should be able to:**

- the ability to carry out oral and written communication in Russian, logically true, and clear arguments to build oral and written language;
- the ability to work with different sources of information, information resources and technologies to apply the basic techniques, ways and means of obtaining, storing, retrieving, organizing, processing and transmission of information used in professional activity automated information systems used in the economy, workstations, spending information retrieval work and then using data to solve professional problems.

**Learning outcomes:**

- the ability to creatively perceive and use the achievements of science, technology in the professional field in accordance with the needs of the regional and global labor market (GC-4);
- the ability to use modern methods and technologies (including information) in professional activities (GC-5).

**Course description:**

The content of the discipline covers the sections of higher mathematics, which are called linear algebra and analytic geometry. Linear algebra is the original problem - the study of systems of linear equations. To do this, the device is developed the theory of determinants (when the number of equations equals the number of unknowns). This unit is no longer sufficient when the number of equations is not equal to the number of unknowns. In this case, it was necessary to develop the theory of matrices. Further study of systems of linear equations

required the introduction and study of multidimensional (vector or linear) space. A graphic representation of linear spaces are two-dimensional or three-dimensional Euclidean space. For these physical spaces covers the basics of vector algebra, the theory of a straight line on the plane and the second-order curves, plane and a straight line in space. These sections are the elements of analytic geometry. Further, these concepts are abstracted to an n-dimensional vector space. The teaching materials on the course provide extensive use of active, creative and interactive lessons, combined with private study in order to create and develop the professional skills of the students.

### **Main course literature:**

1. Beklemishev D.V. The course of analytic geometry and linear algebra: a textbook. - St. Petersburg: Lan, 2015. NB FEFU: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:777158&theme=FEFU>

2. Ilyin V.A., Poznyak E.G. Linear algebra. - M.: Fizmatlit, 2004, NB FEFU: <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:7030&theme=FEFU>.

3. Kremer N.Sh., Fridman M.N. Linear algebra: a textbook and a workshop for academic undergraduate economics. - Moscow: Yurayt, 2015, 307s. NB FEFU: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:790980&theme=FEFU>

4. Livshits K.I. The course of linear algebra and analytic geometry: a textbook for high schools. - St. Petersburg: Lan, 2017, 504 p. NB FEFU: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:844739&theme=FEFU>

5. Malugin V.A., Roshchina Ya.A. Linear algebra for economists: a textbook, a workshop and a collection of tasks for an academic undergraduate degree in economics and specialties. - Moscow: Yurayt, 2017, 478 p. NB FEFU: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:841237&theme=FEFU>

### **Form of final control: exam**

## **Аннотация к рабочей программе дисциплины «Линейная алгебра»**

Учебный курс «Линейная алгебра» предназначен для студентов направления подготовки 38.03.01 Экономика, образовательная программа «Бизнес-информатика».

Дисциплина «Линейная алгебра» включена в состав базовой части блока «Дисциплины (модули)».

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов. Учебным планом по данному направлению по этой дисциплине предусмотрены лекционные занятия (36 часов), практические занятия (72 часа), самостоятельная работа (72 часа, в том числе 36 часов на подготовку к экзамену). Дисциплина реализуется на 1 курсе в 1 семестре.

Дисциплина «Линейная алгебра» позволяет подготовить студентов к освоению ряда таких дисциплин как «Математический анализ», «Статистика», «Эконометрика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Макроэкономика», «Микроэкономика», «Эконометрика 2».

Содержание дисциплины охватывает следующий круг вопросов: матрицы и определители, системы линейных уравнений, линейные пространства, линейные операторы и преобразования, евклидовы пространства, квадратичные формы, векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.

**Цель** – формирование у студентов устойчивых знаний основных методов линейной алгебры и аналитической геометрии, а также развитие аналитического, логического, теоретико-множественного и алгоритмического мышления, привитие навыков использования математического инструментария для решения прикладных социально-экономических задач.

**Задачи:**

- познакомить студентов с сущностью, возможностями и практическим значением математического инструментария и аппарата как одного из методов формализации и познания экономической реальности.

- дать представление об основных методах и базовых результатах линейной алгебры и аналитической геометрии.

- сформировать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий и закреплению вычислительных навыков, необходимых для решения математических и экономических задач.

- развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

- сформировать методическую базу для дальнейшего самостоятельного изучения методов и инструментов экономико-математического моделирования и анализа в профессиональной деятельности.

Для успешного изучения дисциплины «Линейная алгебра» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные элементы компетенций:

- способностью осуществлять письменную и устную коммуникацию на русском языке, логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь;

- способностью работать с различными источниками информации, информационными ресурсами и технологиями, применять основные методы, способы и средства получения, хранения, поиска, систематизации, обработки и передачи информации, применять в профессиональной деятельности автоматизированные информационные системы, используемые в экономике, автоматизированные рабочие места, проводить информационно-поисковую работу с последующим использованием данных при решении профессиональных задач.

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие общекультурные компетенции (элементы компетенций):

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОК-4 – способность творчески воспринимать и использовать достижения науки, техники в профессиональной сфере в соответствии с потребностями регионального и мирового рынка труда (формируется частично)	Знает	современные методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии
	Умеет	использовать методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии для решения типовых математических задач в этой сфере и восприятия современных текстов по экономической теории
	Владеет	методами и инструментарием линейной алгебры и аналитической геометрии для восприятия и использования достижений науки, техники в профессиональной сфере
ОК-5 – способность использовать современные методы и технологии (в том числе информационные) в профессиональной деятельности (формируется частично)	Знает	методы, инструментарий и базовые результаты линейной алгебры и аналитической геометрии
	Умеет	использовать методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии для анализа количественных соотношений, решения систем линейных уравнений
	Владеет	специальными теоретическими и практическими методами линейной алгебры и аналитической геометрии для формализации экономической информации и ее анализа

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Линейная алгебра» применяются следующие методы активного/интерактивного обучения: лекция-презентация, лекция-дискуссия, кейс-метод.

## I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

### *Раздел 1. Матрицы и определители (9 часов)*

**Тема1. Матрицы (2 часа).** Операции с матрицами. Свойства операций над матрицами. Умножение матриц на трансвекцию и диагональную

матрицу. Теорема о разложении матрицы в произведение нескольких трансвекций и диагональной матрицы.

**Тема 2. Линейная зависимость и линейная независимость (1 час).**

Столбцы и строки. Линейная зависимость и линейная независимость столбцов и строк. Свойства линейно зависимых и линейно независимых совокупностей столбцов и строк.

1. **Тема 3. Определители (2 часа).** Определитель матрицы размерности  $n$ . Теорема основная для определителя. Основные свойства определителей. Достаточное условие равенства определителя нулю. Теорема об определителе произведения двух квадратных матриц.

**Тема 4. Ранг матрицы (2 часа).** Понятие базисного минора матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Приведение матрицы к верхней трапецеидальной форме с помощью элементарных преобразований. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Свойства ранга матрицы.

**Тема 5. Обратная матрица (2 часа).** Понятие обратной матрицы. Формула для определения обратной матрицы. Теорема о равносильности условий для существования обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Литература: [1], гл. 1.

***Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений СЛАУ (4 часа)***

**Тема 1. Понятие СЛАУ (2 часа).** Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений. Основная и расширенная матрицы системы. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений (теорема Кронекера-Капелли).

**Тема 2. Правило Крамера (2 часа).** Крамеровские системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Крамера. Решение крамеровских систем с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы.



**Тема 3. Метод Гаусса (2 часа).** Элементарные преобразования системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса исследования и решения системы линейных алгебраических уравнений. Базисные и свободные неизвестные.

Литература: [1], гл. 2.

***Раздел 3. Линейные пространства (5 часов)***

**Тема 1. Базис и размерность линейного пространства (2 часа).** Понятие линейного пространства. Простейшие следствия аксиом линейного пространства. Примеры линейных пространств. Базис линейного пространства. Координаты вектора линейного пространства относительно данного базиса. Размерность линейного пространства. Связь понятий базиса и размерности линейного пространства.

**Тема 2. Подпространства (1 час).** Подпространства линейного пространства. Примеры линейных подпространств. Понятие линейной оболочки векторов линейного пространства.

**Тема 3. Замена базиса линейного пространства (1 час).** Формулы преобразования координат вектора линейного пространства при переходе от одного базиса пространства к другому.

**Тема 4. Фундаментальная система решений (1 час).** Пространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Размерность пространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений. Отыскание нормальной ФСР. Структура общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

Литература: [1], гл. 3.

***Раздел 4. Линейные преобразования линейных пространств (6 часов)***

**Тема 1. Операции над линейными преобразованиями (2 часа).** Понятие линейного оператора и линейного преобразования. Операции над линейными преобразованиями. Обратное линейное преобразование.

Свойства операций над линейными преобразованиями. Ядро и образ линейного преобразования. Дефект и ранг линейного преобразования.

**Тема 2. Матрица линейного преобразования (2 часа).** Матрица линейного преобразования в данном базисе линейного пространства. Взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями  $n$ -мерного линейного пространства и квадратными матрицами порядка  $n$ . Связь между рангом линейного преобразования и рангом соответствующей ему матрицы. Преобразование матрицы линейного преобразования при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.

**Тема 3. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (2 часа).** Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования. Собственное подпространство, отвечающее данному собственному значению линейного преобразования. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Критерий приведения матрицы линейного преобразования к диагональному виду.

Литература: [1], гл. 4.

#### ***Раздел 5. Евклидовы пространства (2 часа)***

**Тема 1. Ортонормированный базис (2 часа).** Понятие действительного евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Матрица Грама. Линейное нормированное пространство. Ортонормированный базис евклидова пространства. Процесс ортогонализации. Свойства ортонормированного базиса.

Литература: [1], гл. 5.

#### ***Раздел 6. Квадратичные формы (2 часа)***

**Тема 1. Канонический вид квадратичной формы (2 часа).** Понятие квадратичной формы. Матрица, дискриминант и ранг квадратичной формы. Канонический вид квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Нормальный вид квадратичной

формы. Закон инерции действительной квадратичной формы квадратичной формы. Знакоопределенные и знакопеременные квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.

Литература: [1], гл. 6.

### ***Раздел 7. Векторная алгебра (3 часа)***

**Тема 1. Декартовы прямоугольные координаты (1 час).** Понятие вектора. Коллинеарность и равенство векторов. Линейные операции над векторами. Критерий коллинеарности двух ненулевых векторов. Компланарность векторов. Критерий компланарности трех векторов. Ось. Величина направленного отрезка оси. Проекция вектора на ось. Декартовы прямоугольные координаты вектора. Направляющие косинусы вектора. Радиус-вектор точки. Декартовы прямоугольные координаты точки. Деление отрезка в заданном отношении. Преобразование координат точки в пространстве и на плоскости. Полярные, цилиндрические и сферические координаты точки.

**Тема 2. Скалярное произведение векторов (1 час).** Свойства скалярного произведения.

**Тема 3. Векторное и смешанное произведения векторов (1 час).** Свойства произведений.

Литература: [1], гл. 7.

### ***Раздел 8. Прямая линия на плоскости (2 часа)***

**Тема 1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (1 часа).** Понятие уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой «в отрезках». Угол между прямыми.

**Тема 2. Другие виды уравнений прямой (1 час).** Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Литература: [1], гл. 8.

## ***Раздел 9. Плоскость и прямая линия в пространстве(3 часа)***

**Тема1. Плоскость в пространстве (1 час).** Уравнение плоскости в векторном виде. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору (вектору нормали к плоскости). Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости «в отрезках». Нормированное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями. Условие параллельности плоскостей. Условие перпендикулярности плоскостей. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, не лежащие на одной прямой.

**Тема 2. Прямая линия в пространстве (1 час).** Общие уравнения прямой в пространстве. Направляющий вектор прямой. Канонические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой. Угол между прямыми в пространстве. Условие параллельности прямых. Условие перпендикулярности прямых.

**Тема 3. Прямая и плоскость (1 час).** Пучок плоскостей. Ось пучка как прямая, принадлежащая всем плоскостям пучка. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности прямой и плоскости. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Литература: [1], гл. 10.

## **II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

### **Практические занятия (72 часа)**

**Занятие1. Матрицы (2 часа).** Понятие матрицы. Операции над матрицами.

**Занятие 2. Линейная независимость и линейная зависимость (2 часа).** Столбцы и строки. Линейная зависимость и независимость столбцов и строк. Свойства линейно зависимых и линейно независимых совокупностей.

**Занятие 3. Определители. Ранг матрицы (4 часа).** Понятие определителя. Вычисление определителей третьего и четвертого порядков. Базисный минор. Способы вычисления ранга матрицы.

**Занятие 4. Обратная матрица (4 часа).** Понятие обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы.

**Занятие 5. Решение крамеровских систем (2 часа).** Решение крамеровских систем двумя способами: по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы.

**Занятие 6. Метод Гаусса (4 часа).** Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Приведение основной матрицы системы к верхней трапецеидальной форме. Базисные и свободные переменные. Исследование совместности СЛАУ. Обратный ход метода Гаусса. Исследование линейной зависимости строк и столбцов с помощью метода Гаусса.

**Занятие 7. Линейная зависимость и независимость элементов абстрактного линейного пространства (4 часа).** Пространство строк, пространство столбцов, пространство матриц, пространство многочленов определенной степени. Представление элемента пространства в виде линейной комбинации других элементов этого пространства. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства.

**Занятие 8. Базис и координаты (4 часа).** Понятие базиса линейного пространства. Отыскание координат произвольного элемента линейного пространства относительно фиксированного базиса пространства. Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому. Выражение координат произвольного элемента линейного пространства относительно одного базиса через его координаты относительно другого базиса.

**Занятие 9. Подпространства. Пространство решений однородной СЛАУ (4 часа).** Понятие линейного подпространства линейного пространства. Операции над подпространствами. Пространство решений однородной СЛАУ. Базис пространства решений однородной СЛАУ – фундаментальная система решений (ФСР). Отыскание нормальной ФСР однородной СЛАУ.

**Занятие 10. Линейные операторы и линейные преобразования линейных пространств (6 часа).** Понятие линейного оператора. Операции над линейными операторами. Понятие линейного преобразования. Операции над линейными преобразованиями. Ядро и образ линейного преобразования. Ранг и дефект линейного преобразования. Критерий обратимости линейного преобразования.

**Занятие 11. Матрица линейного преобразования (4 часа).** Понятие матрицы линейного преобразования в данном базисе линейного пространства. Связь между координатами прообраза и образа элемента линейного пространства. Выражение матрицы линейного преобразования в одном базисе через его матрицу в другом базисе. Характеристический определитель линейного преобразования.

**Занятие 12. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (4 часа).** Вычисление собственных значений линейного преобразования как его действительных характеристических корней. Алгебраическая кратность собственного значения. Вычисление координат собственных векторов как ненулевых решений соответствующих однородных СЛАУ. Геометрическая кратность собственного значения. Приведение матрицы линейного преобразования к диагональному виду.

**Занятие 13. Евклидовы пространства (2 часа).** Ортогональность элементов евклидова пространства. Матрица Грама базиса евклидова пространства. Дополнение ортогональной системы векторов евклидова пространства до базиса. Ортонормированный базис евклидова пространства. Процесс ортогонализации.

**Занятие 14. Ортогональные матрицы и ортогональные преобразования. Симметрические преобразования (4 часа).** Свойства ортогональных матриц. Свойства ортогональных преобразований. Свойства собственных значений и собственных векторов симметрических преобразований.

**Занятие 15. Квадратичные формы (6 часа).** Матрица квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Индексы инерции действительной квадратичной формы. Критерий Сильвестра положительной и отрицательной определенности квадратичной формы.

**Занятие 16. Линейные операции над геометрическими векторами (2 часа).** Сложение векторов. Умножение вектора на число. Вычитание векторов. Компланарность векторов. Проекция вектора на ось. Декартовы прямоугольные координаты вектора и точки.

**Занятие 17. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов (4 часа).** Определение и свойства скалярного произведения двух векторов. Вычисление скалярного произведения векторов, заданных декартовыми прямоугольными координатами. Критерий ортогональности векторов. Вычисление угла между векторами. Определение и свойства векторного произведения двух векторов. Площади параллелограмма и треугольника, построенных на данных векторах. Вычисление векторного произведения векторов, заданных декартовыми прямоугольными координатами. Смешанное произведение трех векторов. Свойства смешанного произведения. Объем параллелепипеда и пирамиды, построенных на данных трех векторах. Вычисление смешанного произведения векторов, заданных декартовыми прямоугольными координатами.

**Занятие 18. Прямая линия на плоскости (3 часа).** Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой на плоскости. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой «в отрезках». Угол между прямыми. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Расстояние от точки до прямой.

**Занятие 19. Плоскость (2 часа).** Общее уравнение плоскости. Связка плоскостей. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости «в

отрезках». Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями. Перпендикулярность и параллельность плоскостей. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

**Занятие 20. Прямая в пространстве (3 часа).** Общие уравнения прямой в пространстве как система уравнений плоскостей, пересекающихся по данной прямой. Направляющий вектор прямой. Канонические уравнения прямой. Переход от общих уравнений прямой к каноническим уравнениям. Параметрические уравнения прямой. Угол между прямыми в пространстве. Условие параллельности прямых. Условие перпендикулярности прямых.

**Занятие 21. Плоскость и прямая линия в пространстве (3 часа).** Пучок плоскостей. Ось пучка. Угол между прямой и плоскостью. Параллельность прямой и плоскости. Перпендикулярность прямой и плоскости.



### III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

#### План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/ сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	Индивидуальное задание 1 (сентябрь)	Изучение теоретической части темы, выполнение заданий по темам: операции с матрицами, вычисление определителей и обратной матрицы, решение систем линейных уравнений методом Крамера и Гаусса	8 часов	Проверка наличия лекций, решения индивидуального задания, активное участие в обсуждении вопросов по темам занятий и заданий.
2	Индивидуальное задание 2 (октябрь)	Изучение теоретической части темы, выполнение заданий по темам: ранг матрицы, базис системы векторов, общее решение системы линейных уравнений, нахождение ФСР однородной системы линейных уравнений	8 часов	Проверка наличия лекций, решения индивидуального задания, активное участие в обсуждении вопросов по темам занятий и заданий.
3	Индивидуальное задание 3 (ноябрь)	Изучение теоретической части темы, выполнение заданий по темам Раздела 8 и Раздела 9.	10 часов	Проверка наличия лекций, решения индивидуального задания, активное участие в обсуждении вопросов по темам занятий и заданий.
4	Индивидуальное задание 4 (декабрь)	Изучение теоретической части темы, выполнение заданий по темам: линейные операторы и их матрицы, нахождение ядра и образа линейного оператора, собственные вектора, приведение матриц линейного оператора к диагональному виду	10 часов	Проверка наличия лекций, решения индивидуального задания, активное участие в обсуждении вопросов по темам занятий и заданий.
5	Подготовка к экзамену и выполнению контрольных работ	Изучение теоретической части курса, выполнение практических заданий по темам курса	36 часов	Проверка контрольных работ, текущий опрос
	ИТОГО	-	72 часов	-

**Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся,  
методические рекомендации по их выполнению**

**Темы и ориентировочное содержание аналитических, научно-исследовательских и творческих заданий**

**Индивидуальное задание 1 (у каждого студента свой вариант).**

1. Найдите произведение матриц  $AB, A^T B, AB^T, A^T B^T, BA, B^T A, BA^T, B^T A^T$  в тех случаях, когда умножение определено. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите значение выражения  $3BA + CB$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель  $\Delta$  двумя способами:

- а) разложив по элементам третьей строки;
- б) получив 3 нуля в четвертом столбце и разложив по нему;
- в) Найти минор  $M_{24}$  и алгебраическое дополнение  $A_{13}$  определителя  $\Delta$ ;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Решить систему методом Крамера; при этом: а)  $\Delta$  вычислить по правилу треугольников; б)  $\Delta_1$  вычислить, разложив по первой строке; в)  $\Delta_2$  вычислить, разложив по второму столбцу; г)  $\Delta_3$  вычислить, получив нули в каком-либо столбце и разложив по нему.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

5. Систему  $AX=B$  решить с помощью обратной матрицы, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите обратную матрицу для матрицы  $A$  с помощью элементарных преобразований, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 9 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите неизвестную матрицу  $X$  если

$$X \cdot \begin{pmatrix} -5 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -9. \end{cases}$$

9. Определите, что произойдет с квадратной матрицей  $A$  порядка 10 при умножении слева на трансвекцию  $T_{27}(5)$ .

**Индивидуальное задание 2 (у каждого студента свой вариант).**

1. Вычислите ранг матрицы двумя способами: а) методом окаймления миноров; б) с помощью элементарных преобразований.

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Найдите среди векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4$  базис линейной оболочки  $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$  и координаты остальных векторов в этом базисе.

$$a_1 = (2; 2; 7; -1), a_2 = (3; -1; 2; 4), a_3 = (1; 1; 3; 1), \\ a_4 = (3; 3; 11; -3).$$

3. Доказать, что система векторов  $l_1, l_2, \dots, l_n$  образуют базис и найти координаты элемента  $x$  в этом базисе.

$$l_1 = (1; 1; 1), l_2 = (0; 1; 1), l_3 = (0; 0; 1), x = (1; 2; 3).$$

4. Исследовать систему на совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите фундаментальную систему решения и общее решение системы однородных линейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

### Индивидуальное задание 3 (у каждого студента свой вариант).

1. Даны векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Найти: 1)  $\bar{a} \cdot (\bar{b} - \bar{a})$ ; 2)  $|\bar{a}|$ ; 3)  $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{c}})$ , если  $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$ ; 4)  $\cos \beta$  для  $\bar{a}$ ; 5)  $|\bar{a} + \bar{b}|$ ; 6)  $\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}$ .

$$\vec{a} = (4; 5; 6), \vec{b} = (-2; -8; -6).$$

2. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Найти: а)  $\vec{a} \cdot 4\vec{b}$ ; б)  $\text{пр}_{\vec{a}}(2\vec{a} - 3\vec{b})$ ;

с)  $\cos\left(-\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a}\right)$ , если

$$\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}, \vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}, |\vec{m}| = 3, |\vec{n}| = 2, \left(\vec{m}, \vec{n}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{c} = \vec{a} + 4\vec{b} \text{ и } \vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}, \text{ если } |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ.$$

4. Даны вершины пирамиды ABCD: A (2, 1, 0); B (5, 3, 1); C (0, 1, 2); D (4, 3, 1). Найти:

- 1) площадь треугольника ABC, 2)  $\cos \angle DAB$ ,
  - 3) высоту  $\triangle ABC$ , опущенную из C на AB, 4) объем пирамиды ABCD,
  - 5) высоту пирамиды ABCD, опущенную из D на основание ABC.
5. Известны координаты вершин треугольника ABC: A (-3, -2); B (14, 4); C (6, 8).. Найти:

- 1) уравнения всех сторон в общем виде;
- 2) уравнения всех высот в общем виде ( $AN_1, BN_2, CN_3$ );
- 3) уравнения всех медиан в общем виде ( $AM_1, BM_2, CM_3$ );
- 4)  $\text{tg } A$ ;
- 5) уравнения прямых AE и  $AE_1$ , проходящих под углом  $45^\circ$  к AC;
- 6) точку  $B_1$ , симметричную точке B относительно AC;
- 7) расстояние от точки C до прямой AB;
- 8) уравнение прямой  $CC_1$ , проходящей параллельно AB;
- 9) уравнение прямой CS, если точка S такая, что  $\frac{BS}{SA} = 2$ ;
- 10) длину стороны AB; 11) длину медианы  $AM_1$

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую  $3x - 2y + z - 3 = 0, \quad x - 2z = 0$  перпендикулярно плоскости  $x - 2y + z + 5 = 0$ .

#### Индивидуальное задание 4 (у каждого студента свой вариант).

1. Являются ли следующие преобразования векторного пространства  $R^3$  линейными. Если преобразование линейное, то найдите его матрицу в стандартном базисе. Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

а)  $\varphi(x) = (x_1 + x_2; x_1 + x_2 - x_3; x_1 + x_2 + x_3)$ .

б)  $\varphi(x) = (x_1 + x_2; x_2 - x_3; x_3 - 1)$ .

2. Для линейного оператора  $\varphi$  найдите ядро и образ.

Пусть  $\varphi(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}$ , где  $\vec{a} = (1; 2; 3)$

3. Пусть  $\varphi$  имеет матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  в базисе  $a_1 = (1; 1)$ ,  $a_2 = (0; 1)$  и  $\psi$  имеет матрицу  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  в базисе  $b_1 = (1; 2)$ ,  $b_2 = (1; 1)$ . Найдите матрицу преобразования  $\varphi + \psi$  в базисе  $b_1, b_2$ .

5. Линейный оператор  $\varphi$  в базисе  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = x^2$  имеет матрицу  $A$ . Найдите матрицу оператора  $\varphi$  в базисе  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$ .

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_1(x) = 1 + x + x^2, g_2(x) = 1 + 3x + 2x^2$$

$$g_3(x) = x + x^2$$

5. Линейный оператор  $\varphi$  переводит базисные вектора  $e_1$  и  $e_2$  в элементы  $a_1$  и  $a_2$  соответственно. Найдите собственные значения и собственные вектора оператора  $\varphi$ .

$$a_1 = -2e_1 - e_2; a_2 = e_1$$

6. Найдите базис, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид. Если в некотором базисе матрица линейного оператора имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

—

#### IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п/п	Контролируемые разделы / темы	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства	
			текущий контроль	промежуточная

	<b>дисциплины</b>			<b>аттестация</b>	
1	Раздел 1, Тема 1, Тема 2 Раздел 2I, Тема 1, Тема 2 Раздел 3II, Тема 2, Тема 3 Раздел 4, Тема 1, Тема 2 Раздел 8, Раздел 9	ОК-4	Знает современные методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену 5,8 -40 (УО -1)
			Умеет использовать методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии для решения типовых математических задач в этой сфере и восприятия современных текстов по экономической теории	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену 1, 5,8 -40 (УО -1)
			Владеет методами и инструментарием линейной алгебры и аналитической геометрии для восприятия и использования достижений науки, техники в профессиональной сфере	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену (УО -1)
2	Раздел 1, Тема 1, Тема 2 Раздел 2I, Тема 1, Тема 2 Раздел 3II, Тема 2, Тема 3 Раздел 4, Тема 1, Тема 2 Раздел 8, Раздел 9	ОК-5	Знает методы, инструментарий и базовые результаты линейной алгебры и аналитической геометрии	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену (УО -1)
			Умеет использовать методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии для анализа количественных соотношений, решения систем линейных уравнений	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену (УО -1)
			Владеет специальными теоретическими и практическими методами линейной алгебры и аналитической	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену (УО -1)

			геометрии формализации экономической информации и ее анализа	для		
--	--	--	---	-----	--	--

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Разделе VIII.

## V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### Основная литература

*(электронные и печатные издания)*

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник. – Санкт-Петербург: Лань, 2015. НБ ДВФУ: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:777158&theme=FEFU>
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2004, НБ ДВФУ: <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:7030&theme=FEFU>.
3. Кремер Н.Ш., Фридман М.Н. Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата по экономическим специальностям. – Москва: Юрайт, 2015, 307с. НБ ДВФУ: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:790980&theme=FEFU>
4. Лившиц К.И. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для вузов. – Санкт-Петербург: Лань, 2017, 504 с. НБ ДВФУ: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:844739&theme=FEFU>
5. Малугин В.А., Рощина Я.А. Линейная алгебра для экономистов: учебник, практикум и сборник задач для академического бакалавриата по



экономическим направлениям и специальностям. – Москва: Юрайт, 2017, 478 с. НБ ДВФУ: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:841237&theme=FEFU>

6. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.М. Рудык. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 318 с.: 60x90 1/16. ISBN 978-5-16-004533-7 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/363158>.

### **Дополнительная литература**

*(электронные и печатные издания)*

7. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник для университетов и технических вузов. – Москва: Изд-во МГУ, 2015, 393 с. НБ ДВФУ: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:817753&theme=FEFU>

8. Епихин В.Е., Граськин. С.С. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: теория и решение задач: учебное пособие. – Москва: КноРус, 2013, 608 с. НБ ДВФУ: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:784080&theme=FEFU>

9. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие. – Санкт-Петербург: Лань, 2010, 475 с. НБ ДВФУ: <https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:305907&theme=FEFU>

10. Линейная алгебра в примерах и задачах: Учебное пособие / Бортаковский А.С., Пантелеев А.В., - 3-е изд., стер. - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) ISBN 978-5-16-010586-4 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/494895>

11. Юрченко Е.Г., Митченко А.Д. Линейная алгебра: метод. указания. – Владивосток: Издательский дом Дальневост. федерал. ун-та, 2012, 35 с. НБ ДВФУ: <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:678464&theme=FEFU>.

## Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронная библиотека и базы данных ДВФУ .  
<http://dvfu.ru/web/library/elib>
2. Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com>
3. Электронно-библиотечная система «Научно-издательского центра ИНФРА-М» <http://znanium.com>
4. Электронно-библиотечная система БиблиоТех.  
<http://www.bibliotech.ru>
5. Электронный каталог научной библиотеки ДВФУ <http://ini-fb.dvfu.ru:8000/cgi-bin/gw/chameleon>
6. Научная библиотека КиберЛенинка: <http://cyberleninka.ru/>

## Перечень информационных технологий и программного обеспечения

1. Microsoft Word
2. Microsoft Excel
3. Microsoft PowerPoint
4. Microsoft Publisher
5. КонсультантПлюс / Гарант
6. Microsoft Internet Explorer/ Mozilla Firefox/ Opera

## VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

### *Рекомендации по планированию и организации времени, отведенного на изучение дисциплины*

Планирование – важнейшая черта человеческой деятельности, один из характерных, обязательных признаков человеческого труда. Для организации сложной учебной деятельности очень эффективным является использование средств, напоминающих о стоящих перед нами задачах, их последовательности выполнения. Такими средствами могут быть мобильный

телефон, имеющий программу органайзера, включающего будильник, календарь и список дел; таймеры, напоминающие о выполнении заданий по дисциплине; компьютерные программы составления списка дел, выделяющие срочные и важные дела.

Составление списка дел – первый шаг к организации времени. Список имеет то преимущество, что позволяет видеть всю картину в целом. Упорядочение, классификация дел в списке – второй шаг к организации времени.

Регулярность – первое условие поисков более эффективных способов работы. Рекомендуется выбрать один день недели для регулярной подготовки по дисциплине. Регулярность не просто позволяет подготовиться к делу, она создает настрой на это дело, позволяет выработать правила выполнения дела (например, сначала проработка материала лекции, учебника, чтение первоисточника, затем выделение и фиксирование основных идей в тетради).

Чтобы облегчить выполнение заданий, необходимо определить временные рамки. Еженедельная подготовка по дисциплине «Математические методы и модели в экономике» требует временных затрат. Четкое фиксирование по времени регулярных дел, закрепление за ними одних и тех же часов – важный шаг к организации времени. При учете времени надо помнить об основной цели рационализации – получить наибольший эффект с наименьшими затратами. Учет – лишь средство для решения основной задачи: сэкономить время.

По мнению специалистов по психологии, важность планирования и выполнения дел обуславливается также тем, что у нас накапливаются дела, задачи или идеи, которые мы не реализуем, откладываем на потом – все это негативно сказывается на нашем внутреннем состоянии в целом.

Важная роль в организации учебной деятельности отводится программе дисциплины, дающая представление не только о тематической последовательности изучения курса, но и о затратах времени, отводимом на

изучение курса. Успешность освоения дисциплины во многом зависит от правильно спланированного времени при самостоятельной подготовке (в зависимости от специальности от 2 – 3 до 5 часов в неделю).

***Описание последовательности действий обучающихся (алгоритм изучения дисциплины)***

Начиная изучение дисциплины «Линейная алгебра», студенту необходимо:

- ознакомиться с программой, изучить список рекомендуемой литературы; к программе курса необходимо будет возвращаться постоянно, по мере усвоения каждой темы в отдельности, для того чтобы понять: достаточно ли полно изучены все вопросы;

- внимательно разобраться в структуре дисциплины «Линейная алгебра», в системе распределения учебного материала по видам занятий, формам контроля, чтобы иметь представление о курсе в целом, о лекционной и практической части всего курса изучения;

- переписать в тетрадь для лекций (на отдельной странице) и прикрепить к внутренней стороне обложки структуру и содержание теоретической части курса, а в тетрадь для практических занятий – темы практических (лабораторных) занятий.

При подготовке к занятиям по дисциплине «Линейная алгебра» необходимо руководствоваться нормами времени на выполнение заданий. Например, при подготовке к занятию на проработку конспекта одной лекции, учебников, как правило, отводится от 0,5 часа до 2 часов, а на изучение первоисточников объемом 16 страниц печатного текста с составлением конспекта 1,5–2 часа, с составлением лишь плана около 1 часа.

***Рекомендации по работе с литературой***

Наиболее предпочтительна потемная последовательность в работе с литературой. Ее можно представить в виде следующего примерного алгоритма:

- ознакомление с рабочей учебной программой и учебно-методическим комплексом дисциплины;
- изучение основной учебной литературы;
- проработка дополнительной (учебной и научной) литературы.

В ходе чтения очень полезно, хотя и не обязательно, делать краткие конспекты прочитанного, выписки, заметки, выделять неясные, сложные для восприятия вопросы. В целях прояснения последних нужно обращаться к преподавателю. По завершении изучения рекомендуемой литературы полезно проверить уровень своих знаний с помощью контрольных вопросов для самопроверки.

Настоятельно рекомендуется избегать механического заучивания учебного материала. Практика убедительно показывает: самым эффективным способом является не «зубрежка», а глубокое, творческое, самостоятельное проникновение в существо изучаемых вопросов.

Необходимо вести систематическую каждодневную работу над литературными источниками. Объем информации по курсу настолько обширен, что им не удастся овладеть в «последние дни» перед сессией, как на это иногда рассчитывают некоторые студенты.

Следует воспитывать в себе установку на прочность, долговременность усвоения знаний по курсу. Надо помнить, что они потребуются не только и не столько в ходе курсового зачета, но – что особенно важно – в последующей профессиональной деятельности.

Литература имеется в библиотеке университета.

При работе с учебной и научной литературой принципиально важно принимать во внимание момент развития. Студент обязан знать не только рекомендуемую литературу, но и новые, существенно важные издания по курсу, вышедшие в свет после его публикации.

### ***Рекомендации по подготовке к экзамену***

Итоговым контролем при изучении дисциплины «Линейная алгебра» является экзамен. Примерный перечень вопросов к экзамену содержится в

рабочей программе дисциплины. Непосредственно перед сессией вопросы могут обновляться. Обновленный перечень вопросов к экзамену выдается студентам перед началом экзаменационной сессии. На экзамене студенту предлагается ответить на два теоретических вопроса по изученным разделам дисциплины и решить практическую задачу. Цель экзамена – проверка и оценка уровня полученных студентом специальных познаний по учебной дисциплине, а также умения логически мыслить, аргументировать избранную научную позицию, реагировать на дополнительные вопросы, ориентироваться в массиве дефиниций и категорий. Оценке подлежит также и правильность речи студента. Дополнительной целью итогового контроля в виде экзамена является формирование у студента таких качеств, как организованность, ответственность, трудолюбие, самостоятельность. Таким образом, экзамен по дисциплине проверяет сложившуюся у студента систему знаний по данной дисциплине и играет большую роль в подготовке будущего специалиста, способствует получению фундаментальной и специальной подготовки в области математических методов и моделей и их применения к решению практических задач экономики и управления.

При подготовке к экзамену студент должен правильно и рационально распланировать свое время, чтобы успеть качественно и на высоком уровне подготовиться к ответам по всем вопросам. Экзамен призван побудить студента получить дополнительно новые знания. Во время подготовки к экзамену студенты также систематизируют знания, которые они приобрели при изучении разделов курса. Это позволяет им уяснить логическую структуру курса, объединить отдельные темы в единую систему, увидеть перспективы развития управления персоналом.

Рекомендуемые учебники и специальная литература при изучении курса, имеются в рекомендованном списке литературы в рабочей программе по данному курсу, также их называет студентам преподаватель на первой лекции.

Студент в целях получения качественных и системных знаний должен начинать подготовку к экзамену задолго до его проведения, лучше с самого начала лекционного курса. Для этого, как уже отмечалось, имеются в учебно-методическом пособии примерные вопросы к экзамену. Целесообразно при изучении курса пользоваться рабочей программой и учебно-методическим комплексом.

Самостоятельная работа по подготовке к экзамену во время сессии должна планироваться студентом, исходя из общего объема вопросов, вынесенных на экзамен и дней, отведенных на подготовку к экзамену. При этом необходимо, чтобы последний день или часть его, был выделен для дополнительного повторения всего объема вопросов в целом. Это позволяет студенту самостоятельно перепроверить уровень усвоения материала. Важно иметь в виду, что для целей воспроизведения материала учебного курса большую вспомогательную роль может сыграть информация, которая содержится в рабочей программе курса.

### ***Рекомендации по самостоятельной работе студентов***

Организация и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов (СРС)

1. Текущая и опережающая СРС, направленная на углубление и закрепление знаний, а также развитие практических умений заключается в:

- работе студентов с лекционным материалом, поиске и анализе учебной литературы и электронных источников информации по изучаемым темам дисциплины;
- выполнении домашних индивидуальных заданий;
- изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, активное участие в их обсуждении на занятиях;
- изучении теоретического материала тем практических занятий;
- освоении технологий взаимодействия с заданными интернет-ресурсами и их использования для решения практических задач;
- подготовке к экзамену.

## **VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мультимедийным проектором.

Для проведения практических занятий - аудитория, оснащенная мультимедийным проектором, большой доской для демонстрации всех этапов решения практических задач.

В читальных залах Научной библиотеки ДВФУ предусмотрены рабочие места для людей с ограниченными возможностями здоровья, оснащены дисплеями и принтерами Брайля; оборудованные портативными устройствами для чтения плоскочечатных текстов, сканирующими и читающими машинами, видеоувелечителем с возможностью регуляции цветовых спектров; увеличивающими электронными лупами и ультразвуковыми маркировщиками.

В целях обеспечения специальных условий обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ДВФУ все здания оборудованы пандусами, лифтами, подъемниками, специализированными местами, оснащенными туалетными комнатами, табличками информационно-навигационной системы.

## **VIII. ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

### **Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Линейная алгебра»**

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
<b>ОК-4</b> способность творчески воспринимать и использовать достижения науки, техники в профессиональной сфере в	знает	современные методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии



соответствии с потребностями регионального и мирового рынка труда (формируется частично)	умеет	использовать методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии для решения типовых математических задач в этой сфере и восприятия современных текстов по экономической теории
	владеет	методами и инструментарием линейной алгебры и аналитической геометрии для восприятия и использования достижений науки, техники в профессиональной сфере
<b>ОК-5</b> способность использовать современные методы и технологии (в том числе информационные) в профессиональной деятельности (формируется частично)	знает	методы, инструментарий и базовые результаты линейной алгебры и аналитической геометрии
	умеет	использовать методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии для анализа количественных соотношений, решения систем линейных уравнений
	владеет	специальными теоретическими и практическими методами линейной алгебры и аналитической геометрии для формализации экономической информации и ее анализа

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства	
			текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Раздел 1, Тема 1, Тема 2 Раздел 2I, Тема 1, Тема 2 Раздел 3II, Тема 2, Тема 3 Раздел 4, Тема 1, Тема 2 Раздел 6, Раздел 8,	ОПК-16 Знает теоретические основы широко используемых математических методов и прикладных экономико-математических моделей, возможности их применения для решения конкретных экономических задач	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену 5,8 -40 (УО -1)
		Умеет применять количественные и качественные методы анализа при принятии управленческих решений и решении конкретных экономических задач	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену 1, 5,8 -40 (УО -1)

	Раздел 9		Владеет навыками анализировать социально-экономические проблемы и процессы с применением математических методов и математического моделирования	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену (УО -1)
2	Раздел 1, Тема 1, Тема 2 Раздел 2I, Тема 1, Тема 2 Раздел 3II, Тема 2, Тема 3 Раздел 4, Тема 1, Тема 2 Раздел 5, Раздел 7,  Раздел 8, Раздел 9	ПК-32	Знает основные этапы и методы формализации прикладных задач и математического моделирования экономических ситуаций	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену (УО -1)
			Умеет формализовать задачу исследования, выбрать метод решения проблемы и построить математическую модель	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену (УО -1)
			Владеет навыками формулирования простейших прикладных экономико-математических моделей и методами их решения	конспект (ПР-7); контрольная работа 1-3 (ПР-2); ИДЗ 1-6 (ПР-13, ПР-15)	Вопросы к экзамену (УО -1)

### Шкала оценивания уровня сформированности компетенций по дисциплине «Линейная алгебра»

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		Критерии	Показатели
<b>ОК-4</b> способность творчески воспринимать и использовать достижения науки, техники в профессиональной сфере в соответствии с	знает (пороговый уровень)	современные методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии	Знание основных понятий и теорем линейной алгебры и аналитической геометрии и их применение к конкретной экономической ситуации	– способность использовать методы и модели математики линейной алгебры и аналитической геометрии для решения экономических задач; – способность применить теоретических знаний к решению конкретных задач

<p>потребностями регионального и мирового рынка труда (формируется частично)</p>	<p>умеет (продвинутой)</p>	<p>использовать методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии для решения типовых математических задач в этой сфере и восприятия современных текстов по экономической теории</p>	<p>Умение применить методы линейной алгебры и аналитической геометрии для решения конкретной экономической задачи</p>	<p>– способность обработать исходную информацию с помощью методов линейной алгебры и аналитической геометрии; – способность решить конкретную задачу и экономически обосновать полученное решение</p>
	<p>владеет (высокий)</p>	<p>методами и инструментарием линейной алгебры и аналитической геометрии для восприятия и использования достижений науки, техники в профессиональной сфере</p>	<p>Владение методами решения задач линейной алгебры и аналитической геометрии; владение методами математического описания экономических процессов;</p>	<p>– способность выбрать метод решения конкретной экономической задачи посредством линейной алгебры, проанализировать полученные результаты и обосновать полученные выводы, сделать прогноз</p>
<p><b>ОК-5</b> способность использовать современные методы и технологии (в том числе информационные) в профессиональной деятельности (формируется частично)</p>	<p>знает (пороговый уровень)</p>	<p>методы, инструментарий и базовые результаты линейной алгебры и аналитической геометрии</p>	<p>Знает инструментарий линейной алгебры для использования в экономических исследованиях бизнес-процессов</p>	<p>– способен применить выбранный инструментарий для решения конкретной задачи</p>
	<p>умеет (продвинутой)</p>	<p>использовать методы и инструментарий линейной алгебры и аналитической геометрии для анализа количественных соотношений, решения систем линейных уравнений</p>	<p>Умение осуществлять сбор, анализ и обработку экспериментальных данных для решения конкретных задач</p>	<p>– способность обработать исходную информацию с помощью математических методов; – способность решить конкретную задачу и экономически обосновать полученное решение</p>
	<p>владеет (высокий)</p>	<p>специальными теоретическими и практическими методами линейной алгебры и аналитической геометрии для формализации экономической информации и ее анализа</p>	<p>Владение методами решения задач линейной алгебры; владение методами математического описания экономических процессов</p>	<p>– способность выбрать математические и инструментальные средства для обработки экономических данных, проанализировать полученные результаты и обосновать полученные выводы, сделать прогноз</p>

## Оценочные средства для проверки сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Задание
ОК-4 способностью творчески воспринимать и использовать достижения науки, техники в профессиональной сфере в соответствии с потребностями регионального и мирового рынка труда	1. Пусть определитель матрицы $A$ равен 7. Существует ли обратная матрица для матрицы $A$ и чему равен ее определитель? 2. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$
ОК-5 способностью использовать современные методы и технологии (в том числе информационные) в профессиональной деятельности	1. Линейный оператор $\varphi$ переводит базисные вектора $e_1$ и $e_2$ в элементы $a_1$ и $a_2$ соответственно. Найдите собственные значения и собственные вектора оператора $\varphi$ . $a_1 = 2e_1 + 5e_2; a_2 = 4e_1 + 3e_2$ 2. Пусть матрица линейного преобразования в базисе $e_1, e_2$ имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$ Найдите размерность и базис ядра данного преобразования.

### Зачетно-экзаменационные материалы

(оценочные средства по промежуточной аттестации и критерии оценки)

#### Вопросы к экзамену

1. Матрицы и операции над ними. Доказательство свойства дистрибутивности.
2. Леммы об умножении матриц на трансвекцию и диагональную матрицу.
3. Определитель матрицы размерности  $n$ . Теорема основная для определителя.
4. Свойства определителей.
5. Теорема о разложении матрицы в произведение нескольких трансвекций и диагональной матрицы.
6. Теорема о равносильности условий для существования обратной матрицы.

7. Теорема об определителе произведения двух квадратных матриц.
8. Система линейных уравнений. Основные понятия и матричная запись.
9. Теорема о существовании решения невырожденной системы линейных уравнений (формулы Крамера)
10. Теорема о формуле для вычисления обратной матрицы.
11. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.
12. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
13. Линейное пространство. Простейшие свойства линейных пространств.
14. Линейная зависимость векторов. Равносильность двух определений.
15. Базис пространства. Теорема об операциях сложении и умножении на число в линейном пространстве с фиксированным базисом.
16. Размерность линейного пространства. Теорема о  $n$  линейно независимых элементах в пространстве размерности  $n$ .
17. Ранг матрицы. Способы вычисления ранга матрицы.
18. Теорема о базисном миноре. Теорема о равенстве нулю определителя матрицы.
19. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы.
20. Линейные подпространства. Примеры.
21. Теорема о размерности линейного пространства, в котором имеется базис из  $n$  элементов.
22. Однородная система линейных уравнений. Множество ее решений. Связь решений однородной и неоднородной систем.
23. Фундаментальная система решений однородной системы. Теорема о способе построения ФСР.
24. Линейные операции над векторами и их свойства. Проекция вектора.
25. Разложение вектора по ортам. Направляющие косинусы вектора.
26. Скалярное произведение векторов.
27. Деление отрезка в данном отношении.
28. Векторное произведение векторов. Свойства.

29. Векторное произведение векторов в координатной форме.
30. Смешанное произведение векторов. Свойства.
31. Уравнение прямой на плоскости.
32. Полярная система координат. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.
33. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
34. Нормальное и общее уравнения плоскости.
35. Связка плоскостей. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости в отрезках.
36. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
37. Прямая линия в пространстве. Параметрическое, каноническое и общее уравнения прямой.
38. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
39. Прямая и плоскость.
40. Линейные операторы. Матрица линейного преобразования.
41. Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису.
42. Ядро и образ линейного оператора.
43. Теорема о размерностях ядра и образа линейного преобразования.
44. Операции над линейными операторами.
45. Теорема о матрицах суммы и произведения линейных преобразований.
46. Теорема о равносильности условий для невырожденного преобразования.
47. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные числа и вектора линейного оператора.
48. Теоремы о диагональном виде матрицы линейного оператора.
49. Теорема Гамильтона-Кэли о корне характеристического многочлена.

50. Евклидово пространство. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского.
51. Теорема об ортонормированном базисе в евклидовом пространстве.
52. Нормированные пространства. Свойства.
53. Процесс ортогонализации системы независимых векторов.
54. Понятие квадратичной формы. Матрица, дискриминант и ранг квадратичной формы.
55. Канонический вид квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
56. Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции действительной квадратичной формы.
57. Знакоопределенные и знакопеременные квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.
58. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогональных преобразований (приведение квадратичной формы к главным осям).

### Задачи на экзамен

1. Верно ли равенство  $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$ , обоснуйте, приведите доказательство, где  $(A)^T$  – операция транспонирования матриц.

2. Пусть  $A$  – квадратная матрица размерности 4. Что произойдет с матрицей  $A$ , если рассмотреть матрицу:

$$T_{13}(3) \cdot A \cdot T_{24}(5),$$

где  $T_{ij}(a)$  – трансвекция порядка 4.

3. Докажите, что определитель верхнетреугольной матрицы  $A$  ( $a_{ij} = 0$ , если  $i > j$ ) равен произведению диагональных элементов  $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ .

4. Как изменится определитель порядка  $n$ , если:

а) у всех его элементов изменить знак на противоположный;

б) его первый столбец поставить на последнее место, а остальные столбцы сдвинуть влево, сохраняя их расположение.

5. Разложите матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  в виде произведения диагональной матрицы и нескольких трансвекций.

6. Пусть определитель матрицы  $A$  равен 7. Существует ли обратная матрица для матрицы  $A$  и чему равен ее определитель?

7. Найдите определитель матрицы  $X$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $|B| = 12$  и  $AX = B$ .

8. Система  $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bx + cy = a \end{cases}$  имеет единственное решение. Докажите, что  $abc \neq 0$ .

9. Решите систему линейных уравнений  $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bx + cy = a \end{cases}$ , если  $abc \neq 0$ .

10. Если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Существует ли обратная матрица для матрицы  $A$ ? Если да, то вычислите ее.

11. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Ответ:  $x_1 = 3, x_2 = x_3 = 1$ .

12. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -9 \\ 2x_1 + 3x_2 = -6 \end{cases}$$

13. Является ли множество квадратных матриц второго порядка вида:

а)  $\{A = (a_{ij}) \mid a_{11} + a_{22} = 1\}$

б)  $\{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = -a_{ji}\}$



$$в) \{A = (a_{ij}) \mid \text{tr}A = a_{11} + a_{22} = 0\}$$

линейным пространством.

14. Покажите, что если система векторов  $e_1, \dots, e_n$  содержит нулевой вектор, то она будет линейно зависимой.

15. Докажите, что  $e_1, e_2, e_3$  – образуют базис в  $R^3$  и найдите координаты вектора  $x$  в этом базисе:

$$e_1 = (1; 1; 1), e_2 = (1; 1; 2), e_3 = (1; 2; 3), x = (6; 9; 14).$$

16. Найдите базис в пространстве матриц квадратных порядка 2  $A = (a_{ij})$  таких, что  $a_{ij} = a_{ji}$ .

17. Найдите все значения  $\lambda$ , при которых вектор  $b$  линейно выражается через векторы  $a_1, a_2, a_3$ .

$$a_1 = (3; 2; 6), a_2 = (5; 1; 3), a_3 = (7; 3; 9), b = (\lambda; 2; 5).$$

18. Выясните, является ли следующая система векторов линейно независимой:

$$a_1 = (2; -3; 1), a_2 = (3; -1; 5), a_3 = (1; -4; 3).$$

19. Найдите размерность линейной оболочки векторов:

$$a_1 = (1; 2; 3; 4), a_2 = (2; 3; 4; 5), a_3 = (3; 4; 5; 6), a_4 = (4; 5; 6; 7).$$

20. В пространстве многочленов степени  $\leq 3$  рассматривается множество многочленов с дополнительным условием  $f(0) = 0$ . Является ли это множество линейным пространством. Если да, то какова его размерность.

21. Образуют ли вектора  $a_1, a_2, a_3$  базис в пространстве  $R^3$ .

$$a_1 = (0; 2; -1), a_2 = (3; 7; 1), a_3 = (2; 0; 3).$$

22. Линейное преобразование  $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе. Найдите  $\text{Ker } \varphi$ .

23. Пусть матрица линейного преобразования в базисе  $e_1, e_2$  имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найдите размерность и базис ядра данного преобразования.

24. В треугольнике ABC точка M середина стороны AB. Найдите вектор  $\overrightarrow{CM}$ , если  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ .

25. Определить и построить вектор  $c = \vec{a} \times \vec{b}$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$ , где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты.

26. Вычислить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$ , где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты.

27. Даны точки  $A = (2; 4; -2)$ ,  $B = (-2; 4; 2)$ . На прямой AB найти точку M, которая делит отрезок AB в отношении  $\lambda = 3$ .

28. Вектор составляет с осями OY и OZ углы  $60^\circ$  и  $120^\circ$ . Какой угол он составляет с осью OX?

29. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (6; 3; -2)$ ,  $\vec{b} = (3; -2; 6)$ .

30. Найдите объем треугольной пирамиды с вершинами  $A = (2; 2; 2)$ ,  $B = (4; 3; 3)$ ,  $C = (4; 5; 4)$ ,  $D = (5; 5; 6)$ .

31. Составить уравнение медианы AE в треугольнике с вершинами

$$A = (-2; 0), B = (2; 4), C = (4; 0).$$

32. Найти расстояние от точки  $A = (9; -11)$  до прямой  $5x - 6y + 11 = 0$ .

33. Найти проекцию точки  $A = (10; 14)$  на прямую  $l: 4x + 3y - 7 = 0$ .

Ответ:  $P = (-2; 5)$ .

34. Через точку  $M(-1; 2; 3)$  проведена плоскость, перпендикулярная радиус-вектору  $\overrightarrow{OM}$ . Напишите ее уравнение.

Ответ:  $x - 2y - 3z - 14 = 0$ .

35. Найдите нормальный вектор плоскости, проходящей через точки

$$M_1 = (1; -1; 2), M_2 = (2; 1; 2) \text{ и } M_3 = (1; 1; 4).$$

Ответ:  $\vec{N} = (2; -1; 1)$ .

36. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1 = (-1; -2; 0)$ ,  $M_2 = (1; 1; 2)$  и перпендикулярной к плоскости  $x + 2y + 2z - 4 = 0$ .

Ответ:  $2x - 2y + z - 2 = 0$ .

37. Для уравнения прямой

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$$

записать каноническое уравнение прямой.

Ответ:  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-1}$

38. Найти угол прямой:

$$\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -2z + 1 \end{cases}$$

с прямой, проходящей через начало координат и точку  $(1; -1; -1)$ .

Ответ:  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

39. Найдите точку пересечения прямой  $x = 2t - 1$ ,  $y = t + 2$ ,  $z = 1 - t$  с плоскостью  $3x - 2y + z = 3$ .

Ответ:  $(5; 5; -2)$ .

40. Являются ли линейными следующие отображения:

а)  $\forall x \in R^3, x = (x_1, x_2, x_3) \quad \varphi(x) = (x_2, x_3, x_1 + 2x_2)$

б)  $\varphi(x) = (x_1, x_1 + x_2, x_3 + 1)$

в)  $\forall A$  – матрицы квадратной размерности  $n$

$\varphi(A) = A^T$  – операция трансформирования матриц.

41. Матрица линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2$  имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу линейного оператора в базисе  $e'_1 = 2e_1 - e_2$ ,

$e'_2 = -3e_1 + 2e_2$ .

42. Пусть  $\varphi$  линейный оператор  $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ , действующий на вектор  $x = (x_1, x_2)$  следующим образом  $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2; x_2 - 2x_1)$ .

Найдите матрицу линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $a_1 = (1; 1)$ ,  $a_2 = (1; 2)$ .

43. Найдите размерность и базис ядра и образа линейного оператора  $\varphi$ , который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

44. Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  линейные преобразования  $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ ,  $\psi: R^3 \rightarrow R^3$  такие, что  $\varphi(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 - x_1)$ ,  $\psi(x) = (x_1 + x_2 - x_3, x_2 + x_3 - x_1, x_2 + x_3)$  для любого вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Найдите матрицу линейного оператора  $\varphi \cdot \psi$  в стандартном базисе.

45. Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  линейные преобразования  $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ ,  $\psi: R^3 \rightarrow R^3$  такие, что  $\varphi(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 - x_1)$ ,  $\psi(x) = (x_1 + x_2 - x_3, x_2 + x_3 - x_1, x_2 + x_3)$  для любого вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Найдите матрицу линейного оператора  $\varphi + \psi$  в стандартном базисе.

46. Является ли преобразование  $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$  такое, что  $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2, x_2)$  для любого  $x = (x_1, x_2)$  невыраженным.

47. Линейный оператор  $\varphi$  задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе  $e_1, e_2, e_3$ . Выяснить является ли вектор  $x = e_1 + e_2 + 2e_3$  собственным вектором этого линейного оператора.

48. Линейный оператор в базисе  $e_1, e_2$  задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис в котором линейный оператор имеет диагональную матрицу.

49. Найдите все собственные векторы и собственные значения линейного оператора  $\varphi$ , заданного в некотором базисе матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

50. Проверьте является ли функция заданная на множестве квадратных матриц размерности 2 вида:

$$f(A, B) = \text{tr}(A^T B)$$

скалярным произведением.

51. Определите значения параметра  $\lambda$ , при котором вектора  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1; \lambda; 2)$ ,  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1; -1; \lambda)$  ортогональны и входят в ортогональный базис пространства  $R^3$ .

52. Может ли в пространстве матриц квадратных порядка 2 в качестве нормы элемента  $A$  выступать функция  $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ .

53. В линейной оболочке векторов  $a_1 = (1; 2; 1; 0)$ ,  $a_2 = (2; 1; 4; -5)$  постройте ортонормированный базис.

### Критерии оценки студента на экзамене по дисциплине

#### «Линейная алгебра»

#### (промежуточная аттестация – экзамен)

Баллы (рейтинговая оценка)	Оценка экзамена (стандартная)	Требования к сформированным компетенциям
86-100	«отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических

		задач.
76-85	<i>«хорошо»</i>	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.
75-61	<i>«удовлетворительно»</i>	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при ответах на дополнительные вопросы.
менее 61	<i>«неудовлетворительно»</i>	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

**Оценочные средства для текущей аттестации ( типовые ОС по  
текущей аттестации и критерии оценки по каждому виду  
аттестации по дисциплине «Линейная алгебра»)**

**Контрольная работа** является формой контроля усвоения студентами практической части курса. Выполняется студентами во время практических занятий по завершению изучения практической части разделов курса. Контрольная работа сдается преподавателю на проверку и оценивается в форме дифференцированного зачета.

Контрольная работа считается выполненной успешно при получении оценок «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно». При получении оценки «неудовлетворительно» контрольная работа считается не сданной, а соответствующий раздел практикума неусвоенным.

Студенту предоставляется возможность пересдать контрольную работу один раз во время консультаций по дисциплине с получением оценки на один балл ниже.

### **Вопросы, выносимые на контрольные работы**

**Контрольная работа №1** предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонент курса (в соответствии с программой):

1. Умножение матриц. Вычисление определителей.
2. Вычисление обратной матрицы.
3. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

**Контрольная работа №2** предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонент курса (в соответствии с программой):

1. Вычисление ранга матриц.
2. Нахождение общего решения систем линейных уравнений.

**Контрольная работа №3** предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонент курса (в соответствии с программой):

1. Линейные пространства.
2. Линейные преобразования и их матрицы.
3. Евклидовы пространства.

### **Критерии оценки контрольной работы**

Оценка	Описание
<i>Отлично / зачтено</i>	Задания выполнены полностью и абсолютно правильно.
<i>Хорошо / зачтено</i>	Задания выполнены полностью и правильно, но решение содержит некоторые неточности и несущественные ошибки.
<i>Удовлетворительно / зачтено</i>	Задания выполнены не полностью, с существенными ошибками, но подход к решению, идея решения, метод правильны.

<i>Неудовлетворительно / незначительно</i>	Задания не выполнены или задания выполнены частично (менее 50 процентов), имеются грубые ошибки.
--	--

Типовые оценочные средства по текущей аттестации по дисциплине «Линейная алгебра» размещены в разделе рабочей учебной программы дисциплины «Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся».

### **Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины**

**Текущая аттестация студентов.** Текущая аттестация студентов по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в форме контрольных мероприятий (контрольные работы, индивидуальные практические задания, общие практические задания) по оцениванию фактических результатов обучения студентов и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

– учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);

– степень усвоения теоретических знаний (активность в ходе обсуждений материалов лекций, активное участие в дискуссиях с аргументами из дополнительных источников, внимательность, способность задавать встречные вопросы в рамках дискуссии или обсуждения, заинтересованность изучаемыми материалами);

– уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы (определяется по результатам контрольных работ,



практических занятий, ответов на тесты);

– результаты самостоятельной работы (задания и критерии оценки размещены в Разделе II).

**Промежуточная аттестация студентов.** Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

**Вид промежуточной аттестации – экзамен** (1 семестр), состоящий из устного опроса в форме собеседования и индивидуального практического задания (в экзаменационный билет включаются два теоретических вопроса и практическая задача).

**Краткая характеристика процедуры применения используемого оценочного средства.** В результате посещения лекций, практических занятий студент последовательно осваивает материалы дисциплины и изучает ответы на вопросы к зачету, представленные в структурном элементе ФОС IV.1. В ходе промежуточной аттестации студент готовит индивидуальные практические задания и выполняет три контрольные работы (индивидуальные практические задания размещены в структурном элементе ФОС IV.2). Критерии оценки студента на экзамене представлены в структурном элементе ФОС IV.3.