



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

«СОГЛАСОВАНО»  
Руководитель ОП

Саранин А. А.  
(подпись) (Ф.И.О. рук.ОП)  
« 19 » сентября 2018 г.

«УТВЕРЖДАЮ»  
Заведующий кафедрой  
физики низкоразмерных структур  
(название кафедры)



Саранин А. А.  
(подпись) (Ф.И.О. зав. каф.)  
« 19 » сентября 2018 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Дополнительные главы кристаллографии

**Направление подготовки 11.04.04 «Электроника и наноэлектроника»**

магистерская программа "Нанотехнологии в электронике"

**Форма подготовки: очная**

курс 1 семестр 2

лекции     час.

практические занятия     час.

лабораторные работы 54 час.

в том числе с использованием МАО лек.     /пр.     /лаб.     час.

всего часов аудиторной нагрузки 54 час.

в том числе с использованием МАО     час.

самостоятельная работа 54 час.

в том числе на подготовку к экзамену     час.

контрольные работы (количество)    

курсовая работа / курсовой проект     семестр

зачет 2 семестр

экзамен     семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования, самостоятельно устанавливаемого ДВФУ, утвержденного приказом ректора от 13.06.2017 № 12-13-1206.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры физики низкоразмерных структур, протокол № 1 от « 27 » сентября 2018 г.

Заведующий (ая) кафедрой Саранин А.А.

Составитель (ли): к.ф.-м.н., профессор Крайнова Г. С.

**Оборотная сторона титульного листа РПУД**

**I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

**II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:**

Протокол от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)

## ABSTRACT

**Master's degree in 11.04.04 Electronics and Nanoelectronics**

**Course title: Additional chapters of crystallography**

**Basic part of Block, 3 credits**

### **Instructor:**

Kraynova G.S., Cand. of Phys. and math., Professor of the Physics of low-dimensional structures department, School of Natural Sciences of Far Eastern Federal University.

### **Learning outcomes:**

PC-12, ability to develop technical specifications for the design of technological processes of materials and electronic products.

**Course description:** the purpose of this course is the formation of students' ideas about the periodic and quasi-periodic structures at the atomic level; mastering the combinative approach to the study of various forms of crystalline matter, the necessary methods for the study of crystalline polyhedra and structures.

### **Course objective:**

- \* to give an idea of modern problems of crystallography, symmetry as invariance, self-equality of objects;
- \* to formulate the main principles of crystal structure formation; \* develop the ability to work with quasi-periodic and modulated structures;
- \* familiarization with the basic concepts of geometric crystallography, crystallochemistry, crystallophysics;
- \* ability to describe crystals using the laws of crystallography.

### **Main course literature:**

1. R. P. Dikareva. Introduction to crystallography // M: Science, 2007. - 240 p.  
<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:269126&theme=FEFU>

2. Yu. K. Egorov-Tismenko . Crystallography and crystal chemistry : a textbook for high schools / under the editorship of V. S. Urusov]. M: Moscow State University, 2014. - 587 p.

<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:734049&theme=FEFU>

3. Belov N. P., Prokoptseva O. K., A. D. Yaskov. The Basics of crystallography and kristalofiziki. Part I. introduction to the theory of crystal symmetry: a Training manual. – S-Pb: SPbSU ITMO, 2009.- 43 p.

<http://window.edu.ru/resource/335/63335>

4. Trushin V. N., Andreev P. V., Faddeev M. A. x-ray phase analysis of polycrystalline materials. Electronic educational and methodical manual. - Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod state University, 2012.-89 p.

<http://window.edu.ru/resource/210/79>

5. E. E. Lord, A. L. Mackay, S. Ranganathan. New geometry for new materials // Per. with ang. ed. V. ya. Shevchenko, V. E. Dmitrienko, M: Fizmatlit, 2010, 260 p.

<https://e.lanbook.com/book/48204>

**Form of final knowledge control: credit.**

## АННОТАЦИЯ

Рабочая программа предназначена для студентов подготовки магистров по образовательной программе «Электроника и наноэлектроника», «Нанотехнологии в электронике», общая трудоемкость дисциплины 3 зачетных единицы (108 часов).

Учебным планом предусмотрены 54 часа лабораторных работ, самостоятельная работа студента (54 часа). Дисциплина «Дополнительные главы кристаллографии» входит в вариативную часть образовательной программы в блок цикла дисциплин по выбору, модуль «Строение и свойства материалов», реализуется на 1-м курсе, в 2-м семестре.

**Цель** – формирование у студентов представлений о периодической и квазипериодической структурах на атомном уровне; овладение комбинативным подходом к изучению различных форм кристаллического вещества, необходимыми методами исследования кристаллических многогранников и структур.

### **Задачи:**

- дать представление о современных проблемах кристаллографии, симметрии как инвариантности, саморавенстве объектов;
- сформулировать главные принципы структурообразования кристаллов;
- сформировать умение работать с квазипериодическими и модулированными структурами;
- ознакомление с базовыми понятиями геометрической кристаллографии, кристаллохимии, кристаллофизики;
- умение описывать кристаллов с помощью законов кристаллографии.

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие общекультурные и профессиональные компетенции.

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ПК-12, способность разрабатывать технические задания на проектирование технологических процессов производства материалов и изделий электронной техники	Знает	<ul style="list-style-type: none"> <li>- основные законы кристаллографии, точечные и трансляционные элементы симметрии, правила сложения элементов симметрии</li> <li>- связь внутренней кристаллической решетки с внешней формой кристаллов и их свойствами</li> <li>- установку и последовательность определения элементов симметрии кристаллов</li> <li>- правила работы с научной литературой по кристаллографии, кристаллохимии, кристаллофизики</li> <li>-</li> </ul>
	Умеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>- составлять кристаллографическую характеристику кристаллов, диагностировать простые формы</li> <li>- обозначать виды симметрии (точечные группы) полными формулами и с помощью порождающих элементов симметрии</li> <li>- анализировать внутреннюю структуру кристаллов</li> </ul>
	Владеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками кристаллографического анализа</li> <li>- методами расшифровки и выводом федоровских групп</li> <li>- методами представления кристаллических структур для проектирования производства новых материалов</li> </ul>

## I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

### Лабораторные работы (54 часов)

**Блок №1. Основные понятия кристаллографической геометрии (12 часов).**

1. Подбор и изучение теоретического материала по темам блока 1.
2. Постановка задач, определение порядка выполнения заданий практической части. Обработка результатов выполненных заданий.
3. Формулировка описательной части, формулировка выводов, составление отчета.
4. Защита лабораторной работы: сдача краткой теории по теме работы, объяснение экспериментальных результатов.

### **Вопросы блока 1:**

- 1).  $(r, R)$  – системы точек. Теорема о локальной правильности системы точек.
- 2). Разбиение пространства и методы их описания. Разбиение евклидовой плоскости – теория планигонов. Теория параллелоэдров и стереоэдров.
- 3). Непериодические разбиения. Мозаики Пенроуза.
- 4). Описание квазикристаллов и квазипериодических структур.

### **Блок №2. Внутреннее строение кристаллов (16 часов).**

1. Подбор и изучение теоретического материала по темам блока 2.
2. Постановка задач, определение порядка выполнения заданий практической части. Обработка результатов выполненных заданий.
3. Формулировка описательной части, формулировка выводов, составление отчета.
4. Защита лабораторной работы: сдача краткой теории по теме работы, объяснение экспериментальных результатов.

### **Вопросы блока 2:**

- 1). Пространственная решетка. Системы координатных осей. Понятие кристаллографической зоны. Уравнение зоны.
- 2). Понятие кристаллографического и полярного комплексов. Стереографическая проекция. Сетка Вульфа и приемы работы с ней.
- 3). Симметрия кристаллов. Преобразование координат при повороте вокруг оси. Преобразования координат при зеркальном отражении, инверсии.
- 4). Сложение элементов симметрии. Основные понятия теории групп.
- 5). Точечные группы симметрии.

б). Трансляционные группы. Группы Браве. Открытые симметричные преобразования. Сочетания трансляций и точечных элементов симметрии.

**Блок №3. Грамматика формы и ее связь с кристаллографией (12 часов).**

1. Подбор и изучение теоретического материала по темам блока 3.
2. Постановка задач, определение порядка выполнения заданий практической части. Обработка результатов выполненных заданий.
3. Формулировка описательной части, формулировка выводов, составление отчета.
4. Защита лабораторной работы: сдача краткой теории по теме работы, объяснение экспериментальных результатов.

**Вопросы блока 3:**

- 1). Структурно-кристаллографические разновидности простых форм.
- 2). Связь между структурой и внешней формой кристаллов. Простые формы кристаллов в классах низшей и средней категорий.
- 3). Простые формы кристаллов в классах высшей категории – кубической сингонии.

**Блок №4. Основы кристаллохимии (14 часов).**

1. Подбор и изучение теоретического материала по темам блока 4.
2. Постановка задач, определение порядка выполнения заданий практической части. Обработка результатов выполненных заданий.
3. Формулировка описательной части, формулировка выводов, составление отчета.
4. Защита лабораторной работы: сдача краткой теории по теме работы, объяснение экспериментальных результатов.

**Вопросы блока 4:**

- 1). Атомно-молекулярные модели роста кристаллов.

- 2). Основы кристаллохимии.
- 3). Координация атомов и ионов в структурах кристаллов. Координационные полиэдры.
- 4). Плотнейшие упаковки.
- 5). Изображение кристаллических структур. Типы структур. Изоморфизм в структурах. Полиморфизм, политипизм и псевдоморфизм в кристаллах.

## **II. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Дополнительные главы кристаллографии» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

## **III. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА**

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Блок 1. Основные понятия кристаллографической геометрии	ПК-12	знает	Лабораторная работа 1 (ПР-6)	зачет, вопросы 1-4 Собеседование (УО-1)
			умеет	Отчет по лабораторной работе (ПР-6)	зачет, защита лабораторной работы Собеседование (УО-1)
			владеет	Собеседование (УО-1)	зачет, защита практических заданий

					Собеседование (УО-1)
2	Блок 2. Внутреннее строение кристаллов	ПК-12	знает	Лабораторная работа 2 (ПР-6) Тест 1 (ПР-1)	зачет, вопросы 5-10 Собеседование (УО-1)
			умеет	Коллоквиум 1 (УО-2) Домашнее задание (УО-1)	зачет, защита коллоквиума, домашнего задания Собеседование (УО-1)
			владеет	Контрольная работа 1, 2 (ПР-2)	зачет, защита контрольных работ Собеседование (УО-1)
3	Блок 3. Грамматика формы и ее связь с кристаллографией	ПК-12	знает	Лабораторная работа 3 (ПР-6)	зачет, вопросы 11-13 Собеседование (УО-1)
			умеет	Домашнее задание (ПР-6)	зачет, защита домашнего задания Собеседование (УО-1)
			владеет	Собеседование (УО-1)	зачет, защита практических заданий Собеседование (УО-1)
4	Блок 4. Основы кристаллохимии	ПК-12	знает	Лабораторная работа 4, 5 (ПР-6)	зачет, вопросы 14-18 Собеседование (УО-1)
			умеет	Коллоквиум 2 (УО-2)	зачет, защита коллоквиума Собеседование (УО-1)
			владеет	Контрольная работа (ПР-2)	зачет, защита контрольной работы Собеседование (УО-1)

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

#### **IV. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

##### **Основная литература**

*(электронные и печатные издания)*

1. Ю. К. Егоров-Тисменко. Кристаллография и кристаллохимия : учебник для вузов / [под ред. В. С. Урусова]. М: МГУ, 2014. – 587 с.  
<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:734049&theme=FEFU>
2. Белов Н.П., Покопцева О.К., Яськов А.Д. Основы кристаллографии и кристаллофизики. Часть I. Введение в теорию симметрии кристаллов: Учебное пособие. - СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. - 43 с.  
<http://window.edu.ru/resource/335/63335>
3. Трушин В.Н., Андреев П.В., Фаддеев М.А. Рентгеновский фазовый анализ поликристаллических материалов. Электронное учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. - 89 с.  
<http://window.edu.ru/resource/210/79>
4. Э.Э. Лорд, А. Л. Маккей, С. Ранганатан. Новая геометрия для новых материалов // Пер. с англ. под ред. В. Я. Шевченко, В. Е. Дмитриенко, М: Физматлит, 2010, 260 с.  
<https://e.lanbook.com/book/48204>
5. Агеев О.А., Федотов А.А., Смирнов В.А. Методы формирования структур элементов наноэлектроники и наносистемной техники: Учебное пособие. - Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. - 72 с.  
<http://window.edu.ru/resource/948/73948>

#### Дополнительная литература:

1. Гусев А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. М.: Физматлит, 2009. - 416 с. <http://www.iprbookshop.ru/12979.html>
2. Шевченко О.Ю. Основы физики твердого тела: учебное пособие / О.Ю. Шевченко. — Электрон. текстовые данные. — СПб. : Университет ИТМО, 2010. — 77 с <http://www.iprbookshop.ru/67512.html>
3. Федотов А.К. Физическое материаловедение. Часть 1. Физика твердого: учебное пособие / А.К. Федотов. — Электрон. текстовые данные. — Минск: Вышэйшая школа, 2010. — 400 с. - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20161.html>
4. Орлова М.Н. Наноэлектроника [Электронный ресурс]: курс лекций/ Орлова М.Н., Борzych И.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: Издательский Дом МИСиС, 2013. — 50 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/56246.html>
5. Астайкин А.И. Метрология и радиоизмерения [Электронный ресурс]: учебное пособие / Астайкин А.И., Помазков А.П., Щербак Ю.П. – Электрон. текстовые данные. – Саров: Российский федеральный ядерный центр – ВНИИЭФ, 2010. – 405 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/18440.html> – ЭБС «IPRbooks».

## **МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Крайнова Г.С., Полянский Д.А., Писаренко Т.А. Виды симметрии кристаллических многогранников. Типы кристаллических решеток. Методические указания по курсу «Кристаллография и кристаллофизика» // Владивосток, ДВГУ, 2003, 32 с.
2. Крайнова Г.С., Кузнецов Р.Ю. Точечные группы симметрии. Методические указания к лабораторной работе // Владивосток, 2010, 22 с.
3. Электронный учебно-методический комплекс по теории симметрии // Владивосток, 2010.
4. Крайнова Г. С. Стереографическая проекция. Методические указания к лабораторной работе // Владивосток, 2010, 16 с.

### **Перечень информационных технологий и программного обеспечения**

Для проведения лабораторных работ по дисциплине «Дополнительные главы кристаллографии» и оформления отчетов может использоваться стандартное программное обеспечение компьютерных учебных классов (Windows XP, MicrosoftOffice и др.).

## **V. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

Студент в процессе обучения должен не только освоить учебную программу, но и приобрести навыки самостоятельной работы. Студент должен уметь планировать и выполнять свою работу. Удельный вес самостоятельной работы составляет значительную часть времени изучаемого цикла (50%). Это отражено в учебных планах и графиках учебного процесса, с которым каждый студент может ознакомиться у преподавателя дисциплины.

Главное в период обучения – научиться методам самостоятельного умственного труда, сознательно развивать свои творческие способности и овладевать навыками творческой работы. Для этого необходимо строго соблюдать дисциплину учебы и поведения. Необходимо осуществлять самоконтроль, который является необходимым условием успешной учебы.

## VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для проведения исследований, связанных с выполнением практических заданий по дисциплине доступно лабораторное оборудование и специализированные кабинеты, соответствующие действующим санитарным и противопожарным нормам, а также требованиям техники безопасности при проведении учебных и научно-производственных работ.

<b>Наименование оборудованных помещений и помещений для самостоятельной работы</b>	<b>Перечень основного оборудования</b>
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа корпус L, ауд L443	Офисная мебель. Количество посадочных рабочих мест для студентов – 12 Лабораторные столы и стулья Количество посадочных рабочих мест для студентов - 8
Читальные залы Научной библиотеки ДВФУ с открытым доступом к фонду (корпус А - уровень 10)	Моноблок HP ProOne 400 All-in-One 19,5 (1600x900), Core i3-4150T, 4GB DDR3-1600 (1x4GB), 1TB HDD 7200 SATA, DVD+/-RW, GigEth, Wi-Fi, BT, usb kbd/mse, Win7Pro (64-bit)+Win8.1Pro(64-bit), 1-1-1 Wty Скорость доступа в Интернет 500 Мбит/сек. Рабочие места для людей с ограниченными возможностями здоровья оснащены дисплеями и принтерами Брайля; оборудованы: портативными устройствами для чтения плоскочечатных текстов, сканирующими и читающими машинами видеоувеличителем с возможностью регуляции цветовых спектров; увеличивающими электронными лупами и ультразвуковыми маркировщиками

В целях обеспечения специальных условий обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в ДВФУ все здания оборудованы пандусами, лифтами, подъемниками, специализированными местами, оснащенными туалетными комнатами, табличками информационно - навигационной поддержки.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДФУ)

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ  
РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**  
по дисциплине «Дополнительные главы кристаллографии»

**Направление подготовки 11.04.04 Электроника и нанoeлектроника**  
Нанотехнологии в электронике  
**Форма подготовки очная**

**Владивосток**  
**2016**

## План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1 - 4 недели	Подготовка отчета по лабораторной работе №1 Подготовка к устному опросу	12 час.	Защита отчетов
2	5 - 10 недели	Подготовка отчета по лабораторной работе 2 Подготовка к контрольным работам 1, 2 Подготовка у тесту 1 Выполнение домашнего задания	18 час.	Защита отчетов
3	11 - 13 недели	Подготовка отчета по лабораторной работе 3 Подготовка к собеседованию Выполнение домашнего задания	10 час.	Защита отчетов
4	14 - 18 недели	Подготовка отчета по лабораторным работам 4,5 Подготовка к коллоквиуму Подготовка к контрольной работе 3	14 час.	Защита отчетов
Итого			54 часа	

### Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению

Задания и методические рекомендации для самостоятельной работы обеспечивают подготовку отчетов к лабораторным работам. Их полное содержание приведено в программе и методических указаниях. Методические указания к лабораторным работам в электронном виде и печатном виде берутся у ведущего преподавателя.

## **Требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы**

Результаты самостоятельной работы отражаются в письменных работах (отчетах по лабораторным работам).

К представлению и оформлению отчетов по лабораторным работам предъявляются следующие требования.

### Структура отчета по лабораторной работе

Отчеты по лабораторным работам представляются в электронной форме, подготовленные как текстовые документы в редакторе MSWord.

Отчет по работе должен быть обобщающим документом, включать всю информацию по выполнению заданий, в том числе, построенные диаграммы, таблицы, приложения, список литературы и (или) расчеты, сопровождая необходимыми пояснениями и иллюстрациями в виде схем, экранных форм («скриншотов») и т. д.

Структурно отчет по лабораторной работе, как текстовый документ, комплектуется по следующей схеме:

✓ *Титульный лист*– обязательная компонента отчета, первая страница отчета, по принятой для лабораторных работ форме (титульный лист отчета должен размещаться в общем файле, где представлен текст отчета);

✓ *Исходные данные к выполнению заданий*– обязательная компонента отчета, с новой страницы, содержат указание варианта, темы и т.д.);

✓ *Основная часть*– материалы выполнения заданий, разбивается по рубрикам, соответствующих заданиям работы, с иерархической структурой: разделы – подразделы – пункты – подпункты и т. д.

✓ Рекомендуется в основной части отчета заголовки рубрик (подрубрик) давать исходя из формулировок заданий, в форме отглагольных существительных;

✓ *Список литературы*– обязательная компонента отчета, с новой страницы, содержит список источников, использованных при выполнении работы, включая электронные источники (список нумерованный, в соответствии с правилами описания библиографии);

✓ *Приложения*– необязательная компонента отчета, с новой страницы, содержит дополнительные материалы к основной части отчета.

### Набор текста

Набор текста осуществляется на компьютере, в соответствии со следующими требованиями:

✓ печать – на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (размер 210 на 297 мм.);

✓ интервал межстрочный – полуторный;

✓ шрифт – TimesNewRoman;

✓ размер шрифта - 14 пт., в том числе в заголовках (в таблицах допускается 10-12 пт.);

✓ выравнивание текста – «по ширине»;

✓ поля страницы -левое – 25-30 мм., правое – 10 мм., верхнее и нижнее – 20 мм.;

✓ нумерация страниц – в правом нижнем углу страницы (для страниц с книжной ориентацией), сквозная, от титульного листа до последней страницы, арабскими цифрами (первой страницей считается титульный лист, на котором номер не ставится, на следующей странице проставляется цифра «2» и т. д.).

✓ режим автоматического переноса слов, за исключением титульного листа и заголовков всех уровней (перенос слов для отдельного абзаца блокируется средствами MSWord с помощью команды «Формат» – абзац при выборе опции «запретить автоматический перенос слов»).

## Рекомендации по подготовке к контрольной работе

Для успешного написания контрольных работ необходимо глубокое понимание основ рассматриваемых процессов, явлений, что обеспечивается систематической работой как на лабораторных занятиях, так и самостоятельно. Самостоятельная работа не менее важна, чем аудиторная.

Также в процессе подготовки к контрольным работам рекомендуется пользоваться литературой из списка основной и дополнительной литературы, Интернет-источниками.

Кроме того, теоретический материал можно почерпнуть из методических указаний в процессе выполнения лабораторных работ.

### **Критерии оценки выполнения самостоятельной работы**

*Оценивание лабораторных работ* проводится по критериям:

- полнота и качество выполненных заданий;
- качество оформления отчета, использование правил и стандартов оформления текстовых и электронных документов;
- отсутствие фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы.

*Оценивание контрольных работ* проводится по критериям:

- полнота и качество ответов на теоретические вопросы;
- отсутствие логических ошибок, связанных с пониманием материала;
- отсутствие ошибок в формулах, выражениях, характеризующих рассматриваемый процесс, явление;
- отсутствие значительных ошибок в приводимых количественных характеристиках.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДВФУ)

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по дисциплине «Дополнительные главы кристаллографии»

**Направление подготовки 11.04.04 Электроника и наноэлектроника**  
Нанотехнологии в электронике  
**Форма подготовки очная**

**Владивосток**  
**2016**

## Паспорт ФОС

### Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		критерии	показатели	баллы
ПК-12, способность разрабатывать технические задания на проектирование технологических процессов производства материалов и изделий электронной техники	Знает	<ul style="list-style-type: none"> <li>- основные законы кристаллографии, точечные и трансляционные элементы симметрии, правила сложения элементов симметрии</li> <li>- связь внутренней кристаллической решетки с внешней формой кристаллов и их свойствами</li> <li>- установку и последовательность определения элементов симметрии кристаллов</li> <li>- правила работы с научной литературой по кристаллографии, кристаллохимии, кристаллофизики</li> </ul>	объяснять учебный материал с требуемой степенью научной точности и полноты	наличие общего представления о природе кристаллического состояния вещества; знание способов описания кристаллических структур, обладает базами навыками описания точечных групп и пространственной симметрии кристаллов	60-74
	Умеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>- составлять кристаллографическую характеристику кристаллов, диагностировать простые формы</li> <li>- обозначать виды симметрии (точечные группы) полными формулами и с помощью порождающих элементов симметрии</li> <li>- анализировать внутреннюю структуру кристаллов</li> </ul>	уметь систематизировать научную информацию, выполнять типовые задачи по анализу и синтезу кристаллических структур	Применять знания в области – составления кристаллографических характеристик кристаллов, диагностирования простых форм, обозначения видов симметрии (точечных групп) полными формулами и с помощью порождающих элементов симметрии, анализа внутренней структуры кристаллов	75-89
	Владеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками кристаллографического анализа</li> <li>- методами</li> </ul>	уметь решать задачи в области анализа структуры кристаллов с определением	Способностью четко и грамотно ставить задачу, составлять план разработки	90-100

		расшифровки и выводом федоровских групп - методами представления кристаллических структур для проектирования производства новых материалов	точечной и пространственной группы, синтеза электрических цепей, владеть методами представления кристаллических структур, проектированием структур с заданными физическими свойствами	кристаллографического анализа, методами расшифровки и выводом федоровских групп, методами представления кристаллических структур; владеет умением самостоятельно находить методы решения проектирования структур для производства новых материалов	
--	--	--	---	--	--

## **Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины**

### **Текущая аттестация студентов**

Текущая аттестация студентов по дисциплине «Дополнительные главы кристаллографии» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине «Дополнительные главы кристаллографии» проводится в форме защиты лабораторных работ по оцениванию фактических результатов обучения студентов, собеседования по домашним заданиям, контрольным работам и тестам.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
- уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;
- результаты самостоятельной работы.

Оценивание результатов освоения дисциплины на этапе текущей аттестации проводится в соответствии с используемыми оценочными средствами и критериями.

### **Критерии оценки отчетов по лабораторным работам, домашним заданиям, тестам**

Оценивание работ проводится при представлении отчета в электронном или печатном виде, по двухбалльной шкале: «зачтено», «не зачтено».

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если он представляет к защите отчет по работе, удовлетворяющий требованиям по поставленным заданиям, по оформлению, демонстрирует владение методами и приемами теоретических и практических аспектов работы.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если он не владеет методами и приемами теоретических и практических аспектов работы, допускает существенные ошибки в работе, представляет отчет с существенными отклонениями от правил оформления письменных работ.

### **Промежуточная аттестация студентов**

Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Дополнительные главы кристаллографии» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Промежуточная аттестация по дисциплине «Дополнительные главы кристаллографии» проводится в виде зачета, форма зачета- «устный опрос в форме ответов на вопросы», «практические задания по типам». Допуск к зачету возможен после защиты отчетов по всем лабораторным работам курса.

**Критерии выставления оценки «зачтено» студенту по дисциплине  
«Дополнительные главы кристаллографии»:**

Оценка (стандартная)	Требования к сформированным компетенциям
«зачтено»	Оценка «зачтено» выставляется студенту, если он прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами вопросами и другими видами применения знаний;  применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.
«не зачтено»	Оценка «не зачтено» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы.

**Оценочные средства для промежуточной аттестации**

**(Собеседование УО-1)**

**Вопросы к зачету**

1.  $(r, R)$  – системы точек. Теорема о локальной правильности системы точек.
2. Разбиение пространства и методы их описания. Разбиение евклидовой плоскости – теория планигонов. Теория параллелоэдров и стереоэдров.
3. Непериодические разбиения. Мозаики Пенроуза.
4. Описание квазикристаллов и квазипериодических структур.
5. Пространственная решетка. Системы координатных осей. Понятие кристаллографической зоны. Уравнение зоны.

6. Понятие кристаллографического и полярного комплексов. Стереографическая проекция. Сетка Вульфа и приемы работы с ней.
7. Симметрия кристаллов. Преобразование координат при повороте вокруг оси. Преобразования координат при зеркальном отражении, инверсии.
8. Сложение элементов симметрии. Основные понятия теории групп.
9. Точечные группы симметрии.
10. Трансляционные группы. Группы Браве. Открытые симметричные преобразования. Сочетания трансляций и точечных элементов симметрии.
11. Структурно-кристаллографические разновидности простых форм.
12. Связь между структурой и внешней формой кристаллов. Простые формы кристаллов в классах низшей и средней категорий.
13. Простые формы кристаллов в классах высшей категории – кубической сингонии.
14. Атомно-молекулярные модели роста кристаллов.
15. Основы кристаллохимии.
16. Координация атомов и ионов в структурах кристаллов. Координационные полиэдры.
17. Плотнейшие упаковки.
18. Изображение кристаллических структур. Типы структур. Изоморфизм в структурах. Полиморфизм, политипизм и псевдоморфизм в кристаллах.

## **Оценочные средства для текущей аттестации**

### **Темы коллоквиумов.**

#### **Коллоквиум 1. Симметрия кристаллов.**

##### Вопросы.

1. Покажите на рисунке, какими основными трансляциями характеризуется кубическая объёмноцентрированная решетка? Чему равен

период повторяемости этой решетки в направлении  $[110]$ ,  $[120]$ ,  $[310]$ , если период повторяемости в направлении  $[100]$  равен  $a$ ?

2. Покажите на рисунке, какими основными трансляциями характеризуется кубическая гранецентрированная решетка? Чему равен период повторяемости этой решетки в направлениях  $[111]$ ,  $[101]$ ,  $[121]$ , если период повторяемости в направлении  $[001]$  равен  $a$ ?

3. Покажите на рисунке, какими основными трансляциями характеризуется ромбическая базоцентрированная решетка? Чему равен период повторяемости этой решетки в направлениях  $[120]$ ,  $[012]$ ,  $[112]$ , если период повторяемости в направлениях  $[100]$ ,  $[010]$   $[001]$  равны соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ?

4. Сделайте проекцию нескольких смежных ячеек тетрагональной объемноцентрированной решетки на плоскости  $(100)$  и  $(001)$ . Рассчитайте расстояние между ближайшими узловыми сетками серий  $\{110\}$  и  $\{011\}$ , если периоды повторяемости решетки в направлениях  $[100]$  и  $[001]$  равны, соответственно  $3,2$  и  $5,6$ .

5. Изобразите в виде ортогональной проекции на горизонтальную плоскость некоторую вертикальную плоскость скользящего отражения типа  $c$  вместе с системой точек, связываемых с этой плоскостью, представив, что некоторая исходная точка имеет нулевую координату по вертикальной оси  $Z$ .

6. Покажите в виде проекции на горизонтальную плоскость систему точек, связанную вертикальной винтовой осью симметрии  $4_1$ , обозначая каждую точку координатой по оси  $Z$ .

7. Расшифруйте записанные пространственные группы:  $P_63$ ,  $P_63/mmc$ ,  $I422$ ,  $Cmcm$ ,  $F222$ ,  $P2_13$ .

8. Изобразите в проекции на плоскость  $(011)$  пространственную группу

$P4$ . выведите правильные системы точек с координатами:  $\frac{1}{4} 00$ ,  $\frac{1}{4} \frac{1}{4} 0$ ,  $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$  и определите их кратность.

9. К какому классу может относиться шестигранный тетрагональный кристалл?

10. Объяснить, почему есть кристаллографические классы  $C_{2v}$ ,  $C_{3v}$ ,  $C_{4v}$ ,  $C_{6v}$  и классы  $D_{2d}$  и  $D_{3d}$ , но нет классов  $D_{4d}$  и  $D_{6d}$ ?

11. Перечислить гемиэдрические группы для сингонии, голоэдрическая группа которой  $D_{6h}$ . какая из этих групп является гемиморфной?

12. Назвать гемиэдрическую и гемиморфную группу для сингонии, одна из гемиэдрических групп которой – 422.

13. Записать символы осей 2-го порядка в классах 222, 422, 32 и 432.

14. Записать символы трех любых ребер, параллельных грани (211).

15. У некоторого кристалла был изменен базис таким образом, что индексы плоскостей (100) и (010) остались без изменения, а индексы плоскостей  $(\bar{1}01)$  стали (001). Какие индексы в новом базисе получили плоскости (011) и (121)? Какие индексы в новом базисе имеет старая координатная ось x?

16. В кристаллической решетке перешли к новому базису, заданному кратчайшими трансляциями в направлениях узловых рядов [011], [101], [110]. Как изменятся при этом индексы узлового ряда [111] и плоскости (111)?

**Коллоквиум 2.** Описание некоторых кристаллических структур.

### Вопросы.

1. Проекция ячейки Браве на плоскость
2. Тип решетки кристалла (с обоснованием)
3. Число формульных единиц (Z)
4. Координационное число и координационный многогранник (для каждого сорта атомов)

5. Характер структуры и тип связей
6. Описание в терминах плотной упаковки шаров, если оно возможно
7. Структурный класс
8.  $N$  – число атомов, приходящихся на ячейку.

### Типовые задания к лабораторным работам

#### Лабораторная работа № 1.

#### *Некристаллографические группы симметрии.*

#### **Задание:**

- построить группу симметрии, приняв за генераторы поворот вокруг оси второго порядка и отражение в плоскости симметрии, составляющей с осью угол  $22,5^{\circ}$ ;
- построить стереографическую проекцию элементов симметрии группы, записать ее обозначение по Шенфлису и Герману-Могену;
- записать групповое множество, указать порядок группы;
- перечислить подгруппы.

### Примеры тестовых заданий

#### Контрольная работа 1

#### **Вариант 1**

1. Записать стандартными международными символами точечные группы:  $\frac{2}{m}$ ,  $\bar{4}m$ .
2. Определить порядок групп  $23$ ,  $\frac{4}{m}$ . Перечислить операции симметрии.
3. Перечислить классы симметрии (точечные группы) низшей категории, являющиеся подгруппами класса  $622$ .
4. Построить групповое множество, квадрат Кейли, приняв за генераторы
 
$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} .$$

5. Построить групповое множество, квадрат Кейли, приняв за генераторы

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} .$$

6. Записать матрицу преобразования операции симметрии в кристаллографической системе координат и определить какого рода эта операция:  $m_{xy}$ .

7. Записать квадрат Кейли для группы 32.

8. Записать элементы группового множества для групп  $D_3$ .

9. Указать порядок точечных групп симметрии  $D_{6h}$ ,  $D_{2d}$ .

10. Какая точечная группа симметрии получится, если к групповому множеству указанной группы добавить новую операцию симметрии: в группе  $mm2$  – отражение в плоскости, перпендикулярной оси второго порядка.

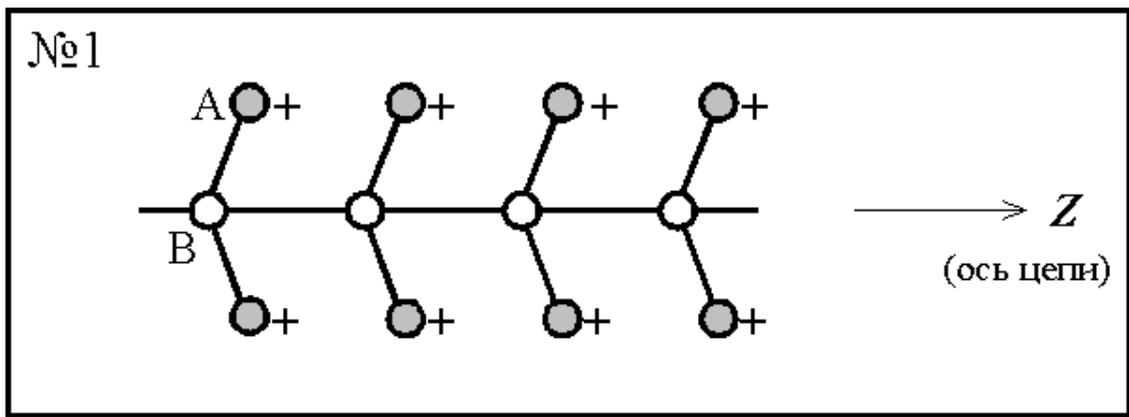
11. Какие симметричные преобразования связывают следующие грани кристалла  $(hkl)$  и  $(kh\bar{l})$ ?

### Контрольная работа 2

Записать структурные классы:

цепи или слоя и кристаллической структуры проекции которых показаны на рисунках. В обоих случаях рассмотреть два варианта: А и В - атомы разных элементов, А и В - атомы одного элемента. Указать тип решетки (дать пояснения).

Обоснованием решения является изображение расположения важнейших элементов симметрии на фоне расположения атомов. Следует иметь в виду, что в некоторых случаях для сопоставления построенного рисунка со стандартным изображением группы необходимо перенести начало координат. Нужно также учесть, что для простоты часто изображаются не все элементы симметрии, входящие в группу, а лишь "порождающие" (указанные в символе группы) и центры инверсии



Контрольная работа 3

**Вариант 1**

1. Кристаллографическая система координат. Введите понятие кристаллографических реперов.
2. Кристаллографические реперы кристаллов средней и высшей категории.
3. Дайте определение примитивной и непримитивной элементарной ячейки. Приведете примеры, укажите группы трансляций.
4. Перечислите решетки Бравэ 7 сингоний кристаллов.
5. Введите понятие пространственной группы симметрии.
6. Запишите пространственные группы симметрии планального вида симметрии моноклинной сингонии.
7. Виды плотнейшей упаковки шаров: трехслойные и двухслойные структуры.
8. Структура  $\alpha$ -Fe (пространственная группа  $Im\bar{3}m$ ).
9. Дайте понятие координационного числа и координационного многогранника. Какой координационный многогранник соответствует координационному числу 8?
10. Структура рутила  $TiO_2$  (пространственная группа  $R4/mmm$ ).
11. Структура алмаза.

Тест по дисциплине «Дополнительные главы кристаллографии»

**Вариант 1**

1. Какую операцию симметрии необходимо добавить к перечисленным операциям симметрии, чтобы получилась группа: а)  $\{e, 2_x, m_z, \dots\}$ ; б)  $\{2_x, 2_y, 2_u, 3^1, 3^2, \dots\}$ ; в)  $\{e, 2, 4^0, \dots\}$ .

2. Показать эквивалентность зеркально-поворотной оси третьего порядка и инверсионной оси шестого порядка.

3. Записать квадрат Кейли для точечной группы  $C_{2h}$ .

4. Нарисовать стереографические проекции элементов симметрии точечных групп:  $C_3, S_4, C_{6h}$ .

5. Записать символ Шенфлиса и международный символ точечных групп, заданных кристаллографической формулой симметрии: а)  $3L_2, L_22P, 3L_23PC$ ; б)  $L_6, L_66L_2, L_66P, L_3P, L_33L_24P$ .

6. Вывести группу симметрии, приняв за генераторы операции отражения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях симметрии и поворот вокруг оси второго порядка, перпендикулярной к одной из плоскостей. Изобразить элементы симметрии на стереографической проекции, дать обозначения группы в международной символике, записать обозначение по Шенфлису. Записать элементы группового множества.

Домашнее задание № 1

4.4. На рис. 4.3 приведены проекции элементарных ячеек тетрагональных кристаллов. Определить тип решеток Бравэ.

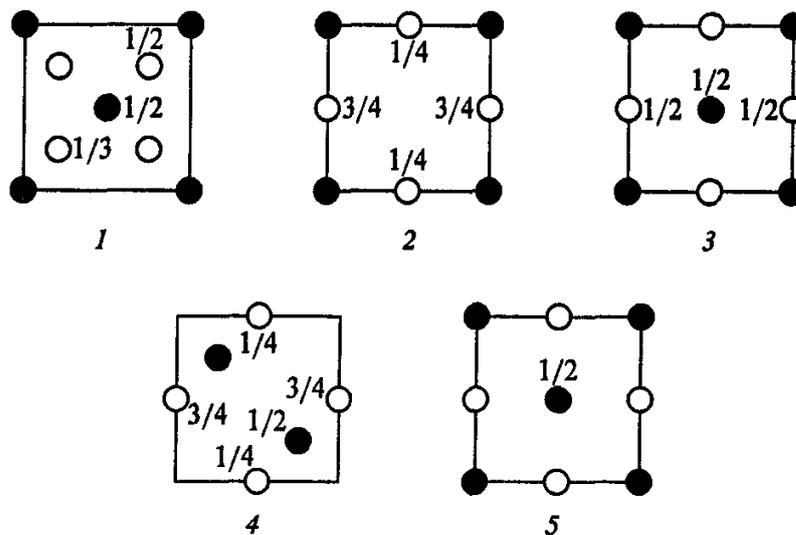
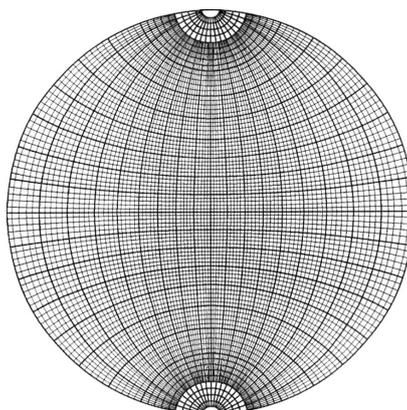


Рис. 4.3. К задаче 4.4

**Дальневосточный государственный университет**

**Кафедра физики конденсированного состояния**

**Методические указания по лабораторной работе  
«СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ»**



**Владивосток 2014**

**СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ**

Основными целями работы являются: 1) практическое изучение стереографической проекции, 2) приобретение навыка работы с сеткой Вульфа, 3) решение типичных кристаллографических задач с помощью программного комплекса.

### **Введение**

В кристаллографии используются различные методы изображения элементов точечной симметрии кристаллов на плоскости. Эти методы получили названия кристаллографических проекций. Применяются гномоническая, сферическая, стереографическая и гномостереографическая проекции.

Сtereoграфическая и гномостереографическая проекции являются весьма удачными способами представления трехмерных объектов на плоскости. В частности, стереографическая проекция издавна применяется в геодезии, астрономии и навигации.

В настоящее время стереографическая проекция успешно применяется не только в кристаллографии, но и в физике твердого тела, минералогии, рентгеноструктурном анализе и т. д.

В кристаллографии стереографическая проекция широко используется для представления на плоском чертеже кристаллических многогранников, простых форм кристаллов, элементов симметрии точечных групп и т. п. Математический аппарат, позволяющий преобразовывать точки пространственных объектов в точки чертежа стереографической проекции, базируется на теоремах сферической тригонометрии и векторной алгебры. Следовательно, вычисление точек стереографической проекции требует достаточно сложных расчетов.

На практике применяются два подхода для построения стереографических проекций. Первый использует специальные шаблоны (стереографические сетки), которые позволяют без вычислений путем геометрических построений получать стереографические проекции точек

сферы произвольного радиуса. Метод привлекателен тем, что не требует знания теорем сферической тригонометрии, вычислений тригонометрических функций, перемножения матриц и других нетривиальных математических операций. С другой стороны, работа со стереографическими шаблонами требует использования точного шаблона, скрупулезного выполнения чертежей, длительных затрат времени и, главное, дает результаты со значительной погрешностью.

В третьем тысячелетии (по григорианскому календарю) более целесообразным является построение стереографических проекций с помощью персонального компьютера. Пересчет координат точек трехмерного пространства в координаты соответствующих точек плоскости стереографической проекции современный процессор реализует практически мгновенно. Точность вычислений превышает самые строгие запросы кристаллографов-практиков. Цветные дисплеи с большим экраном отображают стереографические проекции в наглядной форме. Интерактивный режим компьютерной программы позволяет легко варьировать исходные данные и переходить от решения одной задачи к другой.

В настоящей работе студентам предоставляется на собственном опыте убедиться в достоинствах и недостатках обоих методов.

### **Сферические координаты и стереографическая проекция**

Решение теоретических и практических задач кристаллографии требует, в частности, изображения на плоском чертеже элементов точечной симметрии различных трехмерных объектов: элементарных ячеек кристаллов, кристаллических многогранников и т. д.

Все методы кристаллографического проецирования базируются на важной теореме кристаллографии: все элементы точечной симметрии конечной физической системы пересекаются хотя бы в одной точке. Это значит, что при решении любой проблемы точечной кристаллографии всегда

можно найти хотя бы одну точку  $O$ , в которой пересекаются все оси и плоскости симметрии исследуемого объекта. Если среди элементов симметрии имеется центр инверсии, то он находится в той же точке  $O$ . Набор всех элементов точечной симметрии объекта называется *точечным комплексом*, а найденная точка  $O$  — *центром точечного комплекса*.

Любую плоскость можно характеризовать нормалью — прямой, перпендикулярной данной плоскости. Нормаль каждой плоскости симметрии проводится также через точку  $O$ . Заменяя плоскости точечного комплекса их нормальными, получим набор прямых линий, называемый *полярным комплексом*.

Если объектом изучения является кристаллический многогранник, то его грани и ребра переносятся параллельно самим себе так, чтобы все они пересекались в одной произвольно выбранной точке пространства  $O$ . Полученная совокупность пересекающихся осей и плоскостей называется *кристаллическим комплексом*, а выбранная точка  $O$  — *центром кристаллического комплекса*.

С точки зрения теории симметрии точечный, полярный и кристаллический комплексы представляют собой эквивалентные математические объекты.

Из центра комплекса  $O$  описывается сфера произвольного радиуса, называемая *сферой проекции*. Любая ось или нормаль плоскости пересекает построенную сферу в двух точках, лежащих на концах одного и того же диаметра. Полученные точки являются сферическими проекциями соответствующих прямых, а вся совокупность аналогично построенных точек называется *сферической проекцией* данного точечного (кристаллического или полярного) комплекса. Точку  $O$  при этом называют *центром сферической проекции*.

Очевидно, что плоскости точечного комплекса пересекают сферу по окружностям больших кругов. Положение плоскости в пространстве

однозначно задается ориентацией нормали и характеризуется сферической проекцией этой нормали.

Для числового выражения сферических проекций на сфере определяется система *сферических координат*. Через центр  $O$  проводится ось, называемая *полярной*. Точка, в которой положительная полярная полуось пересекает сферу, называется *северным полюсом*  $N$ . Противоположная точка сферы, лежащая на отрицательной полярной полуоси, называется *южным полюсом*  $S$ . Дуги больших кругов, соединяющих полюса, по аналогии с геодезической проекцией, называют *меридианами*. Через каждую точку сферы (за исключением обоих полюсов) можно провести только один меридиан (Рис. 1.).

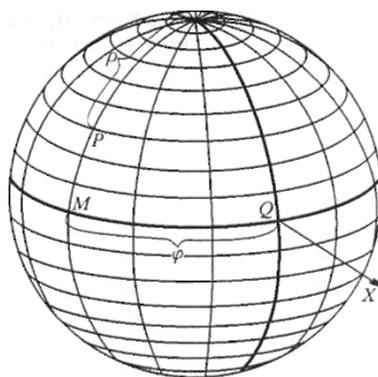


Рис. 1. Сферическая система координат:

$Z$  — полярная ось,  $X$  — азимутальная ось,  $P$  — произвольная точка поверхности сферы проекций,  $N$  — северный полюс,  $Q$  — точка пересечения нулевого меридиана с экватором.

Первой сферической координатой произвольной точки  $P$  сферы проекций является центральный угол, опирающийся на дугу  $NP$ .

Эта координата называется *полярным углом*  $\rho$ . Иначе говоря, полярный угол данной точки  $P$  представляет собой угловое расстояние от северного полюса до точки  $P$ , отложенное вдоль меридиана, на котором расположена эта точка. Всевозможные значения полярных углов лежат в интервале  $[0, \pi]$ .

Полярный угол северного полюса равен нулю, полярный угол южного полюса равен  $\pi$ .

Плоскость, перпендикулярная полярной оси и проходящая через центр  $O$ , пересекаясь со сферой проекций, образует окружность, которую можно назвать *экватором*. Меридиан, проведенный через произвольную точку сферы  $P$ , пересечет экватор в некоторой точке  $M$ .

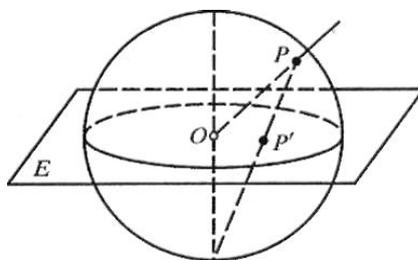
Для определения второй сферической координаты необходимо один из меридианов принять за *нулевой*. Обозначим буквой  $Q$  точку пересечения нулевого меридиана с экватором. Вторая ось сферических координат, называемая *азимутальной*, направляется из центра  $O$  через точку  $Q$ . Вторая сферическая координата произвольной точки  $P$  определяется как угловое расстояние  $QM$ , отложенное вдоль экватора по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса сферы. Соответствующий центральный угол, опирающийся на дугу  $QM$ , называется *долготой* или *азимутом*  $\varphi$  точки  $P$ . Числовые значения азимутальных углов лежат в диапазоне  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Долгота нулевого меридиана равна нулю. Полярный угол  $\rho$  и азимут  $\varphi$  однозначно определяют положение произвольной точки на поверхности сферы.

Для наглядности на сферу проекций обычно наносится градусная сетка, состоящая из параллелей и меридианов, проведенных с определенным шагом по углам  $\rho$  и  $\varphi$ .

Стереографическую проекцию удобно ввести с помощью построенной сферы проекций и сферической системы координат. Экваториальная плоскость (проходящая через центр  $O$  перпендикулярно к полярной оси) будет называться *плоскостью проекций*, а часть этой плоскости, ограниченная окружностью экватора, — *кругом проекций*. Очевидно, что центр круга проекций совпадает с центром сферы  $O$ . Плоскость проекций делит сферу на северное (верхнее) и южное (нижнее) полушария. Точки северного полушария имеют полярные углы  $0 \leq \rho < \pi/2$ , южного — углы  $\pi/2 < \rho \leq \pi$ .

Каждой точке  $P$  поверхности сферы ставится в соответствие точка стереографической проекции путем следующей процедуры. Если точка  $P$  расположена в северном полушарии, то она соединяется отрезком прямой с южным полюсом  $S$ . Отрезок  $PS$  обязательно пересечет круг проекций в некоторой точке  $P'$ , которая является стереографической проекцией точки  $P$  (Рис.2).

Аналогично, если точка  $P$  расположена в южном полушарии, то она соединяется отрезком прямой с северным полюсом  $N$ . В этом случае стереографической проекцией точки  $P$  является точка  $P'$ , получаемая пересечением отрезка  $PN$  с кругом проекций.



*Рис. 2. Построение стереографической проекции точки:*

$O$  — центр сферы проекций,  $N$  — северный полюс,  $S$  — южный полюс,  $E$  — экваториальная плоскость,  $P$  — произвольная точка верхней полусферы,  $P'$  — стереографическая проекция точки  $P$ .

Полюс, из которого проводится отрезок к точке сферы, называется *точкой зрения*.

Для описания положения точек стереографической проекции целесообразно определить в круге проекций вспомогательную систему декартовых координат. Ось  $X$  совместим с азимутальной осью сферической системы координат, ось  $Y$  направим перпендикулярно ей. Координаты  $x$ ,  $y$  однозначно определяют положение любой точки круга проекций (Рис.3).

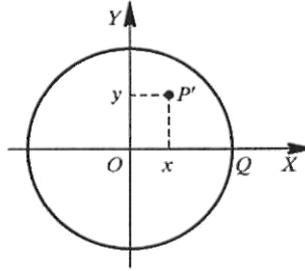


Рис. 3. Вспомогательная система декартовых координат на круге проекций:

Ось  $X$  пересекает сферу проекций в точке  $Q$ . Точка  $P'$  — стереографическая проекция точки  $P$  сферы

Произвольная точка  $P$  сферы проекций со сферическими координатами  $\rho$  и  $\varphi$  отобразится в точку круга проекций  $P'$  с декартовыми координатами  $x$  и  $y$ .

С помощью геометрического построения легко показать, что точка стереографической проекции  $P'$  имеет следующие декартовы координаты:

$$x = R_0 \frac{\sin \rho \cos \varphi}{\cos \rho + 1}, \quad y = R_0 \frac{\sin \rho \sin \varphi}{\cos \rho + 1}. \quad (1)$$

где  $R_0$  — радиус сферы и круга проекций.

Расстояние от центра круга проекций до точки  $P'$  равно

$$r = R_0 \frac{\sin \varphi}{\cos \rho + 1}. \quad (2)$$

Для различия точек северного и южного полушария их стереографические проекции изображаются в круге проекций кружками и крестиками соответственно.

Любая ось точечного (кристаллического или полярного) комплекса пересекает сферу в двух точках, причем принадлежащих разным полушариям, поэтому стереографическая проекция оси изображается кружком и крестиком. Кружок и крестик расположены на концах отрезка, проходящего через центр  $O$  и равноудалены от него (Рис.4).

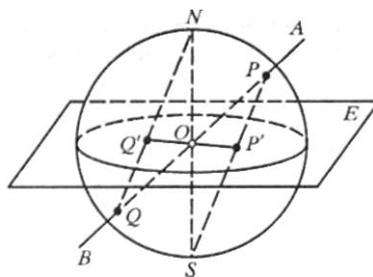


Рис.4. Построение стереографической проекции прямой:

$O$  — центр сферы проекций,  $N$  и  $S$  — ее северный и южный полюсы,  $E$  — экваториальная плоскость,  $AB$  — прямая линия,  $P$  и  $Q$  — точки пересечения прямой  $AB$  верхней и нижней полусфер соответственно,  $P'$  и  $Q'$  — стереографическая проекция точек  $P$  и  $Q$  соответственно. Точки  $P'$ ,  $O$  и  $Q'$  лежат на одной прямой. Длины отрезков  $OP'$  и  $OQ'$  равны.

Ориентация плоскости в пространстве характеризуется *полюсом* — точкой пересечения нормали с северной (верхней) полусферой. Стереографическая проекция нормали к плоскости строится аналогично проекции прямой.

Для того чтобы получить стереографическую проекцию самой плоскости, требуется построить стереографические проекции в принципе всех точек большого круга, который образован сечением сферы данной плоскостью (Рис.5). В результате стереографическая проекция плоскости оказывается состоящей из двух дуг, из которых одна изображается кружками, а другая — крестиками.

При решении кристаллографических задач иногда требуется строить стереографические проекции окружностей произвольного радиуса, расположенных на сфере проекций. Такие окружности получаются сечением сферы плоскостью, не проходящей через центр сферы. Форма стереографической проекции этих окружностей определяется следующей важной теоремой.



Рис.6. К теореме 1:

$N$  и  $S$  — северный и южный полюсы сферы проекций, линия  $P_1 - P_2$  — окружность на поверхности сферы,  $p_1 - p_2$  — стереографическая проекция этой окружности,  $q_1 - q_2$  — второе круговое сечение эллиптического конуса  $SP_1P_2$

Теорема 1 весьма полезна при построении элементов симметрии точечных комплексов, имеющих оси не параллельные полярной оси.

Еще одно важное свойство стереографической проекции формулируется в форме следующей теоремы.

**Теорема 2.** Угол между дугами больших кругов на сфере равен углу между стереографическими проекциями этих дуг.

Очевидно, что два разных больших круга одной сферы обязательно пересекаются. Дуги этих кругов имеют две общие (диаметрально расположенные) точки на поверхности сферы. Для определенности выберем точку пересечения  $P$ , находящуюся в северном полушарии. Угол между дугами больших кругов определяется как угол между касательными к сфере, пересекающимися в точке  $P$  и лежащими в плоскостях больших кругов. Обозначим  $p_1$  стереографическую проекцию точки  $P$ . В точке  $p_1$  пересекутся стереографические проекции дуг обоих больших кругов (Рис.7).

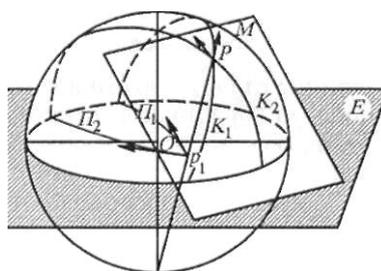


Рис.7. К теореме 2:

$O$  — центр сферы проекций,  $N$  и  $S$  — ее северный и южный полюсы,  $E$  — экваториальная плоскость,  $M$  — плоскость, касательная к сфере,  $K_1$  и  $K_2$  — дуги больших кругов,  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — соответственно их стереографической

проекции,  $P$  — точка пересечения больших кругов  $K_1$  и  $K_2$ ,  $p_1$  — стереографическая проекция точки  $P$

Из теоремы 1 следует, что эти проекции тоже являются дугами окружностей. Углом между стереографическими проекциями называется угол между касательными к дугам этих проекций, пересекающимися в точке  $p_1$ . Очевидно, что эти касательные лежат в плоскости проекций.

Доказательство теоремы 2 приводится в [3].

Для информативного восприятия стереографической проекции кристаллического (или полярного) комплекса целесообразно на круг проекций наложить какую-либо градусную сетку. Это позволяет быстро визуально оценить значения сферических координат любых элементов стереографической проекции отображаемого объекта.

В кристаллографии наибольшее распространение получил шаблон, называемый сеткой Вульфа (см. Приложение 1.).

### **Типовые задачи кристаллографии, решаемые с помощью стереографической проекции**

Набор типовых задач определяется в первую очередь проблемами, которые приходится решать теории симметрии, минералогии, рентгеноструктурному анализу и другим разделам физики.

**Задача 1.** Измерить угол  $\alpha_{AB}$  между направлениями (лучами), заданными сферическими координатами  $p_A, \varphi_A$ , и  $p_B, \varphi_B$ .

Решение. Каждый луч, пересекая сферу проекций, дает на ее поверхности точку с соответствующими координатами  $p_A, \varphi_A$ , и  $p_B, \varphi_B$ . Через две произвольные точки сферы можно провести большой круг, причем только один (если точки не являются диаметрально противоположными). С помощью вспомогательных сферических треугольников и теорем сферической тригонометрии [5] доказывается справедливость следующего уравнения:

$$\cos \alpha_{AB} = \cos \rho_A \cos \rho_B + \sin \rho_A \sin \rho_B \cos(\varphi_A - \varphi_B). \quad (3)$$

Восстановить значение угла  $\alpha_{AB}$  по его косинусу можно с помощью стандартных процедур обратных тригонометрических функций. По смыслу величина  $\alpha_{AB}$  полагается положительной. В качестве угла между лучами выбирается меньшая дуга большого круга. Следовательно, угол  $\alpha_{AB}$  лежит в диапазоне  $[0, \pi]$ . Положительные значения  $\cos \alpha_{AB}$  отвечают углам  $0 \leq \alpha_{AB} < \pi/2$ , отрицательные — углам  $\pi/2 < \alpha_{AB} \leq \pi$ .

**Задача 2.** Сменить плоскость проекции по заданному полюсу со сферическими координатами  $\rho_0, \varphi_0$ . Построить стереографические проекции определенной точки  $P$  сферы на новой плоскости проекций. Положение исходной точки  $P$  задано сферическими координатами  $\rho_1, \varphi_1$ .

Задача смены плоскости проекций весьма важна, так как является этапом решения многих других задач.

Решение. Для описания алгоритма смены плоскости проекций удобно ввести декартову систему координат. Ось  $Z$  совмещается с полярной осью, а ось  $X$  — с азимутальной. Положение оси  $Y$  однозначно определено правым базисом системы координат. Круг проекций располагается в плоскости  $XY$ . Заметим, что оси  $X$  и  $Y$  совпадают с соответствующими осями вспомогательной плоской системы координат, введенной на круге проекций в предыдущем разделе (см. Рис.3).

Операция смены плоскости проекций может быть геометрически представлена как поворот декартовой системы координат  $XYE$  вокруг центра  $O$  при фиксированном положении сферы проекций с нанесенной на ней градусной сеткой. Поворот следует провести таким образом, чтобы ось  $Z$  стала проходить через точку сферы с заданными сферическими координатами  $\rho_0, \varphi_0$ . Круг проекций также повернется, оставаясь перпендикулярным оси. При этом стереографические проекции точек сферы изменят свои положения на круге проекций, так как точка зрения полагается неизменной.

Произвольный поворот декартовой системы координат вокруг своего центра может быть задан осью поворота и углом поворота  $\omega$ . Ориентация оси определяется единичным вектором с компонентами  $k_1, k_2, k_3$ . Матрица такого поворота имеет следующий общий вид:

$$(4) \quad \begin{bmatrix} C\omega + k_1^2(1 - C\omega) & -k_3S\omega + k_1k_2(1 - C\omega) & k_2S\omega + k_1k_3(1 - C\omega) \\ k_3S\omega + k_1k_2(1 - C\omega) & C\omega + k_2^2(1 - C\omega) & -k_1S\omega + k_2k_3(1 - C\omega) \\ -k_2S\omega + k_1k_3(1 - C\omega) & k_1S\omega + k_2k_3(1 - C\omega) & C\omega + k_3^2(1 - C\omega) \end{bmatrix},$$

где использованы обозначения:  $C\omega = \cos \omega, S\omega = \sin \omega$ .

Преобразование декартовой системы координат, осуществляющий требуемую смену плоскости проекций, можно реализовать путем двух последовательных поворотов. Вначале система координат поворачивается вокруг оси  $Z$  на угол  $\omega$ , а затем вокруг оси  $Y$  на угол  $\rho_0$ . В результате полярная ось пересечет сферу проекций в точке со сферическими координатами  $\rho_0, \varphi_0$ .

Пользуясь (4), запишем матрицу поворота вокруг оси  $Z$  на угол  $\varphi_0$ :

$$M_Z = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

Аналогично получается матрица поворота вокруг оси  $Y$  на угол  $\rho_0$ :

$$M_Y = \begin{bmatrix} \cos \rho_0 & 0 & -\sin \rho_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \rho_0 & 0 & \cos \rho_0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

Искомое преобразование для смены плоскости проекций выражается произведением матриц:

$$M_2 = M_Y M_Z = \begin{bmatrix} C\rho \cdot C\varphi & C\rho \cdot S\varphi & -S\rho \\ -S\varphi & C\varphi & 0 \\ S\rho \cdot C\varphi & S\rho \cdot S\varphi & C\rho \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где для краткости записи введены обозначения:  $C\rho = \cos \rho_0, S\rho = \sin \rho_0, C\varphi = \cos \varphi_0,$

$S\varphi = \sin \varphi$ . Соположение исходной точки  $P$  со сферическими координатами  $\rho_1, \varphi_1$  можно характеризовать единичным вектором с началом в центре  $O$  и направленным в заданную точку сферы проекций. Компоненты этого вектора  $V_1$  равны

$$V_1 = [\sin \rho_1 \cos \varphi_1, \sin \rho_1 \sin \varphi_1, \cos \rho_1]. \quad (8)$$

Перемножение матрицы (7) на вектор (8) даст вектор  $V_2$  с компонентами

$$M_2 \times V_1 = V_2 = [\sin \rho_2 \cos \varphi_2, \sin \rho_2 \sin \varphi_2, \cos \rho_2]. \quad (9)$$

Углы  $\rho_2$  и  $\varphi_2$  представляют собой сферические координаты исходной точки  $P$  относительно новой (повернутой) системы декартовых координат. Вычисление значений углов  $\rho_2$  и  $\varphi_2$  по известным компонентам вектора  $V_2$  не представляет трудностей.

По сферическим координатам  $\rho_2$  и  $\varphi_2$  строится стереографическая проекция, согласно формулам (1).

**Задача 3.** Точка со сферическими координатами  $\rho_0, \varphi_0$ . является полюсом дуги большого круга. Построить стереографическую проекцию этой дуги.

Решение. Задача легко решается, если вначале провести смену плоскости проекций, повернув систему декартовых координат так, чтобы ось  $Z$  направилась в точку сферы с координатами  $\rho_0, \varphi_0$ . В новой системе координат точки большого круга определяются векторами  $V_1[k_1, k_2, k_3]$ , лежащими в новом круге проекций и имеющими компоненты

$$k_1' = \cos \varphi', \quad k_2' = \sin \varphi', \quad k_3' = 0, \quad 0 \leq \varphi' < 2\pi. \quad (10)$$

где  $\varphi'$  — угловая координата (азимут) на новом круге проекций.

Теперь необходимо вернуть систему декартовых координат в прежнее положение, направив ось  $Z$  в северный полюс сферы проекций. Матрица такого преобразования может быть получена из (7) заменой угла  $\rho_0$  на  $-\rho_0$

$$M_3 = \begin{bmatrix} C\rho \cdot C\varphi & C\rho \cdot S\varphi & S\rho \\ -S\varphi & C\varphi & 0 \\ -S\rho \cdot C\varphi & -S\rho \cdot S\varphi & C\rho \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Перемножение этой матрицы на векторы  $V'$ :

$$M_3 \times V' = V, \quad (12)$$

даст другие векторы  $V[k_1, k_2, k_3]$ , которые характеризуют положения точек искомого большого круга относительно первоначальной системы координат. Компоненты векторов  $V$  выражаются через сферические координаты точек большого круга  $\rho$  и  $\varphi$ :

$$k_1 = \sin \rho \cos \varphi, \quad k_2 = \sin \rho \sin \varphi, \quad k_3 = \cos \rho. \quad (13)$$

Вычисление координат  $\rho$ ,  $\varphi$  и построение стереографических проекций точек большого круга проводится аналогично последним этапам решения предыдущей задачи.

**Задача 4.** По двум точкам, заданным парами сферических координат:  $\rho_1, \varphi_1$  и  $\rho_2, \varphi_2$ , построить стереографическую проекцию большого круга, проходящего через эти точки, построить полюс большого круга и определить сферические координаты  $\rho_0, \varphi_0$  этого полюса.

Решение. Любую точку сферы проекций можно характеризовать единичным вектором с началом в центре  $O$ , направленным в данную точку. Обозначим векторы заданных точек  $A, B$  и искомого полюса  $V_1, V_2$  и  $V_0$  соответственно. Из определения полюса большого круга следует, что скалярные произведения векторов  $(V_1V_0)$  и  $(V_2V_0)$  равны нулю. Расписывая скалярные произведения через компоненты векторов  $V_1, V_2$  и  $V_0$ , получим уравнения

$$\sin \rho_1 \cos \varphi_1 \sin \rho_0 \cos \varphi_0 + \sin \rho_1 \sin \varphi_1 \sin \rho_0 \sin \varphi_0 + \cos \rho_1 \cos \rho_0 = 0. \quad (14)$$

$$\sin \rho_2 \cos \varphi_2 \sin \rho_0 \cos \varphi_0 + \sin \rho_2 \sin \varphi_2 \sin \rho_0 \sin \varphi_0 + \cos \rho_2 \cos \rho_0 = 0. \quad (15)$$

Решая систему уравнений (14) и (15), получаем значения сферических координат  $\rho_0, \varphi_0$  полюса. Так как полюс располагается в верхней полусфере, то система имеет единственное решение.

Построение стереографической проекции большого круга по заданному полюсу описано в решении задачи 3.

**Задача 5.** Две дуги больших кругов  $A$  и  $B$  заданы двумя парами точек сферы со следующими сферическими координатами:

$(\rho_1, \varphi_1), (\rho_2, \varphi_2), (\rho_3, \varphi_3), (\rho_4, \varphi_4)$ - Измерить угол между этими дугами.

Решение. Вначале по двум точкам большого круга со сферическими координатами  $(\rho_1, \varphi_1)$  и  $(\rho_2, \varphi_2)$  строится его полюс  $P_A$  с координатами  $\rho_A, \varphi_A$  по методике, описанной в решении предыдущей задачи. Затем аналогично по заданным сферическим координатам  $(\rho_3, \varphi_3)$  и  $(\rho_4, \varphi_4)$  вычисляются координаты  $\rho_B, \varphi_B$  полюса  $P_B$  второго большого круга. Наконец, измеряется угловое расстояние между точками  $P_A$  и  $P_B$  с использованием формулы (3). Искомый угол между дугами больших кругов равен угловому расстоянию между их полюсами.

**Задача 6.** Ось точечного комплекса задана сферическими координатами  $\rho_0, \varphi_0$ . Определить всевозможные направления, образующие угол  $\alpha$  с данной осью. Построить стереографические проекции этих направлений.

Решение. Лучи указанных направлений образуют поверхность кругового конуса, вершина которого находится в центре комплекса  $O$ . Эта коническая поверхность пересекает сферу проекции, причем линия пересечения является окружностью согласно теореме 1.

Для однозначности решения положим, что угол  $\alpha$  не превышает  $\pi/2$ . При  $\alpha = \pi/2$  данная задача сводится к построению большого круга по заданному полюсу со сферическими координатами  $\rho_0, \varphi_0$  (см. задачу 3). При  $\alpha = \pi/2$  задача 5 в кристаллографии называется построением малого круга.

Решение, как и в задаче 3, начинается со смены плоскости проекций. За полюс новой проекции принимается точка с координатами  $\rho_0$  и  $\varphi_0$ . В новой проекции единичные векторы  $V'$  заданных направлений имеют компоненты

$$k'_1 = \sin \alpha \cos \varphi', \quad k'_2 = \sin \alpha \sin \varphi', \quad k'_3 = \cos \alpha, \quad 0 \leq \varphi' < 2\pi.$$

Переход в начальную систему координат реализуется, как и в задаче 3, перемножением матрицы (11) на векторы  $V'$ . Следующие действия полностью аналогичны решению задачи 3.

**Задача 7.** Два направления (луча) заданы сферическими координатами  $\rho_1, \varphi_1$  и  $\rho_2, \varphi_2$ . Построить стереографическую проекцию плоскости отражения, относительно которой симметричны данные направления. Найти координаты полюса этой плоскости.

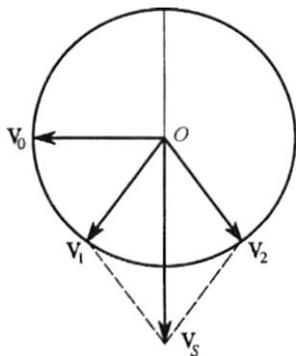


Рис.8. К решению задачи 7:

Вертикальный отрезок — след искомой плоскости отражения, вектор  $V_S$  — сумма векторов  $V_1, V_2$

*Решение.* Положение плоскости определяется сферическими координатами  $\rho_0, \varphi_0$  ее полюса.

Охарактеризуем точки 1, 2 и искомый полюс соответственно единичными векторами  $V_1, V_2$  и  $V_0$ , имеющими начало в центре точечного комплекса. Все эти векторы находятся в одной плоскости, проходящей через центр  $O$  (Рис.8).

Смешанное произведение трех векторов  $V_1, V_2$  и  $V_0$  равно нулю, следовательно, для проекций этих векторов выполняется равенство

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

где проекции векторов выражаются через сферические координаты следующими формулами:

$$x_i = \sin \rho_i \cos \varphi_i, \quad y_i = \sin \rho_i \sin \varphi_i, \quad z_i = \cos \rho_i, \quad i = 0, 1, 2. \quad (17)$$

Из Рис. 8 также следует, что вектор  $V_S$ , равный сумме векторов  $V_1, V_2$ , перпендикулярен вектору  $V_0$ . Это значит, что скалярное произведение векторов  $V_S$  и  $V_0$  равно нулю. Расписывая это произведение через проекции векторов, получаем

$$x_0(x_1 + x_2) + y_0(y_1 + y_2) + z_0(z_1 + z_2) = 0. \quad (18)$$

Решение системы уравнений (16), (18) с учетом (17) позволяет получить сферические координаты  $\rho_0, \varphi_0$  полюса искомой плоскости симметрии. Построение стереографической проекции плоскости по заданному полюсу рассмотрено в задаче 3.

**Задача 8.** Два направления (луча) заданы сферическими координатами  $\rho_1, \varphi_1$  и  $\rho_2, \varphi_2$ . Построить стереографическую проекцию поворотной оси 2-го порядка, относительно которой симметричны два заданных направления. Определить сферические координаты выхода оси через сферу проекций.

Решение. Обозначим  $\rho_0, \varphi_0$  искомые сферические координаты выхода оси. Введем, как и в предыдущей задаче, единичные векторы  $V_1, V_2$  и  $V_0$ , направленные в точки сферы с координатами  $(\rho_1, \varphi_1), (\rho_2, \varphi_2)$  и  $(\rho_0, \varphi_0)$  соответственно. По условию задачи эти точки должны лежать в одной плоскости, следовательно, для их сферических координат справедливо уравнение (16).

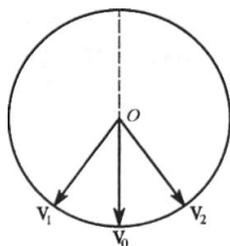


Рис. 9. К решению задачи 8:

*Штриховым отрезком изображена искомая ось 2-го порядка*

Из Рис. 9 видно, что разность векторов  $V_1$ , и  $V_2$  перпендикулярна вектору  $V_0$ . Следовательно, скалярное произведение векторов  $V_1, (V_2 - V_0)$  равно нулю, что выражается через проекции так:

$$x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) + z_0(z_1 - z_2) = 0. \quad (19)$$

Сферические координаты  $\rho_0, \varphi_0$ , определяющие точку выхода оси, получаются решением системы уравнений (16), (19) с учетом выражений (17). Остается построить стереографическую проекцию этой точки с помощью формул (1).

**Задача 9.** Полюса  $A$  и  $B$  двух дуг больших кругов заданы сферическими координатами  $\rho_1, \varphi_1$  и  $\rho_2, \varphi_2$  соответственно. Построить стереографическую проекцию оси, поворотом вокруг которой совмещаются эти дуги большого круга. Определить величину угла поворота  $\omega$ .

Решение. Как и в предыдущей задаче, введем единичные векторы  $V_1, V_2$  и  $V_0$ , направленные в точки сферы с координатами  $(\rho_1, \varphi_1), (\rho_2, \varphi_2)$  и  $(\rho_0, \varphi_0)$ , где  $\rho_0, \varphi_0$  обозначены искомые сферические координаты выхода оси. Ясно, что вектор  $V_0$  перпендикулярен векторам  $V_1, V_2$ . Следовательно, скалярные произведения  $(V_1V_0)$  и  $(V_2V_0)$  равны нулю, что дает два независимых уравнения (14) и (15). Решая полученную систему, аналогично задаче 4, получим сферические координаты  $\rho_0, \varphi_0$  точки выхода оси.

Далее целесообразно провести смену плоскости проекций, как описано в решении задачи 2, переместив северный полюс в точку с координатами  $\rho_0, \varphi_0$ . В новой системе координат искомый угол поворота  $\omega$  выразится абсолютной величиной разности азимутальных углов полюсов  $A$  и  $B$ :

$$\omega = |\varphi'_1 - \varphi'_2|. \quad (20)$$

Построение стереографической проекции точки с заданными сферическими координатами рассматривалось выше.

**Задача 10.** Направление поворотной оси  $N$ -го порядка задано сферическими координатами  $\rho_0, \varphi_0$  точки выхода этой оси из сферы проекций. Кроме того, задана некоторая точка 1 на поверхности сферы (не лежащая на оси) со сферическими координатами  $\rho_1, \varphi_1$ . Найти координаты

точек, получаемых из исходной, всевозможными поворотами вокруг заданной оси. Построить стереографические проекции найденных точек.

Решение. Прежде всего строится единичный вектор  $V_1$ , направленный из центра  $O$  в точку 1. Повороты вокруг заданной оси описываются матрицей  $M_2$  (4) с углом поворота  $\omega = 2\pi/N$ , где единичный вектор оси имеет компоненты

$$k_1 = \sin \rho_0 \cos \varphi_0, \quad k_2 = \sin \rho_0 \sin \varphi_0, \quad k_3 = \cos \rho_0. \quad (21)$$

$(N - 1)$ -кратные перемножения матрицы (4) на вектор  $V_1$  дадут  $N - 1$  векторов, направленных в точки, симметричные данной точке 1, относительно поворотов вокруг заданной оси на углы, кратные  $2\pi/N$ . Построение стереографических проекций точек сферы рассматривалось в предыдущих задачах.

**Задача 11.** Два направления (луча) заданы сферическими координатами  $\rho_1, \varphi_1$  и  $\rho_2, \varphi_2$ . Построить стереографическую проекцию поворотной оси, лежащей в плоскости проекций, поворотом относительно которой совмещаются заданные лучи. Определить долготу (азимут) точки выхода оси через сферу проекций и вычислить угол поворота.

Решение. Обозначим сферические координаты точки выхода оси  $\rho_0, \varphi_0$ . С математической точки зрения эта задача является частным случаем задачи 9, но условие задачи  $\rho_0 = \pi/2$  делает возможным более короткое решение.

Заданные направления составляют с искомой осью углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые равны друг другу. Выразим косинусы углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по формуле (3) и приравняем друг другу. Решение полученного уравнения дает следующее выражение для искомой долготы  $\varphi_0$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sin \rho_1 \cos \varphi_1 - \sin \rho_2 \cos \varphi_2}{\sin \rho_2 \sin \varphi_2 - \sin \rho_1 \sin \varphi_1}$$

Точка другого выхода оси является диаметрально противоположной (см. задачу 12).

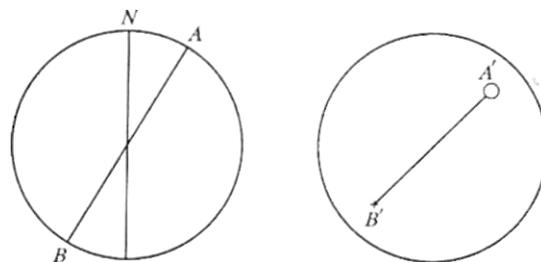
Вычисление угла поворота  $\omega$  оси целесообразно выполнить, как и в решении задачи 9, изменив плоскость проекций перемещением полюса в точку выхода оси. Искомый угол поворота  $\omega$  равен абсолютной величине разности азимутов заданных направлений относительно новой плоскости проекций, которая выражается формулой (20).

**Задача 12.** Задана точка сферы проекций со сферическими координатами  $\rho_A$  и  $\varphi_A$ . Вычислить сферические координаты  $\rho_B$  и  $\varphi_B$  точки, диаметрально противоположной данной.

Эта задача входит как этап в некоторые из предыдущих задач, а также имеет самостоятельное значение.

Решение. Диаметрально противоположные точки по определению лежат на концах диаметра сферы. Если эти точки не совпадают с полюсами сферы проекций, всегда существует единственная плоскость, содержащая данный диаметр и полярную ось. Сечение сферы проекций этой плоскостью наглядно показывает, что долготы (азимуты) диаметрально противоположных точек различаются на  $180^\circ$  (Рис. 10). Если азимут  $\varphi_A$  заданной точки меньше  $180^\circ$ , то азимут диаметрально противоположной точки получается простым сложением  $\varphi_B = \varphi_A + 180^\circ$ . Если же азимут  $\varphi$  заданной точки превышает  $180^\circ$ , то сложение проводится по модулю  $360^\circ$  и азимут  $\varphi_B$  вычисляется по формуле  $\varphi_B = \varphi_A - 180^\circ$ .

Полярные углы диаметрально противоположных точек  $\rho_B$  и  $\rho_B$



являются взаимно дополнительными до  $180^\circ$  (Рис. 10). Следовательно, координата  $\rho_B$  диаметрально противоположной точки всегда вычисляется так:  $\rho_B = 180^\circ - \rho_A$ .

Рис. 10. К решению задачи 12:

$a$  — сечение сферы проекций, содержащее диаметрально противоположные точки  $A$  и  $B$ . Точки  $N$  и  $S$  — северный и южный полюсы сферы;  $b$  — круг стереографической проекции. Точки  $A'$  и  $B'$  — стереографические проекции диаметрально противоположных точек  $A$  и  $B$

Если же заданная точка находится на любом из полюсов проекций, то их сферические координаты  $\rho_A$  и  $\rho_B$  имеют значения  $0^\circ$  и  $180^\circ$ . Долготы  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  являются неопределенными.

### **Работа с программным комплексом**

Программный комплекс реализован в рамках интегрированной среды *Delphi*. Работа начинается щелчком левой клавиши «мыши» по ярлыку StereoGraph, расположенного на рабочем столе персонального компьютера. При этом на экране дисплея открывается основное окно, предназначенное для управления программным комплексом.

Основное окно программы состоит из двух основных частей: управляющей (правой) и отображающей (левой). Левая часть окна отображает сетку Вульфа. Если поместить курсор на шаблон, то в верхнем левом углу отображающей части появится дополнительное поле со сферическими координатами ( $\rho$  и  $\varphi$ ) той точки круга проекций, на которую указывает курсор.

Скроллинг позволяет повернуть шаблон сетки Вульфа на определенный угол. Однократное нажатие на любую из кнопок прокрутки приводит к повороту шаблона в соответствующую сторону на угол равный  $1^\circ$ . При этом в окне также поддерживается изображение первоначального положения сетки Вульфа.

Правая часть основного окна содержит 4 страницы, на которых расположены элементы управления, реализующие разделы программного комплекса: «Список», «Две точки», «Полюс» и «Печать». Переключение страниц осуществляется щелчком левой клавиши «мыши» по вкладке с названием страницы в верхней части управляющей области. При этом

образом изменяется и содержание области отображения. Для перемещения по заголовкам страниц используются кнопки прокрутки.

**Страница «Список».** Эта страница позволяет задавать сферические координаты точек на сфере проекций. Для ввода координат точки курсор «мыши» помещается в область отображения на шаблон сетки Вульфа. Сферические координаты ( $\rho$  и  $\varphi$ ) текущей точки, на которую указывает курсор «мыши», показаны в верхнем левом углу отображающей части. Щелчок левой кнопки «мыши» позволяет добавить в список координаты точки, находящейся в верхнем полушарии. Для ввода координат точек нижнего полушария требуется во время щелчка удерживать нажатой клавишу «Shift». После ввода в список сферических координат точки в области отображения появляется стереографическая проекция этой точки. Точки верхнего полушария изображаются кружочками, точки нижнего — крестиками. Около каждой проекции ставится номер, соответствующий номеру точки в списке правой части окна.

Выделение строчек списка с помощью левой кнопки «мыши» приводит к изменению цвета соответствующих стереографических проекций. Щелчок правой кнопкой «мыши» в поле списка дает возможность загрузить из внешнего текстового файла заранее подготовленный набор сферических координат точек. Файл данных может быть отредактирован в любом текстовом редакторе.

**Страница «Две точки».** В верхней части этой страницы имеются поля, предназначенные для ввода с клавиатуры сферических координат двух точек сферы проекций. Поля для полярного угла и долготы (азимута) обозначены соответственно буквами  $\rho$  и  $\varphi$ . Значения координат должны задаваться в угловых градусах. Допускается ввод дробной части угла, отделенной точкой.

Переход между полями осуществляется «мышью» либо с клавиатуры при помощи клавиши «Tab». После записи чисел в соответствующих полях следует нажать клавишу «Enter».

Каждая пара координат, идентифицирующая точку, объединена рамкой определенного цвета. Верхняя рамка имеет зеленый цвет, вторая — красный. Соответствующие стереографические проекции в области отображения изображаются теми же цветами.

Расположенная ниже на странице область желтого цвета предназначена для вывода результатов решаемой задачи. Числовые значения углов представляются с точностью до одной угловой секунды.

Для выбора решаемой кристаллографической задачи еще ниже размещена панель с заголовком «Решаемая задача», содержащая триггерный список. После ввода сферических координат двух исходных точек сферы следует выбрать определенный пункт из триггерного списка, соответствующий поставленной задаче. Программа выполнит необходимые вычисления и построит соответствующие стереографические проекции в области отображения.

Пункт «Угловое расстояние» позволяет вычислить указанную величину для заданных точек с точностью до угловой секунды. Числовое значение искомого углового расстояния выдается на желтое поле. Грубую проверку результата можно осуществить, повернув шаблон сетки Вульфа так, чтобы обе точки оказались на одном меридиане. Затем остается непосредственно подсчитать по сетке Вульфа угловое расстояние между данными точками.

Пункт «Дуга большого круга» служит для расчета стереографической проекции такой дуги, проходящей через заданные точки. В поле результата выдаются сферические координаты полюса искомого большого круга, в области отображения прорисовывается желтым цветом соответствующая дуга. Половина большого круга, принадлежащая верхней полусфере, изображается сплошной линией, принадлежащая нижней полусфере — штриховой линией. Также на сетке отображается стереографическая проекция найденного полюса, которая обозначается буквой «Р».

Пункт «Плоскость отражения» строит в области отображения стереографическую проекцию зеркальной плоскости, относительно которой

симметричны заданные точки. Вычисленные сферические координаты полюса этой плоскости выводятся в поле результатов. Кроме того, в области отображения строится желтым цветом стереографическая проекция этого полюса.

Пункт «Ось 2» позволяет вычислять сферические координаты точки, в которой пересекается верхняя полусфера проекций и поворотная оси 2-го порядка, относительно поворота вокруг которой симметричны заданные точки. Эти сферические координаты выводятся в поле результата, а в области отображения строится стереографическая проекция выхода этой оси через верхнюю полусферу. Проекция точки выхода обозначается буквой «А».

Пункт «Совмещение кругов» служит для расчета ориентации оси, поворотом вокруг которой совмещаются две дуги больших кругов. Каждый из кругов должен быть задан сферическими координаты своих полюсов, которые записываются в поля ввода исходных данных. Стереографические проекции обоих полюсов и соответствующие большие круги отображаются цветами рамок исходных сферических координат. Программа вычисляет сферические координаты выхода искомой оси через верхнюю полусферу и угол поворота  $\alpha$ . Результаты выводятся в поле результатов (желтого цвета). Кроме того, в области отображения (на сетке Вульфа) строятся желтым цветом стереографические проекции точек выхода найденной поворотной оси и плоскости, перпендикулярной найденной поворотной оси. Около проекций точек выхода оси ставятся буквы «L».

Пункт «Ось в плоскости проекций» рассчитывает положение оси, лежащей в плоскости проекций, которая связывает поворотом, заданные точки. Также программа проводит вычисление угла поворота  $\alpha$ . Координата  $\varphi$  (азимут) выхода искомой оси и значение угла  $\alpha$  выводятся в поле результатов. В левой области отображаются стереографические проекции заданных точек соответствующими цветами. Стереографические проекции одной из точек выхода найденной оси и перпендикулярной ей плоскости

изображаются желтым цветом. Около проекции точки выхода изображается буква «L».

Пункт «Перемена плоскости» предназначен для пересчета сферических координат точки сферы при изменении плоскости проекций. Поля ввода в зеленой рамке служат для ввода сферических координат полюса новой плоскости проекций. В полях ввода внутри красной рамки устанавливаются сферические координаты произвольной точки. Программа проводит вычисление сферических координат относительно новой системы координат, которая связана с новой плоскостью проекций. Новые координаты выдаются в поле результатов. В левой части окна отображаются соответствующими цветами стереографические проекции полюса и точек со старыми и новыми координатами. Около проекции точки с новыми координатами ставится буква «N».

Пункт «Поворот точки» служит для вычисления сферических координат точек, которые получаются из единственной заданной поворотами вокруг оси  $N$ -го порядка. В полях ввода внутри зеленой рамки задаются сферические координаты точки выхода оси через верхнюю полусферу проекций, в полях ввода внутри красной рамки задаются сферические координаты точки, которая должна поворачиваться. В дополнительное поле ввода «угол поворота», размещенное внизу правой части окна, записывается значение элементарного угла поворота  $360/N$  вокруг заданной оси. В левой части окна на сетке Вульфа отображаются желтым цветом стереографические проекции всех искомым  $N - 1$  точек. Для получения сферических координат полученных точек следует подвести к их проекциям курсор «мыши» и прочесть числовые значения в левом верхнем углу области отображения.

**Страница «Полюс».** Эта страница служит для решения кристаллографических задач, в которых исходной является одна точка сферы проекций.

Вверху страницы «Полюс» имеются два поля, предназначенные для ввода с клавиатуры сферических координат исходной точки. В той же рамке темно-розового цвета находится переключатель с подписью «Отображать полюс». Щелчок левой клавишей «мыши» при наведенном на переключатель курсоре приводит к отображению в области сетки Вульфа стереографической проекции заданной точки. При этом в квадрате переключателя устанавливается «галочка».

Ниже находится панель зеленого цвета с переключателем и подписью «Отображать большой круг». При включении данного переключателя в левой области основного окна отобразится стереографическая проекция большого круга, полюсом которой является заданная точка.

Еще ниже располагается желтая панель с переключателем и подписью «Отображать малый круг». Рядом размещено поле для ввода радиуса круга в угловых градусах. При включении на сетке Вульфа отобразится стереографическая проекция искомого малого круга, центр которого находится в заданной точке.

Цвета стереографических проекций отображаемых элементов совпадают с цветами соответствующих панелей.

**Страница «Печать».** Последняя страница правой части основного окна содержит единственную кнопку «Печатать сетку». При ее нажатии с помощью курсора «мыши» открывается стандартное окно «Печать» с настройками принтера, подключенного к используемому компьютеру. Нажатие кнопки «ОК» приводит к выводу на принтер области сетки Вульфа со всеми находящимися на ней стереографическими проекциями.

## Задание

1. Изучить методику использования стереографической проекции для решения задач кристаллографии по имеющейся учебной литературе. Освоить приемы практической работы с калькой и шаблоном сетки Вульфа.
2. Построить на кальке с помощью сетки Вульфа стереографические проекции нескольких направлений, заданных сферическими координатами. Затем выполнить отображение тех же точек, используя страницу «Список» программного комплекса. Список точек предлагается преподавателем. Проверить совпадение изображений точек на кальке и экране дисплея.
3. Измерить угловые расстояния между парами направлений из заданного списка. Измерения выполнить сначала на кальке с помощью сетки Вульфа, затем используя страницу «Две точки» и пункт «Угловое расстояние» программного комплекса.
4. Построить дугу большого круга, полагая полюсом заданную точку стереографической проекции. Сначала прочертить дугу на кальке, затем изобразить программным путем, используя страницу «Полюс».
5. Построить полюс большого круга, проходящего через две заданные точки сферы. Выполнить на кальке, проверить по программе, используя страницу «Две точки» и пункт «Дуга большого круга».
6. По двум парам точек сферы построить две дуги больших кругов. Измерить угол между этими дугами. Все необходимые построения сначала выполнить на кальке. Затем использовать страницу «Две точки» и пункт «Совмещение кругов».
7. Построить на кальке «малый круг» заданного углового радиуса вокруг стереографической проекции заданного направления. После построения на кальке, использовать страницу «Полюс» программного комплекса.
8. Новая плоскость проекций задается сферическими координатами ее полюса  $\rho_0, \varphi_0$ . Найти новые сферические координаты направлений, приведенных в списке, заданным преподавателем. Для одной точки сферы выполнить

построения на кальке, для всех — использовать страницу «Две точки» и пункт «Перемена плоскости».

9. По заданным сферическим координатам двух направлений вычислить сферические координаты оси, расположенной в плоскости проекций, поворотом вокруг которой совмещаются данные направления. Найти величину угла поворота. Выполнить задание непосредственным построением на кальке и программным путем, используя страницу «Две точки» и пункт «Ось в плоскости проекции».

10. По заданным сферическим координатам двух направлений построить стереографическую проекцию плоскости отражения, относительно которой симметричны данные направления. Вычислить сферические координаты полюса плоскости. После построения на кальке использовать страницу «Две точки» и пункт «Плоскость отражения».

11. По заданным сферическим координатам двух направлений построить стереографическую проекцию оси 2-го порядка, поворотом вокруг которой совмещаются данные направления. Вычислить сферические координаты выхода оси из сферы проекций. Выполнить построения на кальке и использовать страницу «Две точки» и пункт «Ось 2».

12. Заданы сферические координаты поворотной оси  $N$ -го порядка и сферические координаты некоторой точки на поверхности сферы проекций. Вычислить сферические координаты точек сферы, которые получаются поворотами вокруг заданной оси. Исходные сферические координаты и порядок оси задаются преподавателем. Одну точку получить построением на кальке, все — используя страницу «Две точки» и пункт «Поворот точки» программного комплекса.

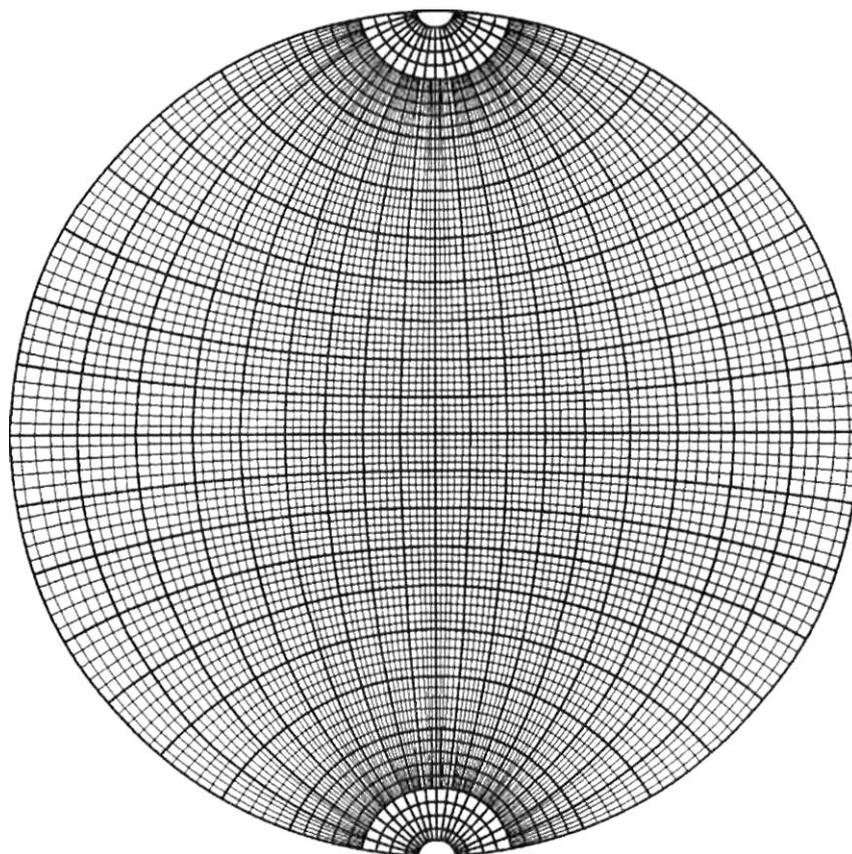
### **Список литературы**

1. Чупрунов Е.В., Хохлов А.Ф., Фаддеев М.А. Основы кристаллографии.— М.: Физматлит, 2004, 500 с.
2. Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография.— М.: Высшая школа, 1972, 356 с.
3. Флинт Е. Е. Практическое руководство по геометрической кристаллографии.— М.: Госгеолтехиздат, 1956, 208 с.
4. Волынский Б. А. Сферическая тригонометрия.— М.: Наука, 1977. 136 с.
5. Розенфельд Б.А., Сергеева Н.Д. Стереографическая проекция.— М.: Наука, 1973.
6. Тархова Т.Н. Стереографическая проекция и сетка Вульфа.— Горький: Изд-во ГГУ, 1974, 26 с.

## Приложение 1

### Сетка Вульфа

Сетка Вульфа может быть получена как стереографическая проекция сферы с нанесенной на нее градусной сеткой параллелей и меридианов. Для получения сетки Вульфа сферу следует расположить таким образом, чтобы оба полюса сферы расположились на окружности, ограничивающей круг проекций. При этом полярная ось сферы совмещается с осью декартовой системы координат на круге проекций (см. Рис. 3). Ось  $X$  оказывается лежащей в экваториальной плоскости проецируемой сферы. Точка зрения стереографической проекции имеет декартовые координаты  $(0, 0, R)$ , где  $R$  — радиус сферы.



*Рис.11. Сетка Вульфа*

Далее по приведенным выше правилам строятся стереографические проекции параллелей и меридианов полусферы,

расположенной над кругом проекций. Проекция меридианов строится как проекция дуг больших кругов, проекция параллелей — как проекция малых кругов. В результате на круге проекций образуется сетка Вульфа, изображенная на Рис.11.