



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

«СОГЛАСОВАНО»

Руководитель образовательной программы

А.С. Величко

«15» июля 2017 г.

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой  
математических методов в экономике

А.С. Величко

«15» июля 2017 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
Теория и методы оптимизации  
**Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика**  
профиль «Математические методы в экономике»  
**Форма подготовки очная**

курс 3 семестр 1  
лекции 36 час.  
практические занятия 18 час.  
лабораторные работы 18 час.  
в том числе с использованием МАО лек. 0 час. / пр. 0 час. / лаб. 18 час.  
всего часов аудиторной нагрузки 72 час.  
в том числе с использованием МАО 0 час.  
самостоятельная работа 72 час.  
в том числе на подготовку к экзамену 27 час.  
контрольные работы (количество) 3  
курсовая работа / курсовой проект не предусмотрены  
зачет не предусмотрены  
экзамен 5 семестр

Рабочая программа учебной дисциплины (РПУД) составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта по направлению 01.03.04 «Прикладная математика», самостоятельно устанавливаемого ДВФУ, утвержденного приказом ректора от 18.02.2016 № 12-13-235

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры математических методов в экономике, протокол №16 от «15» июля 2017 г.

Заведующий кафедрой математических методов в экономике, к.ф.-м.н., доцент А.С. Величко

Составители:

профессор кафедры математических методов в экономике д.ф.-м.н., профессор Е.А. Нурминский,  
старший преподаватель кафедры математических методов в экономике Е.А. Воронцова

## АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Теория и методы оптимизации» предназначена для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», профиль «Математические методы в экономике».

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 4 зачетные единицы (144 часа). Дисциплина реализуется на 3 курсе в 5-м семестре. Дисциплина входит в базовую часть блока «Дисциплины (модули)».

Особенности построения курса: лекции (36 часов), практические занятия (18 часов), лабораторные работы (18 часов), самостоятельная работа (45 часов), подготовка к экзамену (27 часов).

Содержание дисциплины охватывает следующий круг вопросов: основы теории оптимизации, численные методы решения экстремальных задач, программное обеспечение для решения экстремальных задач.

**Цель** – ознакомить с основами теории оптимизации, численными методами решения экстремальных задач, практикой применения оптимизационных подходов, специальным программным обеспечением.

### **Задачи:**

#### **научно-исследовательская деятельность:**

- математическое моделирование процессов и объектов на базе стандартных пакетов автоматизированного проектирования и исследований;
- анализ и выработка решений в конкретных предметных областях;
- отладка наукоемкого программного обеспечения;
- изучение научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта по тематике исследования;
- подготовка данных для составления обзоров, отчетов и научных публикаций;

#### **производственно-технологическая деятельность:**

- сбор и анализ исходных данных;

- проведение экспериментов по заданной методике, составление описания проводимых исследований и анализ результатов;
- составление отчета по выполненному заданию, участие во внедрении результатов исследований и разработок;
- разработка и расчет вариантов решения проблемы, анализ этих вариантов.

Для успешного изучения дисциплины «Теория и методы оптимизации» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

- способностью использовать стандартные пакеты прикладных программ для решения практических задач на электронных вычислительных машинах, отлаживать, тестировать прикладное программное обеспечение;
- способностью и готовностью настраивать, тестировать и осуществлять проверку вычислительной техники и программных средств;
- способностью и готовностью демонстрировать знания современных языков программирования, операционных систем, информационно-телекоммуникационной сети "Интернет".

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие общекультурные, общепрофессиональные, профессиональные компетенции (элементы компетенций).

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-2 - способность использовать современные	Знает	современные математические методы и современные прикладные программные средства для решения оптимизационных задач

математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования	Умеет	разрабатывать математические методы численного решения оптимизационных задач
	Владеет	эффективными математическими методами решения задач оптимизации
ПК-9 - способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовность использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат	Знает	современные методы решения проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и сводящихся к задачам минимизации или максимизации функций многих переменных
	Умеет	разрабатывать и применять современные методы решения проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и сводящихся к задачам минимизации или максимизации функций многих переменных
	Владеет	навыками использования эффективных современных методов математического моделирования проблем, имеющих естественнонаучную сущность

## **I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

**Раздел I. Основные понятия теории экстремальных задач (8 часов).**

**Тема 1. Необходимые и достаточные условия экстремума в задачах безусловной оптимизации (2 часа).**

Правило множителей Лагранжа в задачах с ограничениями-равенствами. Теория экстремальных задач с ограничениями типа неравенств.

**Тема 2. Седловые точки функции Лагранжа (4 часа).**

Условие Слейтера для задач выпуклой оптимизации. Теорема Милютина-Дубовицкого. Дифференциальные формы условий экстремальности, теорема Куна-Таккера.

**Тема 3. Теория чувствительности экстремальных задач (2 часа).**

Условия регулярности. Параметрический анализ. Условия экстремальности в задачах невыпуклой и недифференцируемой выпуклой оптимизации.

**Раздел II. Численные методы решения задач безусловной оптимизации (10 часов).**

**Тема 4. Методы одномерной минимизации (2 часа).**

Метод дихотомии, поиск Фибоначчи.

**Тема 5. Методы первого порядка для решения задач безусловной оптимизации (2 часа).**

Градиентные методы. Скорость сходимости градиентного метода. Правило Армихо.

**Тема 6. Методы второго порядка (2 часа).**

Метод Ньютона и его вариации. Метод Ньютона для решения систем уравнений. Метод Ньютона для решения экстремальных задач. Метод Ньютона с регулировкой шага. Метод доверительных областей.

**Тема 7. Метод сопряженных градиентов и направлений (2 часа).**

Системы сопряженных векторов, метод сопряженных градиентов. Пример использования метода сопряженных градиентов. Варианты метода сопряженных градиентов.

**Тема 8. Квазиньютоновские методы (2 часа).**

Одноранговая коррекция, двуранговая коррекция, методы Бройденского типа.

**Раздел III. Теория и численные методы решения условных экстремальных задач (10 часов).**

**Тема 9. Методы штрафных и барьерных функций (2 часа).**

Точные штрафные функции.

**Тема 10. Методы прямого учета ограничений (6 часов).**

Метод условного градиента. Метод возможных направлений. Метод проекций градиента. Метод модифицированной функции Лагранжа. Метод

линеаризации.

**Тема 11. Двойственные алгоритмы (2 часа).**

Сопряженные функции и двойственность. Монотропическая оптимизация. Квадратичное программирование с двойственной точки зрения.

**Раздел IV. Информационные и вычислительные технологии в решении экстремальных задач (8 часов).**

**Тема 12. Язык описания оптимизационных задач AMPL (4 часа).**

Технологии разработки прикладного программного обеспечения. Технология проектирования сверху-вниз и ее поддержка в системах литературного программирования.

**Тема 13. Системы управления версиями программного обеспечения (4 часа).**

Форматы данных и языки описания экстремальных задач. Сетевые и облачные технологии решения оптимизационных задач.

**II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ  
КУРСА**

**Практические занятия (18 часов)**

**Занятие 1. Решение конечномерных экстремальных задач (4 часа)**

1. Решение конечномерных экстремальных задач без ограничений.
2. Решение гладких конечномерных экстремальных задач с ограничениями типа равенств.
3. Решение гладких конечномерных экстремальных задач со смешанными ограничениями типа равенств и неравенств.
4. Решение квадратичных и нелинейных оптимизационных задач с помощью программы матрично-векторных вычислений octave (свободно распространяемый программный продукт, совместимый с коммерческим пакетом MATLAB).

## **Занятие 2 Реализация численных методов решения оптимизационных задач на языке программирования octave (7 часов)**

1. Одномерная минимизация (метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод Ньютона с адаптивным шагом).
2. Градиентный метод с правилом Армихо.
3. Системы сопряженных векторов, метод сопряженных градиентов для квадратичных функций.
4. Квазиньютоновский метод с одноранговой коррекцией.

## **Занятие 3. Численные методы решения условных экстремальных задач (2 часа)**

1. Метод проекции градиента.
2. Реализация метода штрафных функций.

## **Занятие 4. Форматы представления оптимизационных задач для типовых солверов (5 часов)**

1. Язык моделирования AMPL.
2. Решение условных и безусловных экстремальных задач с использованием программы MINOS.
3. Использование сетевых оптимизационных сервисов на примере оптимизационного комплекса NEOS.

## **Лабораторные работы (18 часов)**

**Лабораторная работа № 1.** Решение квадратичных и нелинейных оптимизационных задач с помощью программы матрично-векторных вычислений octave (2 часа).

**Лабораторная работа № 2.** Реализация численных методов решения оптимизационных задач на языке программирования octave: одномерная минимизация (метод дихотомии, метод золотого сечения) (2 часа).

**Лабораторная работа № 3.** Реализация численных методов решения оптимизационных задач на языке программирования octave: одномерная

минимизация (метод Фибоначчи, метод Ньютона с адаптивным шагом) (2 часа).

**Лабораторная работа № 4.** Градиентный метод с правилом Армихо (2 часа).

**Лабораторная работа № 5.** Метод сопряженных градиентов для квадратичных функций (2 часа).

**Лабораторная работа № 6.** Квазиньютоновский метод с одноранговой коррекцией (2 часа).

**Лабораторная работа № 7.** Язык моделирования AMPL (2 часа).

**Лабораторная работа № 8.** Решение условных и безусловных экстремальных задач с использованием программы MINOS (2 часа).

**Лабораторная работа № 9.** Использование сетевых оптимизационных сервисов на примере оптимизационного комплекса NEOS (2 часа).

### **III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Теория и методы оптимизации» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

### **IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА**



Контролируемые разделы дисциплины, этапы формирования компетенций, виды оценочных средств, зачетно-экзаменационные материалы, комплекты оценочных средств для текущей аттестации, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

## **V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Основная литература**

*(электронные и печатные издания)*

1. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. М.: Физматлит, 2008. Режим доступа: 1)  
<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:674376&theme=FEFU> ; 2)  
<http://www.iprbookshop.ru/25191>
2. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Физматгиз, 1999. Режим доступа:  
<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:9611&theme=FEFU> В библиотеке ДВФУ доступно 14 экземпляров.
3. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учеб. пособие. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с. <http://www.iprbookshop.ru/24633>

### **Дополнительная литература**

*(печатные и электронные издания)*

1. Половинкин Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2279](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2279)
2. Карманов В.Г. Математическое программирование. 4-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/24542>
3. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. Режим доступа: 1) <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:52919&theme=FEFU> ; 2) <http://www.iprbookshop.ru/17283>

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети  
«Интернет»**

1. NEOS Server: State-of-the-Art Solvers for Numerical Optimization. URL: <http://neos-server.org/neos/>
2. GNU Octave. URL: <http://www.gnu.org/software/octave/>
3. AMPL. URL: <http://ampl.com/>
4. Лекции и другие учебные материалы Е.А. Нурминского. URL: <http://elis.dvo.ru/~nurmi/edu/index.html>
5. Учебник С. Бойда по выпуклой оптимизации: <http://stanford.edu/~boyd/cvxbook/>

**Перечень дополнительных информационно-методических  
материалов**

1. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. Режим доступа: <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:749907&theme=FEFU>
2. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010. Режим доступа: <http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:300870&theme=FEFU>

3. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и приложения. М.: УРСС, 2003. Режим доступа:

<http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:3519&theme=FEFU>

4. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи: Учебное пособие. М.: Едиториал УРСС, 2002. 304 с.

### **Перечень информационных технологий и программного обеспечения**

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется свободно распространяемое программное обеспечение Octave, LibreOffice, TeX/LaTeX, операционная система Linux, удаленный доступ к сетевому оптимизационному серверу NEOS.

## **VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Рекомендации по планированию и организации времени, отведенного на изучение дисциплины, описание последовательности действий обучающихся**

Освоение дисциплины следует начинать с изучения рабочей учебной программы, которая содержит основные требования к знаниям, умениям и навыкам. Обязательно следует учитывать рекомендации преподавателя, данные в ходе установочных занятий. Затем – приступить к изучению отдельных разделов и тем в порядке, предусмотренном программой.

Получив представление об основном содержании раздела, темы, необходимо изучить материал с помощью рекомендуемой основной литературы. Целесообразно составить краткий конспект или схему, отображающую смысл и связи основных понятий данного раздела и включенных в него тем. Обязательно следует записывать возникшие вопросы, на которые не удалось ответить самостоятельно.

Подготовку к началу обучения включает несколько необходимых пунктов:

- 1) Необходимо создать для себя рациональный и эмоционально достаточный уровень мотивации к последовательному и планомерному изучению дисциплины.
- 2) Необходимо изучить список рекомендованной основной и дополнительной литературы и убедиться в её наличии у себя дома или в библиотеке в бумажном или электронном виде.
- 3) Необходимо иметь «под рукой» специальные и универсальные словари, справочники и энциклопедии, для того, чтобы постоянно уточнять значения используемых терминов и понятий. Пользование словарями и справочниками необходимо сделать привычкой. Опыт показывает, что неудовлетворительное усвоение предмета зачастую коренится в неточном, смутном или неправильном понимании и употреблении понятийного аппарата учебной дисциплины.
- 4) Желательно в самом начале периода обучения возможно тщательнее спланировать время, отводимое на работу с источниками и литературой по дисциплине, представить этот план в наглядной форме (график работы с датами) и в дальнейшем его придерживаться, не допуская срывов графика индивидуальной работы и «аврала» в предсессионный период. Пренебрежение этим пунктом приводит к переутомлению и резкому снижению качества усвоения учебного материала.

### **Рекомендации по работе с литературой**

- 1) Всю учебную литературу желательно изучать «под конспект». Чтение литературы, не сопровождаемое конспектированием, даже пусть самым кратким – бесполезная работа. Цель написания конспекта по дисциплине – сформировать навыки по поиску, отбору, анализу и формулированию

учебного материала. Эти навыки обязательны для любого специалиста с высшим образованием независимо от выбранной специальности.

- 2) Написание конспекта должно быть творческим – нужно не переписывать текст из источников, но пытаться кратко излагать своими словами содержание ответа, при этом максимально структурируя конспект, используя символы и условные обозначения. Копирование и «заучивание» неосмысленного текста трудоемко и по большому счету не имеет большой познавательной и практической ценности.
- 3) При написании конспекта используется тетрадь, поля в которой обязательны. Страницы нумеруются, каждый новый вопрос начинается с нового листа, для каждого экзаменационного вопроса отводится 1-2 страницы конспекта. На полях размещается вся вспомогательная информация – ссылки, вопросы, условные обозначения и т.д.
- 4) В итоге данной работы «идеальным» является полный конспект по программе дисциплины, с выделенными определениями, узловыми пунктами, примерами, неясными моментами, проставленными на полях вопросами.
- 5) При работе над конспектом обязательно выявляются и отмечаются трудные для самостоятельного изучения вопросы, с которыми уместно обратиться к преподавателю при посещении установочных лекций и консультаций, либо в индивидуальном порядке.
- 6) При чтении учебной и научной литературы всегда следить за точным и полным пониманием значения терминов и содержания понятий, используемых в тексте. Всегда следует уточнять значения по словарям или энциклопедиям, при необходимости записывать.
- 7) При написании учебного конспекта обязательно указывать все прорабатываемые источники, автор, название, дата и место издания, с указанием использованных страниц.

## **Подготовка к промежуточной аттестации по дисциплине: экзамену (зачету)**

К аттестации допускаются студенты, которые систематически в течение всего семестра посещали и работали на занятиях и показали уверенные знания в ходе выполнения практических заданий и лабораторных работ.

Непосредственная подготовка к аттестации осуществляется по вопросам, представленным в рабочей учебной программе. Тщательно изучите формулировку каждого вопроса, вникните в его суть, составьте план ответа. Обычно план включает в себя:

- определение сущности рассматриваемого вопроса, основных положений, утверждений, определение необходимости их доказательства;
- запись обозначений, формул, необходимых для полного раскрытия вопроса;
- графический материал (таблицы, рисунки, графики), необходимые для раскрытия сущности вопроса;
- роль и значение рассматриваемого материала для практической деятельности, примеры использования в практической деятельности.

## **VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине необходима лекционная аудитория мультимедийного типа (мультимедийный проектор, настенный экран, документ-камера) и компьютерный класс с персональными компьютерами с установленной локально или удаленно загружаемой операционной системой Linux, доступом в сеть «Интернет» с возможностью удаленной работы по протоколам SSH.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

---

---

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ  
РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**  
по дисциплине «Теория и методы оптимизации»  
Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика  
профиль «Математические методы в экономике»  
Форма подготовки очная

**Владивосток  
2017**

## План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	4 неделя	Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины,	14 часов	Тест
2	8 неделя	Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях.	8 часов	Расчетно-графическая работа
3	10 неделя	Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций	14 часов	Собеседование
4	12 неделя	Самостоятельная реализация изучаемых численных методов решения оптимизационных задач; самостоятельный повтор действий, осуществляемых в ходе выполнения практических заданий, в том числе при работе со специальным программным обеспечением — языком программирования octave	9 часов	Разноуровневые задачи и задания



	Сессия	Повторение теоретического и практического материала дисциплины; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины	27 часов	Экзамен
--	--------	---	----------	---------

## Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению

1. Найти стационарные точки функции  $f(x,y) = x y \log(x^2 + y^2)$ .
2. Задана точка  $x$  и вектор  $d$ . Для квадратичной функции  $x^T H x + b x$  определить значение скалярного параметра  $t$  такое, что  $q(x + t d) = \min q(x + \tau d)$ .
3. Найти расстояние между двумя прямыми, заданными в параметрической форме.

### Одномерные задачи

1. Вокруг кругового цилиндра с радиусом основания  $r$  и высотой  $h$  описан соосный круговой конус минимального объема. Определить отношение объемов конуса и цилиндра.
2. Найти глубину провисания цепочки, состоящей из 4-х шарнирно соединенных звеньев единичной длины, концы которой также шарнирно закреплены в точках  $(0, 0)$  и  $(2, 0)$ . Силу тяжести считать везде постоянной. Описать эту задачу в виде проблемы нахождения расположения цепочки, минимизирующей суммарную потенциальную энергию и найти провисание цепочки с точностью  $10^{-5}$ , используя метод Фибоначчи.
3. Из точки  $(0,-30)$  в точку  $(20, 30)$  (все в километрах) необходимо провести линию электропередач. территория прокладки линии делится на 2 зоны --- лесную и полевою, граница между которыми представляет собой линию  $y(x) = 4 - 0.02 (x-7)^3$ . Лесная часть территории располагается ниже этой линии, полевая --- выше. Стоимость прокладки 1 км линии по лесистой зоне составляет 800 тыс. руб/км, полевою 500 тыс. руб/км. Требуется найти оптимальный ( минимальный по стоимости ) вариант прокладки линии.

### Методы второго порядка

1. Реализовать обобщенную процедуру Грамма-Шмидта для построения по заданному набору линейно независимых векторов и положительно определенной симметричной матрицы  $A$  систему векторов, сопряженных относительно  $A$ .

2. Найти глубину провисания цепочки, состоящей из 6,7,8 и т.д. шарнирно соединенных звеньев единичной длины, концы которой также шарнирно закреплены в точках  $(0, 0)$  и  $(2, 0)$ . Силу тяжести считать везде постоянной. Описать эту задачу в виде проблемы нахождения расположения цепочки, минимизирующей суммарную потенциальную энергию и, используя программу MINOS, решить эту задачу.

3. Используя MINOS, решить задачу квадратичного программирования  $\min \{x^T H x + g^T x\}$  где матрица  $H$  и вектор  $g$  заданы в файлах  $H.dat$  и  $g.dat$ , а переменная  $x$  принадлежит допустимому множеству, которое задано условиями:  $A x \leq b$ . Матрица  $A$  и вектор  $b$  находятся в файле  $Ab.dat$ . Для облегчения подготовки данных можно воспользоваться файлом  $VARIANT.dat$ , расположенным в директории  $/dev/shm$ . В этом файле находится расширенная матрица  $\begin{bmatrix} H & g \\ A & b \end{bmatrix}$ , матрица ограничений  $A$  и правая часть системы ограничений  $b$ , в таком порядке.

В качестве отчета представить:

1. файл  $MINOSprog.f$  с текстом программ;
2. файл  $MINOS.RES$  с протоколом работы MINOS;
3. файлы  $MPS.DAT$ ,  $SPECS.DAT$ , пояснительные материалы.

4. Используя ППП  $octave$ , реализовать метод золотого сечения и решить численно с точностью до 4-х знаков относительно значения целевой функции задачу  $\min f(x), 0 \leq x \leq 1$ .

В качестве отчета представить:

1. файл prog.os с текстом программы;
2. файл z2.protocol с протоколом работы программы, в котором ясно должен быть показан ход вычислений и конечный результат - оптимальные значения переменных и минимальное значение целевой функции;
3. пояснительные материалы по усмотрению.

5. Используя MINOS, решить задачу нелинейного программирования

$\min z$

при ограничениях:

$$x^T H_1 x + g_1^T x - z \leq a_1, \quad x^T H_2 x + g_2^T x - z \leq a_2$$

где матрицы  $H_1, H_2$  и векторы  $g_1, g_2$  заданы в соответствующих файлах.

В качестве отчета представить:

1. файл MINOSprog.f с текстом программ;
2. файл MINOS.RES с протоколом работы MINOS;
3. файлы MPS.DAT, SPECS.DAT, пояснительные материалы.

6. Используя сетевой оптимизационный сервер NEOS и солвер MINOS,

решить задачу квадратичного программирования

$\min cx$  при ограничениях  $x^T Hx + gx \leq a$ , где матрица  $H$  и вектора  $c, g$  заданы в файлах  $H.dat$  и  $c.dat, g.dat$

В качестве отчета представить файл протокола работы сетевого сервера, проверку решения на оптимальность.

### **Требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы**

Самостоятельная работа включает в себя повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной

литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам занятий; самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях; самостоятельный повтор действий, осуществляемых в ходе выполнения лабораторных работ, в том числе при работе со специальным программным обеспечением — языком программирования octave, программой MINOS, оптимизационным сервером NEOS.

Результаты самостоятельной работы представляются и оформляются в виде ответов на основные положения теоретического и практического материала дисциплины по темам; письменного разбора процесса решения практических заданий и задач; собственных действий, осуществляемых в ходе выполнения практических заданий.

В случае подготовки слайдов для защиты проекта, слайды должны быть подготовлены с помощью системы компьютерной подготовки презентаций BEAMER. Основная цель использования слайдов - служить вспомогательным инструментом к подготовленному выступлению, цитирование больших фрагментов текста на слайдах не допускается. Приветствуется использование рисунков, графиков, таблиц, интерактивного материала, однако, следует предусмотреть выбор цвета и толщину линий.

Слайды должны содержать титульный лист, цели и задачи (не более 2-х слайдов с обзором актуальности, новизны, теоретической и практической значимости работы), основные публикации с их кратким обзором (1-2 слайда), формальную постановку задачи и формулировку моделей (1-2 слайда), краткое тезисное (!) изложение ключевых положений работы (разумное количество слайдов с учетом общего времени выступления), заключение (с изложением результатов работы, подведением выводов, обсуждением практического использования работы, возможностей проведения дальнейших исследований и разработок в данной области).

Как правило, 12-15 слайдов оказывается достаточным для полного представления работы.

### **Критерии оценки выполнения самостоятельной работы**

Общие критерии оценки выполнения самостоятельной работы – правильность ответов на вопросы по темам теоретической части дисциплины, верность получаемых ответов в ходе решения практических заданий и задач, достижение правильного результата при осуществлении собственных действий по лабораторным работам.

Оценивание знаний в форме собеседования проводится по критериям:

- логичность изложения, знание и понимание основных понятий теории оптимизации, признаков оптимальности, распространенных алгоритмов решения экстремальных задач;
- владение методами и приемами анализа теоретических и/или практических аспектов по теме «Теория и методы оптимизации».

Оценка знаний в форме проекта проводится по критериям:

- завершенность и полнота выполненных заданий в рамках проекта;
- владение методами и приемами решения конкретных задач и самостоятельность использования специализированного программного обеспечения;
- качество оформления письменного отчета в соответствии с правилами и стандартами оформления.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)

---

---

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по дисциплине «Теория и методы оптимизации»  
Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика  
профиль «Математические методы в экономике»  
Форма подготовки очная

Владивосток  
2017

**Паспорт  
фонда оценочных средств  
по дисциплине «Теория и методы оптимизации»**

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-2 - способность использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования	Знает	современные математические методы и современные прикладные программные средства для решения оптимизационных задач
	Умеет	разрабатывать математические методы численного решения оптимизационных задач
	Владеет	эффективными математическими методами решения задач оптимизации
ПК-9 - способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовность использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат	Знает	современные методы решения проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и сводящихся к задачам минимизации или максимизации функций многих переменных
	Умеет	разрабатывать и применять современные методы решения проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и сводящихся к задачам минимизации или максимизации функций многих переменных
	Владеет	навыками использования эффективных современных методов математического моделирования проблем, имеющих естественнонаучную сущность

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства - наименование		
			текущий контроль	промежуточная аттестация	
1	Основные понятия теория экстремальных задач	ОПК-2	Знает	Тест (ПР-1)	Экзамен, вопросы 1, 7
			Умеет	Расчетно-графическая работа (ПР-12)	Экзамен, вопросы 1, 7



			Владеет	Расчетно-графическая работа (ПР-12)	Экзамен, вопросы 1, 7
		ПК-9	Знает	Тест (ПР-1)	Экзамен, вопросы 1, 7
			Умеет	Расчетно-графическая работа (ПР-12)	Экзамен, вопросы 1, 7
			Владеет	Расчетно-графическая работа (ПР-12)	Экзамен, вопросы 1, 7
2	Численные методы решения задач безусловной и условной оптимизации	ОПК-2	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 2-6, 8
			Умеет	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 2-6, 8
			Владеет	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 2-6, 8
		ПК-9	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 2-6, 8
			Умеет	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 2-6, 8
			Владеет	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 2-6, 8
3	Информационные и вычислительные технологии в решении экстремальных задач	ОПК-2	Знает	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 1-8
			Умеет	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 1-8
			Владеет	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 1-8
		ПК-9	Знает	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 1-8
			Умеет	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 1-8
			Владеет	Разноуровневые задачи и задания (ПР-11)	Экзамен, вопросы 1-8

### Зачетно-экзаменационные материалы

#### Вопросы для подготовки к экзамену

## по дисциплине «Теория и методы оптимизации»

1. Задача нелинейной безусловной минимизации (ЗНБМ). Необходимые и достаточные условия экстремума.
2. Методы одномерной минимизации. Обоснование, скорость сходимости.
3. Градиентный метод решения ЗНБМ. Регулировка шага, доказательство сходимости. Правило Армихо выбора шаговых множителей в градиентном методе. Скорость сходимости градиентного метода.
4. Метод Ньютона для решения ЗНБМ. Оценка скорости сходимости.
5. Метод сопряженных градиентов для квадратичной функции. Понятие о сопряженной системе векторов. Построение сопряженной системы векторов. Доказательство конечной сходимости.
6. Метод сопряженных градиентов для неквадратичных функций.
7. Необходимые и достаточные условия экстремума в задаче условной оптимизации с ограничениями-равенствами.
8. Условия регулярности в задаче условной оптимизации.

### **Комплекты оценочных средств для текущей аттестации**

#### **Вопросы для собеседования**

## по дисциплине «Теория и методы оптимизации»

1. Задача нелинейной безусловной минимизации (ЗНБМ). Необходимые и достаточные условия экстремума.
2. Методы одномерной минимизации. Обоснование, скорость сходимости.

3. Градиентный метод решения ЗНБМ. Регулировка шага, доказательство сходимости. Правило Армихо выбора шаговых множителей в градиентном методе. Скорость сходимости градиентного метода.
4. Метод Ньютона для решения ЗНБМ. Оценка скорости сходимости.
5. Метод сопряженных градиентов для квадратичной функции. Понятие о сопряженной системе векторов. Построение сопряженной системы векторов. Доказательство конечной сходимости.
6. Метод сопряженных градиентов для неквадратичных функций.

Критерии оценки:

- ✓ 100-86 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.
- ✓ 85-76 - баллов - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.
- ✓ 75-61 - балл – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные

затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий;  
стремление логически определенно и последовательно изложить ответ.

- ✓ 60-50 баллов – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

### Фонд тестовых заданий

по дисциплине «Теория и методы оптимизации»

1. Какие из следующих функций выпуклы? Выбрать все подходящие ответы.

а) Квадратичная

б) Линейная

в)  $f(x) = (x^2 + 1) / (x + 2)$ ,  $\text{dom } f = (-\infty, -2)$

г)  $f(x) = 1 / (1 - x^2)$ ,  $\text{dom } f = (-1, 1)$

2. Пусть  $(x)^+ = \max\{0, x\}$  and  $(x)^- = \max\{0, -x\}$ , т.е.  $x = (x)^+ - (x)^-$ .

Является ли множество  $\{x \mid \mathbf{1}'(x)^- \leq (\frac{1}{2}) \mathbf{1}'(x)^+\}$  выпуклым?

а) Да

б) Нет

3. Стационарные точки целевой функции являются оптимальными.

а) Это всегда верно

б) Это неверно

в) Эти точки могут доставлять только максимум

4. В каком случае можно считать, что множитель Лагранжа, соответствующий целевой функции, равен 1?

а) Если выполняется условие регулярности Слейтера

- б) Если целевая функция дважды дифференцируема
- в) Если в исходной задаче нет ограничений типа неравенств
- г) Если выполняется условие регулярности Слейтера и исходная задача является задачей на минимум
- д) Если исходная задача является задачей на максимум

5. При каких значениях параметров функция  $f(x) = a e^{2x} + b e^x + c$  является выпуклой?

- а)  $a \geq 0, b \geq 0, c$  - любое
- б)  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$
- в)  $a \geq 0, b \leq 0, c$  - любое
- г)  $a \geq 0, b, c$  - любые

Критерии оценки:

- ✓ 100-86 баллов выставляется, если студент правильно ответил на 86 % и более вопросов.
- ✓ 85-76 - баллов — студент правильно ответил на 76-85 % вопросов.
- ✓ 75-61 балл – студент правильно ответил на 75-61 % вопросов.
- ✓ 60-50 баллов - студент правильно ответил на 50-60 % вопросов.

# Комплект заданий для выполнения расчетно-графических работ

## по дисциплине «Теория и методы оптимизации»

22

Глава 1. Экстремальные задачи

Матрица  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  по критерию Сильвестра не является неотрицательно определенной матрицей ( $A \not\geq 0$ ). Следовательно, не выполняется необходимое условие локального минимума. Поэтому точки  $(0, \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi)$  не доставляют локального минимума. Точки локального минимума могли быть только среди стационарных точек, но там их не оказалось. Следовательно, нет ни одного локального минимума.

### 1.5. Задачи, упражнения

В задачах 1.1–1.17 без ограничений найти стационарные точки, проверить их на экстремальность, а также найти все локальные и глобальные минимумы и максимумы.

1.1.  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2} \rightarrow \text{extr.}$

1.2.  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{extr.}$

1.3.  $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 - 16x_1 - 12x_2 \rightarrow \text{extr.}$

1.4.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3 \rightarrow \text{extr.}$

1.5.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 3x_2 x_3 - x_1 \rightarrow \text{extr.}$

1.6.  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 \rightarrow \text{extr.}$

1.7.  $f(x_1, x_2) = 3x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 \rightarrow \text{extr.}$

1.8.  $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^4 \rightarrow \text{extr.}$

1.9.  $f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \text{extr.}$

1.10.  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2) \rightarrow \text{extr.}$

1.11.  $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3 (6 - x_1 - x_2) \rightarrow \text{extr.}$

1.12.  $f(x_1, x_2) = e^{2x_1 + 3x_2} (8x_1^2 - 6x_1 x_2 + 3x_2^2) \rightarrow \text{extr.}$

1.13.  $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - x_2} (5 - 2x_1 + x_2) \rightarrow \text{extr.}$

1.14.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3 (7 - x_1 - 2x_2 - 3x_3) \rightarrow \text{extr.}$

1.15.  $f(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 (t^2 + x_2 t + x_1)^2 dt \rightarrow \min$

(задача о полиномах Лежандра второй степени).

$$1.16. f(x_1, x_2, x_3) = \int_{-1}^1 (t^3 + x_3 t^2 + x_2 t + x_1)^2 dt \rightarrow \min.$$

(задача о полиномах Лежандра третьей степени).

1.17. Найти экстремумы неявно заданной функции двух переменных  $x_3 = f(x_1, x_2)$ , если

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0.$$

## § 2. Конечномерные гладкие задачи с равенствами

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия экстремума в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств.

### 2.1. Постановка задачи

Пусть  $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , — функции  $n$  переменных. Считаем, что все функции  $f_i$  обладают определенной гладкостью. Гладкой конечномерной экстремальной задачей с ограничениями типа равенств называется следующая задача:

$$f_0(x) \rightarrow \text{extr}; \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (P)$$

### 2.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

#### 2.2.1. Принцип Лагранжа

Сформулируем необходимое условие экстремума I порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств — принцип Лагранжа.

**Теорема.** Пусть  $\hat{x} \in \text{locextr } P$  — точка локального экстремума в задаче (P), а функции  $f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , непрерывно дифференцируемы в окрестности точки  $\hat{x}$  (условие гладкости). Тогда существует ненулевой вектор множителей Лагранжа  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$ ,  $\lambda \neq 0$ , такой, что для функции Лагранжа задачи (P)  $\Lambda(x) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$  выполняется условие стационарности

$$\Lambda_x(\hat{x}) = 0 \iff \frac{\partial \Lambda(\hat{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \iff \sum_{i=0}^m \lambda_i f'_i(\hat{x}) = 0.$$

Это соотношение называется *условием стационарности*. Точки, удовлетворяющие условию стационарности, называются *стационарными*.

- 2.12.  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}; \quad x_1^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 4)^2 = 1.$
- 2.13.  $x_1 x_2^2 x_3^3 \rightarrow \text{extr}; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$
- 2.14.  $x_1 x_2^2 x_3^3 \rightarrow \text{extr}; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$
- 2.15. Найти минимум линейной функции  $f(x) = \langle a, x \rangle$ ,  $a, x \in \mathbf{R}^n$ , на единичном шаре  $\langle x, x \rangle = 1$ .
- 2.16. Найти расстояние от точки  $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$  до гиперплоскости  $\langle a, x \rangle = b$ ,  $a \in \mathbf{R}^n$ ,  $b \in \mathbf{R}$ .
- 2.17. Найти расстояние от точки  $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$  до прямой  $x = at + b$ ,  $a, b \in \mathbf{R}^n$ .
- 2.18. Найти максимальную площадь прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, вписанного в эллипс  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ .
- 2.19. Найти максимальный объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами, параллельными осям координат, вписанного в эллипсоид  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$ .
- 2.20. Решить задачу Аполлония для параболы.
- 2.21. Решить задачу Аполлония для гиперболы.

**БИБЛИОТЕКА**

### § 3. Конечномерные гладкие задачи с равенствами и неравенствами

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия экстремума в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств и неравенств.

#### 3.1. Постановка задачи

Пусть  $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , — функции  $n$  переменных, отображающие пространство  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}$ . Считаем, что все функции  $f_i$  обладают определенной гладкостью. *Гладкой конечномерной экстремальной задачей с ограничениями типа равенств и неравенств* называется следующая задача в  $\mathbf{R}^n$ :

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min; & f_i(x) &\leq 0, & i &= 1, \dots, m', \\ f_i(x) &= 0, & i &= m' + 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (P)$$

В задачах, где имеются ограничения типа неравенств, важно, рассматриваемая задача на минимум или максимум. Для определенности мы будем рассматривать задачи на минимум.

**БИБЛИОТЕКА**



- 3.10.  $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \text{extr}; \quad 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 40,$   
 $-2x_1 + x_2 - x_3 \leq -3, \quad x_2 \geq 0.$
- 3.11.  $3x_1^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \rightarrow \text{extr}; \quad x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \leq 0,$   
 $5x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \quad x_3 \geq 0.$
- 3.12.  $3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \rightarrow \text{extr}; \quad x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \leq 0,$   
 $5x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \quad x_3 \geq 0.$
- 3.13.  $x_1x_3 - 2x_2 \rightarrow \text{extr}; \quad 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 10, \quad x_2 \geq 0, \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6.$
- 3.14.  $x_1x_2x_3 \rightarrow \text{extr}; \quad x_3 \geq 1, \quad x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8.$
- 3.15. Доказать неравенство для средних степенных

$$\left( \frac{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}{n} \right)^{1/p} \leq \left( \frac{\sum_{j=1}^n |x_j|^q}{n} \right)^{1/q}, \quad 0 < p \leq q \leq \infty,$$

путем решения экстремальной задачи

$$\sum_{j=1}^n |x_j|^p \rightarrow \max; \quad \sum_{j=1}^n |x_j|^q = a^q \quad (1 < p < q, \quad a > 0).$$

- 3.16. Доказать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\left( \prod_{j=1}^m x_j \right)^{1/m} \leq \frac{\sum_{j=1}^m x_j}{m} \quad \forall x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

## § 4. Выпуклые задачи

Пусть в этом пункте  $X$  — линейное нормированное пространство (определение линейного нормированного пространства см. в § 5), для простоты понимания можно считать, что  $X = \mathbb{R}^n$  — конечномерное пространство.

### 4.1. Элементы выпуклого анализа. Субдифференциал

Напомним определение выпуклого множества. Множество  $A \subset X$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек  $a_1$  и  $a_2$  из  $A$  и любого числа  $t \in (0, 1)$  элемент  $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$ .

Пусть  $C := \{c_1, \dots, c_m\} \subset X$  — некоторое конечное подмножество. Элемент  $v = \sum_{i=1}^m t_i c_i$ ,  $t_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ , называется *выпуклой комбинацией*  $C$ .

Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи: Учебное пособие. М.: Едиториал УРСС, 2002. 304 с.

Вариант 1 - задача 3.10, стр. 41.

- Вариант 2 - задача 3.11, стр. 41.
- Вариант 3 - задача 3.12, стр. 41.
- Вариант 4 - задача 3.13, стр. 41.
- Вариант 5 - задача 3.14, стр. 41.
- Вариант 6 - задача 2.12, стр. 33.
- Вариант 7 - задача 2.13, стр. 33.
- Вариант 8 - задача 2.14, стр. 33.
- Вариант 9 - задача 2.15, стр. 33.
- Вариант 10 - задача 2.16, стр. 33.
- Вариант 11 - задача 2.17, стр. 33.
- Вариант 12 - задача 2.18, стр. 33.
- Вариант 13 - задача 1.17, стр. 23.
- Вариант 14 - задача 1.16, стр. 23.
- Вариант 15 - задача 1.14, стр. 22.
- Вариант 16 - задача 1.13, стр. 22.
- Вариант 17 - задача 1.12, стр. 22.
- Вариант 18 - задача 1.11, стр. 22.
- Вариант 19 - задача 1.10, стр. 22.

### **Критерии оценки расчетно-графических работ**

- ✓ 100-86 баллов выставляется, если студент точно определил содержание и составляющие части задания, умеют аргументированно отвечать на вопросы, связанные с заданием. Продемонстрировано знание и владение навыками самостоятельной работы по теме. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.
- ✓ 85-76 - баллов - работа студента характеризуется смысловой цельностью, связностью и последовательностью изложения; допущено не более 1 ошибки при объяснении смысла или содержания выполняемых действий. Продемонстрированы умения и навыки, соответствующие компетенциям ОПК-2 и ПК-9. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.
- ✓ 75-61 балл – проведен достаточно самостоятельный анализ основных этапов и смысловых составляющих проблемы; понимание базовых основ и теоретического обоснования предложенной задачи. Допущено не более 2 ошибок при решении задачи.

- ✓ 60-50 баллов - если работа представляет собой просто выписку основных этапов решения предложенной задачи без каких бы то ни было комментариев, анализа. Не раскрыта теоретическая составляющая темы. Либо допущено три или более трех ошибок при выполнении работы.

## Комплект разноуровневых задач и заданий по дисциплине «Теория и методы оптимизации»

1. Реализовать на языке программирования octave несколько численных методов одномерной минимизации — метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод Ньютона с адаптивным шагом. Проверить работу метода на предложенных функциях. Провести вычислительные эксперименты по сравнению быстроты работы методов. Сравнить методы по количеству итераций, по количеству обращений к оракулу, по затраченному процессорному времени. Объяснить полученные результаты. Обратит внимание на порядок каждого метода.

2. Реализовать на языке программирования octave метод сопряженных градиентов.

3. Реализовать на языке программирования octave квазиньютоновский метод с одноранговой коррекцией.

4. Реализовать на языке программирования octave градиентный метод с правилом Армихо выбора шагового множителя.

5. Фирма с объемом основных средств  $K = 500$  млн. руб и фондом оплаты труда  $L = 800$  млн. руб планирует инвестировать 10 млн. руб в основные фонды  $\delta K$  или привлечение новых рабочих  $\delta L$ , максимизируя при этом прирост производства продукции. Зависимость объема производства от основных фондов и трудовых затрат описывается классической функцией Кобба-Дугласа  $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$  с эластичностью  $\alpha = 0.6$ .

6. Аналитики производственного объединения *HeavyMetal* определили, что производственная функция их фирмы хорошо аппроксимируется выражением

$$F(K, L, E) = CK^\alpha L^\beta E^\gamma$$

где  $K$  — объем (стоимость) основных фондов,  $L$  — количество используемых трудовых ресурсов (измеренных как стоимость оплаты труда),  $E$  — объем (стоимость) используемых энергетических ресурсов. Эластичности  $\alpha, \beta, \gamma$  и соответственно определены как  $\alpha = 0.5, \beta = 0.3, \gamma = 0.2$ . На текущий день факторы  $K, L, E$  имеют значения  $K = 400, L = 500, E = 100$ , при этом объем производства составляет 1800. Математики предлагают перераспределить средства, выделяемые под производственные факторы без привлечения внешнего капитала так, чтобы максимизировать объем производства.

Найти оптимальное распределение средств по производственным факторам и определить соответствующий выпуск продукции.

7. Коварные гуроны произвели подземный ядерный взрыв, эхо которого обнаружено прожеками, мотоканонами и сименалами в своих вигвамах, расположенных по оси  $Ox$  в точках  $x_1 = 100, x_2 = 350$  и  $x_3 = 610$  в моменты времени  $t_1 = 1631.38, t_2 = 592.52$  и  $t_3 = 1148.47$  после восхода луны.

Определить точное время взрыва и глубину залегания заряда. Земля считается плоской и однородной, скорость звука в материале Земли — 1000 м/сек.

8. Определить угол прицеливания, при котором снаряд, выпущенный из пушки, пролетает максимальное расстояние. Масса снаряда — 50 кг, поперечное сечение —  $0.5 \text{ м}^2$ , сила сопротивления воздуха задается формулой  $\rho(h)S\|v\|^2$ , где  $v = (v_x, v_y), \|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  — скорость снаряда и направлена строго против движения снаряда. Плотность воздуха  $\rho(h)$  на высоте  $h$  описывается формулой  $\rho(h) = \rho_0 \exp(-\gamma h)$ , где константа  $\gamma$  определяется из условия убывания плотности в 2 раза на высоте 10000 м. Плотность  $\rho_0$  на уровне моря —  $0.013 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение земного притяжения постоянно и равно  $9.8 \text{ м/сек}^2$ , начальная скорость снаряда —  $800 \text{ м/сек}$ .

## **Критерии оценки разноуровневых задач и заданий**

✓ 100-86 баллов - если решение показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Логически корректное и убедительное решение задачи.

✓ 85-76 - баллов - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное решение задачи.

✓ 75-61 - балл – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определено и последовательно решить задание.

✓ 60-50 баллов – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в решении.

## **Описание показателей и критериев оценивания компетенций, шкал оценивания**

### **Критерии оценки собеседования**

- ✓ 100-86 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.
- ✓ 85-76 - баллов - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.
- ✓ 75-61 - балл – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определено и последовательно изложить ответ.
- ✓ 60-50 баллов – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

### **Критерии оценки расчетно-графических работ**

- ✓ 100-86 баллов выставляется, если студент точно определил содержание и составляющие части задания, умеют аргументированно отвечать на вопросы, связанные с заданием. Продемонстрировано знание и владение навыками самостоятельной работы по теме. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.
- ✓ 85-76 - баллов - работа студента характеризуется смысловой цельностью, связностью и последовательностью изложения; допущено не более 1 ошибки при объяснении смысла или содержания выполняемых действий. Продемонстрированы умения и навыки, соответствующие компетенциям ОПК-2 и ПК-9. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.
- ✓ 75-61 балл – проведен достаточно самостоятельный анализ основных этапов и смысловых составляющих проблемы; понимание базовых основ и

теоретического обоснования предложенной задачи. Допущено не более 2 ошибок при решении задачи.

- ✓ 60-50 баллов - если работа представляет собой просто выписку основных этапов решения предложенной задачи без каких бы то ни было комментариев, анализа. Не раскрыта теоретическая составляющая темы. Либо допущено три или более трех ошибок при выполнении работы.

### **Шкала оценивания**

Менее 60 баллов	незачтено	неудовлетворительно
От 61 до 75 баллов	зачтено	удовлетворительно
От 76 до 85 баллов	зачтено	хорошо
От 86 до 100 баллов	зачтено	отлично

## Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

**Текущая аттестация студентов.** Текущая аттестация студентов по дисциплине «Теория и методы оптимизации» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине «Теория и методы оптимизации» проводится в форме теста, расчётно-графических работ, собеседования и разноуровневых задач и заданий и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

– степень усвоения теоретических знаний оценивается в форме теста и в форме собеседования;

– уровень овладения практическими умениями и навыками – оценивается в форме выполнения расчётно-графических работ и разноуровневых задач и заданий.

**Промежуточная аттестация студентов.** Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Теория и методы оптимизации» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

По дисциплине предусмотрен экзамен, который проводится в устной форме.

### Критерии выставления оценки студенту на экзамене по дисциплине «Теория и методы оптимизации»

Баллы (рейтинговой оценки)	Оценка зачета/ экзамена (стандартная)	Требования к сформированным компетенциям
86-100	«зачтено»/ «отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, знает современные математические методы и современные прикладные программные средства для решения оптимизационных задач, знает современные методы решения проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и сводящихся к задачам минимизации или максимизации функций многих переменных, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причём не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение,



		владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач, умеет разрабатывать математические методы численного решения оптимизационных задач.
76-85	<i>«зачтено»/ «хорошо»</i>	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.
61-75	<i>«зачтено»/ «удовлетворительно»</i>	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.
0-60	<i>«не зачтено»/ «неудовлетворительно»</i>	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.