МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

«СОГЛАСОВАНО»
Руководитель ОП
«Электроника и наноэлектроника»

______________ __Крайнова Г. С. ______
(подпись) (Ф.И.О. рук. ОП)
«____31_»_____августа____2016__г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Заведующий (ая) кафедрой
_физики низкоразмерных структур__

______________ __А.А. Саранин_______
(подпись) (Ф.И.О. зав. каф.)
«__31____»__августа____2016____г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Аналитическая геометрия

Направление подготовки 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Форма подготовки очная

курс ___1____ семестр _2_______
лекции _18__ час.
практические занятия__18_____час.
лабораторные работы_______час.
в том числе с использованием МАО лек._____/пр.__ ___/лаб._0____ час.
всего часов аудиторной нагрузки___36____ час.
в том числе с использованием МАО _ ____ час.
самостоятельная работа ___36______ час.
в том числе на подготовку к экзамену ______ час.
контрольные работы 2 семестр
курсовая работа / курсовой проект __нет_______ семестр
зачет ______2_____ семестр
экзамен нет семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта, самостоятельно устанавливаемого ДВФУ, утвержденного приказом ректора от_18.02.2016_ №_12-13-235 .

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры физики низкоразмерных структур, протокол № 1 от « 31 » августа 2016 г.

Заведующий кафедрой Саранин А.А.

Составитель (ли):___КПН. ,доцент Батурин Г.И

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________ __________________

(подпись) (И.О. Фамилия)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________ __________________

(подпись) (И.О. Фамилия)

ABSTRACT

Bachelor's/Specialist's/Master's degree in 11.03.04 - electronics and nanoelectronics

Course title: Analytical Geometry

Basic part of Block, 2 credits.

Instructor: Baturin G.I.

At the beginning of the course a student should be able to: use in the professional activities basic knowledge of the fundamental branches of mathematics to create mathematical models of typical professional tasks and interpret the results taking into account the limits of applicability of models.

Learning outcomes:

GPC -1: the ability to present an adequate modern level of knowledge of the scientific picture of the world on the basis of knowledge of the basic provisions, laws and methods of natural Sciences and mathematics**Course description:** the basic concepts and tools of algebra and geometry; the basic laws of natural science (math) disciplines and their role in professional activitie;

GPC-2: the ability to identify the natural science essence of the problems arising in the course of professional activity, to involve the appropriate physical and mathematical apparatus for their solution/

Course description: the basic concepts and tools of algebra and geometry; the basic laws of natural science (math) disciplines and their role in professional activities.

Main course literature: Main course literature

1. A.G. Kurosh. The course of higher algebra. - St. Petersburg, "Lan", 2011 - 462 p.http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:410558&theme=FEFU

2. A.I.Kostrikin, Y.I. Manin. Linear algebra and geometry. - St. Petersburg, "Lan", 2008 – 303p.
http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281458&theme=FEFU.

3. AI Maltsev. Fundamentals of linear algebra. - St. Petersburg, "Lan", 2005, - 470p.
http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:239638&theme=FEFU

4. MM Postnikov. Linear algebra. - St. Petersburg, "Lan", 2009, - 400p. http://e.lanbook.com/view/book/319/

5. DV Beklemishev. Course of analytical geometry and linear algebra. - M .: Nauka, 2005,308 c.

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:275482&theme=FEFU

6. D.K.Faddeev, I.S.Sominskii. Problems in higher algebra. - St. Petersburg, "Lan", 2008 - 288 p.

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:251141&theme=FEFU.

7. Z.I. Borevich. Determinants and matrices. - St. Petersburg, "Lan", 2009 - 192 p.

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281936&theme=FEFU

8. A.P.Ryabushko Individual jobs in higher mathematics. At 4 h. 1 H .: tutorial. -Minsk "Vysheyshaya School", 2013. - 304 p.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65409

9. Kalinin VV, Petrova IV, VI Zorin Indefinite and definite integrals. M .: MGUNG Gubkin, 2005 (pdf), 153c.

Form of final control: *credit*

АННОТАЦИЯ

Учебная дисциплина «Аналитическая геометрия» разработана для студентов 1 курса бакалавриата по направлению подготовки 11.03.04 Электроника и наноэлектроника в соответствии с требованиями образовательного стандарта, самостоятельно устанавливаемого ДВФУ.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 2 ЗЕ (72 часа). Учебным планом предусмотрены лекции (18 часов), практические занятия (18 часов), самостоятельная работа студента 36 часов. Дисциплина «Аналитическая геометрия» входит в базовую часть цикла дисциплин образовательной программы, реализуется во 2 семестре.

Цель курса

Аналитическая геометрия изучает простейшие геометрические объекты и фигуры на плоскости и в трехмерном пространстве. К их числу на плоскости относятся алгебраические линии 1-гопорядка – прямые, а также линии 2-го порядка - эллипс, гипербола и парабола. В трехмерном пространстве изучаются прямые, плоскости и поверхности 2-го порядка.

Отметим некоторые особенности программы. Весьма подробно излагается векторная алгебра. При ее изложении сразу же вводится понятие линейной зависимости векторов, базиса и координат, скалярного, векторного и смешанного произведений.

Целью курса «Аналитическая геометрия» является изучение геометрических объектов методами алгебры и математического анализа. Знания, полученные при изучении курса «Аналитическая геометрия», с одной стороны, формируют математическую культуру, с другой, составляют основу естественнонаучного подхода при исследовании природных явлений.

Задачи изучения курса

Аналитическая геометрия имеет своей задачей изучение свойств геометрических объектов при помощи аналитического метода. В основе этого метода лежит метод координат, впервые систематически примененный Р. Декартом и призванный решать следующие конкретные задачи:

- изучение и овладение методом координат при рассмотрении геометрических образов, представляемых линейными и билинейными алгебраическими формами
- изучение методов и приемов решения геометрических задач
- формирование у студентов умений и навыков самостоятельного приобретения и применения знаний при исследовании и построении математических моделей;
- овладение студентами знаний и навыков по применению аналитической геометрии в различных разделах физики при экспериментальном и теоретическом исследовании физических явлений.

Программа ориентирована на развитие у студентов интереса к познанию математических и, в первую очередь, геометрических, объектов, а также приобретение навыков самостоятельного изучения фундаментальных основ математических и физических наук и их приложений.

Место курса в учебном процессе

Программа курса «Аналитическая геометрия» построена таким образом, что ее основные понятия и методы органично переходят и являются составной частью программы курса «Линейная алгебра». Геометрические образы двумерного и трехмерного пространства, изучаемые в аналитической геометрии, представляют собой простейшие примеры задач, исследуемых в линейной алгебре. Такой подход позволяет последовательно перейти от изучения конкретных геометрических образов к построению абстрактных алгебраических конструкций с целью формирования у студентов элементов высокой математической культуры. При изучении «Аналитической геометрии» используются знания по математике в объеме программы средней общеобразовательной школы. Курс «Аналитическая геометрия» является составным элементом математического аппарата ряда курсов общей и теоретической физики. Знания, полученные при изучении курса «Аналитическая геометрия» широко применяются в курсе общей физики при изучении кинематики и динамики механического движения, электростатики, электричества и магнетизма, также в курсе теоретическая механика, электродинамика.

Требования к уровню освоения содержания курса

В результате изучения курса студент должен иметь представление:

- об основных понятиях аналитической геометрии;
- об области применения векторной алгебры и аналитического метода;
- об аксиоматическом подходе в геометрии;
- о системах координат на плоскости и в 3-х мерном пространстве.

Студент должен знать и уметь использовать:

- векторы и векторный анализ при решении широкого круга задач математики и физики
- понятия, представления и утверждения аналитической геометрии
- алгебраические формы для геометрических образов

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие элементы компетенций.

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**	
Способность представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов естественных наук и математики (ОПК-1)	**Знает**	основные понятия аналитической геометрии; векторы и векторный анализ при решении широкого круга задач математики и физики; алгебраические формы для геометрических образов
	Умеет	применять понятия векторной алгебры и аналитического метода, аксиоматический подход в геометрии, понятия, представления и утверждения аналитической геометрии
	Владеет	знаниями и навыками по применению аналитической геометрии в различных сферах деятельности при экспериментальном и теоретическом исследовании физических явлений
Способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать	Знает	основные сведения о векторах и координатах на плоскости и в пространстве, кривых и поверхностях второго порядка
	Умеет	решать задачи по аналитической геометрии, демонстрировать понимание основных теорем аналитической геометрии и умеет их доказывать

для их решения соответствующий физико-математический аппарат (ОПК-2)	Владеет	методами аналитической геометрии при решении фундаментальных и прикладных задач

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины применяются следующие методы активного обучения:

Проблемная лекция - опирается на логику последовательно моделируемых проблемных ситуаций путем постановки проблемных **вопросов** или предъявления проблемных задач

Уровень сложности, характер проблем зависят от подготовленности обучающихся, изучаемой темы и других обстоятельств.

Лекция-беседа предполагает максимальное включение обучающихся в интенсивную беседу с лектором . Преимущество этой формы перед обычной лекцией состоит в том, что она привлекает внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определяет содержание, методы и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории. Различают несколько разновидностей: лекция-диалог, лекция-дискуссия.

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

МОДУЛЬ 1
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА (10 часов)

РАЗДЕЛ 1. Вектор **(5 часов)**

Тема 1**.** Действия над векторами Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Декартовы координаты векторов и точек.

Тема 2. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное произведение, смешанное произведение и их приложения к решению задач.

РАЗДЕЛ 2. Прямая на плоскости и в пространстве.Плоскость. (5 часов)

Тема 1. Прямая на плоскости. Способы задания прямой . Взаимное расположение прямых, угловые соотношения.

Тема 2. Прямая в пространстве. Способы задания прямой . Взаимное расположение прямых, угловые соотношения между прямыми ,между прямой и плоскостью. Лекции проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа**

МОДУЛЬ 2
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

. **РАЗДЕЛ 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА (4 часа)**

Тема 1 Окружность, эллипс. Определение ,вывод канонического уравнения Фокальный радиус и эксцентриситет **(2 часа)**

Тема 2. Гипербола, парабола. Определение ,вывод канонического уравнения Фокальный радиус , эксцентриситет и директрисы (**2 часов**)

РАЗДЕЛ 4 Поверхности второго порядка (4 часа)

Тема 1 Эллипсоид. Однополостный гиперболоид (**1 час**)

Тема 2 Двуполостный гиперболоид. Эллептический параболоид (**1 час**)

Тема 3 Гиперболический параболоид. Конус второго порядка (**1 час**)

Тема 4 Некоторые кривые третьего порядка **(1 час)**

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА
Практические занятия (18 часов)

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Аналитическая геометрия» применяется метод активного обучения **«групповая консультация».** Групповые консультации представляют собой своеобразную форму проведения практических занятий, основным содержанием которых является разъяснение отдельных, часто наиболее сложных или практически значимых вопросов изучаемой программы. После всех практических занятий студенты получают задачи для самостоятельной внеаудиторной работы. С каждым практическим занятием повышается сложность предлагаемых задач. Групповая консультация проводятся с целью оказания помощи в самостоятельной работе, в подготовке к рубежной контрольной работе. Студенты сами предлагает для решения те задачи, которые вызвали какие-то затруднения или непонимание. К доске выходят студенты, готовые разъяснить возникшие вопросы. Преподаватель только контролирует ход решения задач, комментирует в случае необходимости какие-то ситуации и обобщает рассмотренный материал. Преимущество практики-консультации перед другими формами проведения практического занятия в том, что она позволяет в большей степени приблизить содержание занятия к практическим интересам обучаемых, в какой-то степени индивидуализировать процесс обучения с учетом уровня понимания и восприятия материала каждым обучаемым.

Занятия 1-10 (10 часов)

Векторная алгебра. Действия над векторами. Прямая на плоскости .Прямая в пространстве. Способы задания прямой . Взаимное расположение прямых, угловые соотношения между прямыми ,между прямой и плоскостью. **Применяется метод активного обучения «групповая консультация»**

Занятия 11-18(8 часов)

Кривые второго порядка. Определение, вывод канонического уравнения.

.Фокальный радиус, эксцентриситет директрисы.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Аналитическая геометрия» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

Проверка знаний студентов осуществляется путем проведения контрольных работ, сдачи индивидуальных заданий , семестровыми зачетами и экзаменами. Темы контрольных работ и индивидуальных заданий отражены в программах семестровых экзаменов.

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства - наименование	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	. Векторная алгебра. Действия над векторами	ОПК-1, 2	1-2недели	Проверка домашних заданий	Экз вопросы№1,5, 6,11
			3-5 недели	Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях	Экз вопросы№13,16,17,30
			6-7недели	**Выполнение к/р на 6 неделе**	Экз вопросы№32,35,38,44.
2	. Прямая на плоскости и в пространстве	ОПК-1, 2	8-10 недели	Проверка домашних заданий	Экз вопросы№7,12,14,15,21,25,27.
			11 неделя	Проверка домашних заданий	Экз вопросы№28,29,33
			12 неделя	**Сдача**	Экз

				индивидуальных домашних заданий на 8 неделе. Срок сдачи 11 неделя	вопросы№34,40,4142,45.
3	Кривые второго порядка	ОПК-1, 2	13-14 неделя	Проверка домашних заданий	Экз вопросы№2,4, 9,10
			14-15 неделя	Проверка домашних заданий	Экз вопросы№18,20,26,31
			16-17 неделя	**Сдача индивидуальных домашних заданий на 14 неделе. Срок сдачи 16 неделя.**	Экз вопросы№36,37.42
7	Поверхности второго порядка	ОПК-1, 2	**18 неделя**	**Экзамен за семестр по результатам рейтинга**	**Экзамен за семестр**

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

1. Основная литература

1. Остыловский, А. Н. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. Н. Остыловский. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. – 92 http://znanium.com/catalog/product/443221
2. Ивлева А.М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ивлева А.М., Прилуцкая П.И., Черных И.Д.— Электрон. текстовые данные.— Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.— 180 с.

http://www.iprbookshop.ru/45380.htm

3. *Привалов, И. И.* Аналитическая геометрия : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 40-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 233 с.

4. https://www.biblio-online.ru/book/analiticheskaya-geometriya-413943

5. Бобылева Т.Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Бобылева Т.Н., Кирьянова Л.В., Титова Т.Н.— Электрон. текстовые данные.— М.: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018.— 144 с.

http://www.iprbookshop.ru/80626.html

6. Магазинников Л.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Магазинников Л.И., Магазинникова А.Л.— Электрон. текстовые данные.— Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Эль Контент, 2012.— 180 с.

http://www.iprbookshop.ru/13861.html

7. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч 1.: учебное пособие. –Минск «Вышейшая школа», 2013. – 304 с. Ссылка: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65409

2. Дополнительная литература

1. Калинин В.В., Петрова И.В., Харин В.Т. Неопределенные и определенные интегралы. М.: МГУНГ им.И.М.Губкина, 2005 (pdf), 153с. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/KalininPetrovaXarin2005ru.pdf
2. Любарский М.Г. Векторная алгебра и ее приложение. Web, 2010 (pdf), 166 с. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lyubarskij2010ru.pdf
1) Шипачев. Высшая математика. – Санкт-Петербург, «Лань», 2006.-479 с., http://sferaznaniy.ru/vysshaya-matematika/vysshaya-matematika-shipachev-v-s.html

2) Данко П.Е Высшая математика в упражнениях и задачах : В 2-х ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 5-е изд., испр. - М. : Высш. шк., 1996, 1999. - 416с. ww.mgpu.ru/materials/13/13374.doc
3) Баврин, И. И. Высшая математика: Учеб. для студ. естественнонаучных специальностей педагогических вузов / И. И. Баврин. – М. : «Академия», Высш. шк., 2008. – 616 с. www.mgpu.ru/materials/13/13373.doc
4) Шипачев В.С. Высшая математика. : Учеб. пособие для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высш. шк., 2005. – 479 с. library.izhgsha.ru/.../cgiirbis_64.dll

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного достижения учебных целей занятий должны выполняться следующие основные требования:

-соответствие действий обучающихся ранее изученным на лекционных и семинарских занятиях методикам и методам.

-максимальное приближение действий студентов к реальным, соответствующим будущим функциональным обязанностям.

-поэтапное формирование умений и навыков, т.е. движение от знаний к умениям и навыкам, от простого к сложному и т.д..

-использование при работе на тренажерах или действующей технике фактических документов, технологических карт, бланков и т.п.

-выработка индивидуальных и коллективных умений и навыков.

- распределение времени, отведенного на занятие, на решение каждой задачи;

-подбор иллюстративного материала (графиков, таблиц, схем), необходимого для решения задач, продумывание расположения рисунков и записей на доске.

Студент должен:

- научиться работать с книгой, документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой.

-формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

. На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства. Формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Необходимо поддерживать непрерывный контакт с аудиторией, отвечать на возникающие у студентов вопросы. На практических занятиях преподаватель разбирает примеры по пройденной теме. Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения. Если знаний полученных в аудитории оказалось недостаточно, студент может самостоятельно повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами.

По данному курсу разработано следующее методическое пособие:

Г. И. Батурин

МАТЕМАТИКА

для студентов нематематических специальностей высших учебных заведений

(издание второе, переработанное и дополненное)

Учебное пособие

Рекомендовано Дальневосточным региональным

учебно-методическим центром (УМО)»

Владивосток

Издательство Дальневосточного университета

ББК 22.11

Б 28

Рецензенты: Г.К. Пак – заведующий кафедрой алгебры

и логики ДВГУ, к.ф.-м.н.;

А.А. Степанова – профессор кафедры алгебры

и логики ДВГУ, д.ф.-м.н.

.

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебные аудитории кампуса ДВФУ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
Высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

по дисциплине «Аналитическая геометрия»
Направление подготовки – 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Форма подготовки очная

Владивосток
2016

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1-4 недели	Контрольная работа	1 пара	Зачет по заданию
2	5-6 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Зачет по заданию
3	7-8 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Зачет по заданию
4	9-10 недели	Контрольная работа	1 пара	Зачет по заданию
5	11-14 недели	Индивидуальное задание	2 недели	Зачет по заданию
6	15-17 недели	Индивидуальное задание	2 недели	Зачет по заданию

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий и контрольных работ по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены ниже). Критерии оценки: студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя.

Индивидуальное задание № 1 (прямая и плоскость)

Вариант № 1

1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки *A(2; 3; -1)* и *B (-1; 2; 4)*.

2. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x+3y-4z+5=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую *x=3t+1* , *y=2t+3, z= –t–2* параллельно прямой $2x-y+z-3=0, \qquad x+2y-z-5=0$.

Вариант № 2

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A(2; -3; 2)* и *B(7; 1; 0)* и параллельной оси *Ox*.

2. Уравнения прямой $\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+3y+z+9=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду и определить углы, образуемые этой прямой с координатными осями.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

Вариант № 3

1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси *Oy* и проходящей через точки *A(2; 1; -2)* и *B(-7; -2; 1)*.

2. Привести к каноническому виду Общие уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 2x+3y-4z+5=0 \end{cases}$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; 2; -3)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$, $\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

Вариант № 4

1. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости *xOy* и проходящей через точку *A (1; 2; -4)*.

2. Преобразовать к каноническому виду общие уравнения прямой $\begin{cases} 2x+3y+2z+8=0 \\ x-y-z-9=0 \end{cases}$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой $x-2y+z-3=0$, $x+y-z+2=0$.

Вариант № 5

1. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси *Ox* и проходящей через точку *A (3; 7; -1)*.

2. Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую $\begin{cases} 2x-4y+5z+7=0 \\ x+2y+3z+11=0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

3. Убедившись, что прямые $2x+2y-z-10=0$, $x-y-z-22=0$, $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние *d* между ними.

Вариант № 6

1. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости *xOz* и проходящей через точку *A(2; -3; 4)*.

3. Найти точку Q, симметричную точке *P(4; 1; 6)* относительно прямой $x-y-4z+12=0$, $2x+y-2z+3=0$.

Вариант № 7

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *Ox* и точку *A (2; 1; 3)*.

2. Определить следы прямой $\begin{cases} 5x + 3y - 4z + 8 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$

на координатных плоскостях (следом прямой на плоскости называется точка пересечения прямой с плоскостью).

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}, \qquad 2x + 3y + z - 1 = 0.$

Вариант № 8

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось *Oz* и точку *A (-2; 4; -4)*.

2. Найти координаты следов прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{4}$ на координатных плоскостях (следом прямой на плоскости называется точка пересечения прямой с плоскостью).

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+1}{-5}, \qquad x - 2y + z - 15 = 0.$

Вариант № 9

1.. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *A(2; -5; 4)* и через ось *Oy*.

2. Найти острый угол между прямыми $\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0 \\ 2x + y - z - 5 = 0 \end{cases}$

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \qquad x + 2y - 2z + 6 = 0.$

Вариант № 10

1. Какие отрезки на координатных осях отсекает плоскость $2x + 3y - 5z + 30 = 0$?

2. Через точку *A(1; -1; 2)* провести прямую, параллельную прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$.

3. Доказать, что прямая $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

.

Вариант № 11

1. Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $x - 10y + 2z - 12 = 0$ на координатных осях.

2. Через точку *(2; -1; 3)* провести прямую, параллельную оси *Ox*.

3. При каком значении *C* прямая $3x - 2y + z + 3 = 0$, $4x - 3y + z + 1 = 0$, параллельна плоскости $2x - y + Cz - 2 = 0$?

Вариант № 12

1. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$5x + 3y - 4z + 15 = 0$; $15x + 9y - 12z - 5 = 0$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точки *A(1; 2; -1) и B(0; 3; -4).*

3. Найти точку *Q,* симметричную точке *P(2; -5; 7)* относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5; 4; 6)$ и $M_2(-2; -17; -8)$.

Вариант № 13

1.Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x - 3y + 6z - 14 = 0$; $2x - 3y + 6z + 28 = 0$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точки *A (3; 0; 4)* и *B (-1; -2; 3).*

3. Вычислить расстояние *d* точки *P(1; -1; -2)* от прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Вариант № 14

1. Через точку *M(2; 3; -1)* провести плоскость, параллельную плоскости $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

2. Найти острый угол между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ и плоскостью $2x + y - z + 4 = 0$.

3. Вычислить расстояние *d* от точки *P(2; 3; -1)* до прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$.

Вариант № 15

1. Через точку M *(-4; -1; 2)* провести плоскость, параллельную плоскости $3x + 4y - z - 8 = 0$.

2. Найти острый угол между прямой $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 4z + 5 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $x + y + 3z - 1 = 0$.

3. Вычислить расстояние *d* от точки *P(2; 3; -1)* до прямой $x = t + 1$, $y = t + 2$, $z = 4t + 13$.

Вариант № 16

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *(2; 5; -1)* и параллельной плоскости $x + 3y - 4z + 5 = 0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *P(1; 2; -1)* перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

3. Вычислить расстояние *d* от точки *P(2; 3; -1)* до прямых $2x-2y+z+3=0$, $3x-2y+2z+17=0$.

Вариант № 17

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *(1; -3; 2)* и параллельно плоскости $7x-4y+z-4=0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *P (2, —4, —2)* перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+y+3=0 \end{cases}.$$

3. Вычислить проекцию точки *P(5; 2; -1)* на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

Вариант № 18

1. Через точки *M(1; 2; 3)* и *N (-2; -1; 3)* провести плоскость, перпендикулярную плоскости *x + 4y - 22 + 5 = 0.*

2. Через точку *(2, 1, 6)* провести прямую, перпендикулярную плоскости $x-4y+5z-1=0$, и определить направляющие косинусы этой прямой.

3. При каких значениях *A* и *B* плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой $x=3+2t$, $y=5-3t$, $z=-2-2t$?

Вариант № 19

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *M(-1; 2; -3)* и *N(1; 4; -5)* и перпендикулярной плоскости $3x+5y-6z+1=0$.

2. Найти уравнение перпендикуляра к плоскости $3x-y-5z-8=0$, проходящего через точку *(1, -1, 2).*

3. Найти точку *Q*, симметричную точке *P(1; 3; -4)* относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

Вариант № 20

1. Выяснить геометрический смысл коэффициентов *A, B* и *C* в общем уравнении плоскости *Ax + By + Cz + D = 0.*

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$ с плоскостью *x+y — 2z — 4 = 0.*

3. найти проекцию точки *P(2; -1; 3)* на прямую $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.

Вариант № 21

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки: $M_1(1;2;-1)$, $M_2(-1;0;4)$, $M_3(-2;-1;1)$.

2. Найти уравнения перпендикуляра к плоскости

x + 3y — 4z— 13 = 0,

проходящего через точку *(2; -1; 3)*, и определить координаты основания этого перпендикуляра.

3. При каких значениях *A* и *D* прямая $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

Вариант № 22

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-2;-1)$, $M_3(1;1;-1)$.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-1}$ и плоскости *3x — 4y — z + 5 = 0.*

3. При каком значении *m* прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x - 3y + 6z + 7 = 0$?

Вариант № 23

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1\left(1;-2;-\frac{1}{2}\right)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(0;-1;-1)$.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ и плоскости *x + y — z + 5 = 0.*

3. Найти точку *Q*, симметричную точке *P(-3; 2; 5)* относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0 \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$.

Вариант № 24

1. Найти расстояние от точки *A(2, 3, -1)* до плоскости *7x- 6y - 6z +42 = 0.*

2. Проверить, что прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{1}$ лежит в плоскости *x + y — z — 6 = 0.*

3. Найти точку *Q*, симметричную точке $P(3;-4;-6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$ и $M_3(10;-7;1)$.

Вариант № 25

1. На плоскость $5x - y + 3z + 12 = 0$ из начала координат опущен перпендикуляр. Найти его длину и углы, образованные им с координатными осями, а также координаты основания этого перпендикуляра.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{9}$ и плоскости $2x - 3y + z - 3 = 0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$ и точку $M_1(2;-2;1)$.

Вариант № 26

1. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $10x - 15y - 6z - 380 = 0$, и углы, образуемые этим перпендикуляром с координатными осями.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ и точку *M(1; -1; 2).*

3. Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(x - 3y + 72z + 36) + \beta(2x + y - z - 15) = 0$ и отстоит от начала координат на расстояние *d=3.*

Вариант № 27

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *M(2; 3; -1)* параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 10 = 0$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *M(2; - 1; 0)* и прямую $\begin{cases} x - y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

3. Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(10x - 8y - 15z + 36) + \beta(4x + y + 3z - 1) = 0$ и отстоит от точки $C(3;-2;-3)$ на расстояние *d=7*

Вариант № 28

1.Из точки *P(2; 3; -5)* на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *(1; 1; -2)* и прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{5}$.

3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

Вариант № 29

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *A(5; 4; 3)* и отсекающей равные отрезки на осях координат.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 1y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{2}$.

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -3; -4)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковые величины (считая каждый отрезок направленными из начала координат).

Вариант № 30

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + y + 5z - 1 = 0$, $2x + 3y - z + 2 = 0$ и через точку *M(3; 2; 1)*.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x - y + 2z - 2 = 0$.

3. Найти проекцию точки *C(3; -4; -2)* на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\dfrac{x-5}{13} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z+3}{-4}$, $\dfrac{x-2}{13} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z+3}{-4}$.

Вариант № 31

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки *P(4; -2; 1)* и *Q(2; 4; 3)*.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

Вариант № 32

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y - 12z - 3 = 0$ и $3x + y - 7z - 2 = 0$ и перпендикулярной плоскости $x + 2y + 5z - 1 = 0$

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

перпендикулярно плоскости $2x + 2y - z + 5 = 0$.

Вариант № 33

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A(2; -1; 4)* и *B(3; 2; -1)* перпендикулярно плоскости $x+y+2z-3=0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые: •

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}, \qquad \frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

Вариант № 34

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *M(3; -1; -5)* и перпендикулярной плоскостям $3x-2y+2z+7=0$ и $5x-4y+3z+1=0$.

2. Дана плоскость $x+y-2z-6=0$ и вне её точка *M(1; 1; 1)*. Найти точку *N* симметричную точке *M* относительно данной плоскости.

Вариант № 35

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+3y+5z-4=0$ и $x-y-2z+7=0$ и параллельно оси *Oy*.

2. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
Высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Аналитическая геометрия»
Направление подготовки 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Бакавлариат
Форма подготовки очная

Владивосток
2016

Общие положения

Фонд оценочных средств образовательного учреждения (ФОС ОУ) является центральным элементом системы оценивания уровня сформированности компетенций обучающихся и выпускников на соответствие требованиям ФГОС ВПО

. ФОС ОУ систематизирует и обобщает различные аспекты, связанные с оценкой качества образования, уровня сформированности компетенций обучающихся и выпускников на соответствие требованиям ФГОС ВПО. Текущий контроль успеваемости осуществляется в ходе повседневной учебной работы по курсу дисциплины, МДК, учебной практики по индивидуальной инициативе преподавателя, мастера производственного обучения. Данный вид контроля стимулирует у обучающихся стремление к систематической самостоятельной работе по изучению учебной дисциплины, овладению профессиональными и общими компетенциями.

Промежуточная аттестация обучающихся по учебной дисциплине, междисциплинарному курсу осуществляется в рамках завершения изучения данной дисциплины, междисциплинарного курса и позволяет определить качество и уровень ее (его) освоения. Предметом оценки освоения МДК являются умения и знания.

Промежуточная аттестация обучающихся по профессиональному модулю в целом осуществляется в форме экзамена (квалификационного) и позволяет определить готовность к выполнению соответствующего вида профессиональной деятельности и обеспечивающих его профессиональных компетенций, а также развитие общих компетенций, предусмотренных для ОПОП в целом. Условием допуска к экзамену (квалификационному) является успешное освоение обучающимися всех элементов программы профессионального модуля: теоретической части модуля и практик.

При помощи фонда оценочных средств осуществляется контроль и управление процессом приобретения обучающимися необходимых знаний, умений, практического опыта и компетенций по соответствующему направлению подготовки в качестве результатов освоения профессиональных модулей, либо отдельных учебных дисциплин.

Фонд оценочных средств должен формироваться на основе ключевых принципов оценивания:

валидность: объекты оценки должны соответствовать поставленным целям обучения;

надежность: использование единообразных показателей и критериев для оценивания достижений;

объективность: получение объективных и достоверных результатов при проведении контроля с различными целями.

Основными требованиями, предъявляемыми к ФОС, являются:

интегративность;

проблемно-деятельностный характер;

актуализация в заданиях содержания профессиональной деятельности;

связь критериев с планируемыми результатами; экспертиза в профессиональном сообществе.

Фонд оценочных средств по отдельной профессии НПО/специальности СПО состоит из комплектов контрольно-оценочных средств (КОС) по каждой учебной дисциплине, профессиональному модулю.

Непосредственным исполнителем разработки комплекта контрольно-оценочных средств по учебной дисциплине, профессиональному модулю является преподаватель, по соответствующей профессии / специальности. Комплект контрольно-оценочных средств может разрабатываться коллективом авторов по поручению председателя предметно-цикловой комиссии.

Работы, связанные с разработкой комплекта контрольно-оценочных средств, вносятся в индивидуальные планы преподавателей.

Паспорт оценочных средств
По дисциплине «Аналитическая геометрия»

Способность представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов естественных наук и математики **(ОПК 1)**	Знает	основные понятия аналитической геометрии; векторы и векторный анализ при решении широкого круга задач математики и физики; алгебраические формы для геометрических образов
	Умеет	применять понятия векторной алгебры и аналитического метода, аксиоматический подход в геометрии, понятия, представления и утверждения аналитической геометрии
	Владеет	знаниями и навыками по применению аналитической геометрии в различных сферах деятельности при экспериментальном и теоретическом исследовании физических явлений
Способность использовать в профессиональной деятельности базовые естественнонаучные знания включая знания о предмете и объектах изучения, методах исследования, современных концепциях, достижениях и ограничениях естественных наук (**ОПК 2)** .	Знает	основные сведения о векторах и координатах на плоскости и в пространстве, кривых и поверхностях второго порядка
	Умеет	решать задачи по аналитической геометрии, демонстрировать понимание основных теорем аналитической геометрии и умеет их доказывать
	Владеет	методами аналитической геометрии при решении фундаментальных и прикладных задач

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства - наименование	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	. Векторная алгебра. Действия над векторами	ОПК-1	1-2недели	Проверка домашних заданий УО-1	Экз. вопросы №1,5,6,11
			3-5 недели	Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях ПР-2	Экз. вопросы №13,16,17,30

			6-7недели	**Выполнение к/р на 6 неделе** ПР-2	Экз. вопросы №32,35,38,44.
2	. Прямая на плоскости и в пространстве	ОПК-1	8-10 недели	Проверка домашних заданий УО-1	Экз. вопросы №7,12,14,15,21,25,27.
			11 неделя	Проверка домашних заданий УО-1	Экз. вопросы №28,29,33
			12 неделя	**. Сдача индивидуальных домашних заданий на 8 неделе. Срок сдачи 11 неделя** ПР-2	Экз. вопросы №34,40,4142,45.
3	Кривые второго порядка	ОПК-2	13-14 неделя	Проверка домашних заданий УО-1	Экз. вопросы №2,4,9,10
			14-15 неделя	Проверка домашних заданий УО-1	Экз. вопросы №18,20,26,31
			16-17 неделя	**Сдача индивидуальных домашних заданий на 14 неделе. Срок сдачи 16 неделя.** ПР-2	Экз. вопросы №36,37.42
7		ОПК-2	**18 неделя**	**Зачет за семестр по результатам рейтинга**	**зачет за семестр**

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ И КРИТЕРИИ ИХ ОЦЕНИВАНИЯ

Отметка «Отлично» (Зачтено)

Сформированные, прочные и глубокие знания об основных понятиях и инструментах алгебры и геометрии,; основных законах естественнонаучных (математических) дисциплин и их роли в профессиональной деятельности. Сформированное умение применять полученные знания для решения математических задач, использовать математический язык и символику при построении моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные. применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования. Уверенное владение математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих и научных задач, навыками работы с компьютером как в социальной сфере, так и в области познавательной и профессиональной деятельности.

Отметка «Хорошо» (Зачтено)

Сформированные, прочные и глубокие, но содержащие отдельные неточности, знания об основных понятиях и инструментах алгебры и геометрии, основных законах естественнонаучных (математических) дисциплин и их роли в профессиональной деятельности. Не достаточно уверенное, хотя и сформированное, владение умениями и навыками в данной области.

Отметка « Удовлетворительно» (Зачтено)

Неполные представления об основных понятиях и инструментах алгебры и геометрии, основных законах естественнонаучных (математических) дисциплин и их роли в профессиональной деятельности. Не достаточно сформированное владение математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих и научных задач, навыками работы с компьютером как в социальной сфере, так и в области познавательной и профессиональной деятельности.

Отметка « Неудовлетворительно» (не зачтено)

Фрагментарные представления об основных понятиях и инструментах алгебры и геометрии; основных законах естественнонаучных (математических) дисциплин и их роли в профессиональной деятельности. Отсутствие умения применять знания на практике.

Критерии оценки знаний умений и навыков при текущей проверке

Оценка устных ответов:

Отметка "Отлично"

1. Дан полный и правильный ответ на основе изученных теорий.
2. Материал понят и изучен.
3. Материал изложен в определенной логической последовательности, литературным языком.
4. Ответ самостоятельный.

Отметка "Хорошо"

1, 2, 3, 4 – аналогично отметке "Отлично".

5. Допущены 2-3 несущественные ошибки, исправленные по требованию учителя, наблюдалась "шероховатость" в изложении материала.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Учебный материал, в основном, изложен полно, но при этом допущены 1-2 существенные ошибки (например, неумение применять законы и теории к объяснению новых фактов).
2. Ответ неполный, хотя и соответствует требуемой глубине, построен несвязно.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Незнание или непонимание большей или наиболее существенной части учебного материала.
2. Допущены существенные ошибки, которые не исправляются после уточняющих вопросов, материал изложен несвязно.

Оценка умения решать задачи:

Отметка "Отлично"

1. В решении и объяснении нет ошибок.
2. Ход решения рациональный.
3. Если необходимо, решение произведено несколькими способами.
4. Допущены ошибки по невнимательности (оговорки, описки).

Отметка "Хорошо"

1. Существенных ошибок нет.
2. Допущены 1-2 несущественные ошибки или неполное объяснение, или использование 1 способа при заданных нескольких.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Допущено не более одной существенной ошибки, записи неполны, неточности.
2. Решение выполнено с ошибками в математических расчетах.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Решение осуществлено только с помощью учителя.
2. Допущены существенные ошибки.
3. Решение и объяснение построены не верно.

Оценка письменных работ:

Критерии те же. Из оценок за каждый вопрос выводится средняя итоговая оценка за письменную работу.

Примерный перечень оценочных средств (ОС)

I. **Устный опрос**

1. Собеседование (УО-1) (Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.) - Вопросы по темам/разделам дисциплины.

3. Экзамен (Средство промежуточного контроля) – Вопросы к экзамену, образцы билетов.

Программа семестровых экзаменов

1. Векторы: определение, равенство, единичные вектора, сложение векторов, умножение вектора на число.
2. Фокальный радиус, эксцентриситет и директрисы гиперболы.
3. Координаты вектора. Свойства координат. Коллинеарность и компланарность векторов.
4. Фокальный параметр. Уравнение эллипса и гиперболы в полярных координатах.
5. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, угол между векторами.
6. Векторное произведение. Свойства векторного произведения.
7. Прямая в пространстве. Способы задания. Угол между прямыми
8. Перемножение матриц. Свойства умножения матриц.
9. Эксцентриситет и фокальные радиусы эллипса.
10. Асимптоты гиперболы. Парабола, вывод уравнения параболы.
11. Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения.
12. Прямая на плоскости, неполные уравнения прямой.
13. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матрицы на число.
14. Плоскость в пространстве. Неполные уравнения плоскости.
15. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
16. Обратная матрица. Решения системы уравнений в матричной форме.
17. Вырожденная матрица, левая и правая обратная матрица, присоединенная или взаимная матрица.
18. Уравнения эллипса гиперболы и параболы в полярных координатах.
19. Параметрическое представление линии, уравнение линии в полярных координатах.
20. Вычисление расстояния от директрисы до соответствующего фокуса в случае эллипса и гиперболы.

21. Угол между прямыми, между прямой и плоскостью (для различных видов задания прямой).
22. Линейные операции над матрицами.
23. Свойства ранга матрицы .Элементарные преобразования над матрицами.
24. Базис, свойства базиса (линейная зависимость и независимость)
25. Прямая на плоскости, неполное уравнение прямой, различные способы задания прямой.
26. Вывод канонического уравнения параболы.
27. Расстояние от точки до прямой в пространстве
28. Расположение прямой относительно системы координат(на плоскости).Угловой коэффициент, геометрический смысл.
29. Уравнение прямой в нормальной форме. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду.
30. Вектор, определение, модуль, равенство, свойства отношения «равно» векторов.
31. Окружность. Определение, общая теория.
32. Векторное произведение векторов. Свойства, выражение векторного произведения через координаты сомножителей.
33. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Угловые соотношения между прямыми, между прямой и плоскостью.
34. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
35. Коллинеарные и компланарные векторы. Необходимые и достаточные условия. Угол между векторами.
36. Исследование канонического уравнения гиперболы и эллипса.
37. Фокальный параметр эллипса и гиперболы.
38. Вектора. Действие над векторами. Разложение вектора по базису.
39. Линейные операции над матрицами.
40. Вывод общего уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой в отрезках.
41. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

42. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
43. Фокальные радиусы гиперболы.
44. Свойства векторного и смешанного произведения векторов.
45. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.

Задания для итогового тестирования

Тема. Системы координат на плоскости и в пространстве. Векторная алгебра.

1. Точка М задана полярными координатами

2. Векторы a=(1; 2; 0), b=(3;-1;1), c=(0;1;1) являются

1)линейно зависимыми

2)*линейно независимыми

3)коллинеарными

4)компланарными

3. Линейно зависимыми являются векторы

1) $\bar{a}(1,3), \bar{b}(3,1)$

2) $\bar{a}(1,3), \bar{b}(3,2)$

3)* $\bar{a}(-6,4), \bar{b}(3,-2)$

4) $\bar{a}(6,4), \bar{b}(3,-2)$

4. Даны векторы $\vec{a}$ = (2; -1; - 2) и $\vec{b}$ = (8; - 4; 0), вектор $\vec{c} = 2\vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$, тогда угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ равен

1)*58^0 2)56^0 3)52^0 4)50^0

5. Векторы $\bar{a}_1$=(l, 3, 1, 3), $\bar{a}_2$ =(2, 1, 1, 2) и $\bar{a}_3$ =(3,-1, 1, 1) являются

1)базисными

2)*зависимыми

3)независимыми

4)равными

6. $\vec{a}$ = (5; -1; 6) и $\vec{b}$ = (6; 3; -3), тогда проекция вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ равна

1) $\frac{\sqrt{54}}{9}$ 2)* $\frac{9}{\sqrt{54}}$ 3) $\frac{9}{6}$ 4) $\frac{6}{\sqrt{54}}$

7. Вершины пирамиды находятся в точках A(2,3,4), B(4,7,3), C(1,2,2), D(-2,0,-1), тогда площадь грани ABC равна

1) $\sqrt{110}$ 2)10 3) $\frac{2}{\sqrt{110}}$ 4)* $\frac{\sqrt{110}}{2}$

8. Вершины пирамиды находятся в точках A(2,3,4), B(4,7,3), C(1,2,2), D(-2,0,-1), тогда объем пирамиды равен

1)10 2)*11 3)12 4)13

Тема. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Угол между прямыми находится по формуле

1)$\varphi = -\frac{1}{k_2}$ 2)$\varphi = k_2$ 3)*tg $\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ 4)$\varphi = \pi/2$

2. Острый угол между прямыми y = -3x + 7 и y = 2x + 1 равен

1) $\frac{\pi}{3}$ 2)* $\frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{\pi}{12}$ 4) $\frac{\pi}{6}$

3. Уравнение прямой, проходящей через точки M (-1;3); N (2;5) имеет вид

1) $2x+3y-11=0$

2) $x+3y+4=0$

3)* $2x-3y+11=0$

4) $2x-y+11=0$

4. Расстояние от точки M (1,2) до прямой 20x - 21y - 58 = 0 равно

1)3 2) $2\frac{1}{2}$ 3)* $1\frac{1}{2}$ 4) $\frac{80}{29}$

5. Координаты центра окружности $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$

1)(2;1) 2)(-1;-2) 3)*(1;2) 4)(3;0)

6. Радиус окружности $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$

1)2 2)*1 3)3 4)4

7. Уравнение прямой, проходящей через точку M (-2;-5) параллельно прямой 3x + 4y + 2 = 0 имеет вид

1) $3x-4y+3=0$ 2) $3x+4y+14=0$ 3)* $3x+4y+26=0$ 4) $4x+3y+26=0$

8. Уравнение прямой, проходящей через точку M (-2;-5) перпендикулярно прямой 3x + 4y + 2 = 0 имеет вид

1) $4x+3y-7=0$ 2)* $4x-3y-7=0$ 3) $3x-4y+7=0$ 4) $4x-3y-8=0$.

9. Кривая $16x^2 + 25y^2 = 9$ является

1)*эллипсом 2)гиперболой 3)параболой 4)окружностью

10. Кривая $3x^2 – y^2 – 12 = 0$ есть

1)эллипс 2)*гипербола 3)парабола 4)окружность

11. Кривая $y^2 = 8x$ есть

1)эллипс 2)гипербола 3)*парабола 4)окружность

12. Кривая $x^2 + y^2 = 2x + 4y – 4$ есть

1)эллипс 2)гипербола 3)парабола 4)*окружность

13. Параметрические уравнения эллипса имеют вид

1)x=acost, y=asint

2)*x=acost, y=bsint

3)x=r(t-sint), y=r(1-cost)

4)x=$\frac{a}{\cos t}$, y=btgt

14. Параметрические уравнения окружности имеют вид

1)*x=acost, y=asint

2)x=acost, y=bsint

3)x=r(t-sint), y=r(1-cost)

4)x=$\frac{a}{\cos t}$, y=btgt

Тема Аналитическая геометрия в пространстве.

1. Плоскость 3x-4y+5z-60=0 отсекает на осях координат «отрезки»

1)*a=20, b=-15, c=12

2)a=10, b=-1, c=12

3)a=20, b=-15, c=1

4)a=30, b=-10 c=12

2. Расстояние от точки M(4,3,6) до плоскости 2x-y-2z-8=0 равно

1)10 2)7 3)*5 4)3

3. Расстояние между плоскостями x+2y-2z-1=0 и x+2y-2z+5=0 равно

1)5 2)4 3)3 4)*2

4. Расстояние между плоскостями 2x+y-2z-1=0 и 2x+y-2z+5=0 равно

1)5 2)4 3)3 4)*2

5. Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость x+2y-2z-1=0 равна

Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость 2x+y-2z-1=0 равна

1)*$\frac{1}{3}$ 2)$\frac{2}{3}$ 3)1 4)2

6. Система уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ определяет

1)три взаимно параллельные плоскости

2)три взаимно перпендикулярные плоскости

3)*три плоскости, пересекающиеся в одной точке

4)три плоскости, пересекающиеся по прямой

7. Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость x+2y-3z-1=0 равна

1)* $\frac{1}{\sqrt{14}}$ 2) $\frac{2}{\sqrt{14}}$ 3)1 4)14

8. Плоскость 3x-4y+5z-120=0 отсекает на осях координат «отрезки»

1)a=20, b=-15, c=12

2)*a=40, b=-30, c=24

3)a=20, b=-15, c=1

4)a=30, b=-10 c=12

9. Расстояние от точки M(4,3,1) до плоскости 2x-y-2z-8=0 равно

1)3 2)5 3)* $\frac{5}{3}$ 4) $-\frac{5}{3}$

10. Плоскость 2x-4y+5z-120=0 отсекает на осях координат «отрезки»

1)a=20, b=-15, c=12

2)a=40, b=30, c=24

3)a=20, b=-15, c=1

4)a=60, b=-30 c=24

11. Расстояние от точки M(4,3,9) до плоскости 2x-y-2z-8=0 равно

1)10 2)*7 3)5 4)3

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по дисциплине «Аналитическая геометрия»
Направление подготовки – 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

«Бакалавр»
Форма подготовки очная

Владивосток
2016

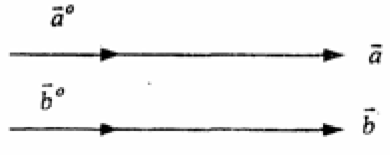
ПРОГРАММА КУРСА

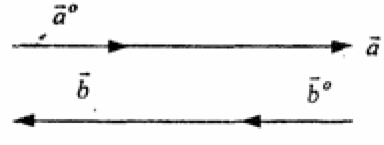
1. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

Векторная алгебра. Свойства скалярного, векторного и смешанного произведений. Уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Линии и поверхности второго порядка. Взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости.

Методические указания к решению задач векторной алгебре

Для отвлеченного изображения конкретных векторных величин используются
векторы. Вектором (геометрическим) называется направленный отрезок прямой.
Два вектора называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину
. Положение начальной точки таких векторов не играет никакой роли.
Поэтому геометрические векторы называются свободными.
При изучении темы «Векторная алгебра» студенту следует обратить внимание на
ниже рассмотренные вопросы.
1. <u>Линейные операции над векторами</u> (сложение, вычитание, умножение на число).
Векторы необходимо уметь складывать как по правилу треугольника, так и по
правилу параллелограмма.
2. <u>Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Базисные векторы. Декартов базис.</u>
Пример 1.2.1. Указать при каких значениях α и β возможно равенство
$\boldsymbol{\alpha a + \beta b = 0}$, где a° и b° единичные векторы
($a^0 = a / |a|$, $b^0 = b / |b|$). Для решения приведенной задачи необходимо рассмотреть возможное расположение векторов a и b :





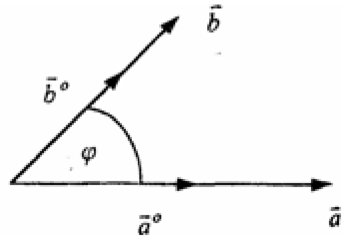


Рис .1.2.1 Рис .1.2.2
Рис .1.2.3

a) векторы a и b **сонаправлены (Рис. 1.2.1), тогда $\alpha=-\beta$**;
b) векторы a и b имеют противоположное направление (рис.1.2.2).
В этом случае $\boldsymbol{\alpha=\beta}$;
c) векторы a и b образуют между собой угол φ. При этом угол
φ отличен от 0 и π радиан (рис.1.2.3). Приведенное в условии
равенство возможно лишь при $\alpha=\beta=0$.
Рассмотренный пример дает представление о линейной зависимости и независимости векторов (важнейшее положение темы «Векторная алгебра»).
Линейной комбинацией n векторов x_i (i=1,n)
называется сумма произведений этих векторов на действительные числа a_i (i=1,n), а именно

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

(В рассмотренном примере записана линейная комбинация 2^x единичных векторов $a°$ и b°) .
Векторы x_i (i=l,n) называются линейно-зависимыми, если их
линейная комбинация (1.2.1) равна нулю, а среди коэффициентов a_i
(i=l,n) имеется хотя бы один отличный от нуля. На рис. 1. 2 .1-1. 2 . 2 изображены два линейно зависимых вектора. Они могут быть расположены на одной
прямой, либо на параллельных прямых.
Два вектора, расположенные на одной либо на двух параллельных прямых, называются
коллинеарными.
Условие коллинеарности векторов *a = λb , где λÎR.*
Если три вектора расположены в одной либо в параллельных
плоскостях, то они называются компланарными.
Компланарные векторы линейно зависимы. Необходимое и достаточное условие -
компланарности векторов:
c = $\alpha a+\beta b$.
Векторы x_i (i=l,n) называются линейно-независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации (1.2.1) возможно лишь в том случае, когда коэффициенты a_i(i=l,n) одновременно равны 0.
Случай двух линейно-независимых векторов представлен на
рис. 1.2.3 (линейная комбинация $\alpha a+\beta b$ равна нулю лишь при
одновременном обращении в ноль α и β) .
Пример 1.2.2. Векторы a,b,c некомпланарны (линейно независимы).
Доказать, что векторы $m=a+2b-c$, $n=3a-b+c$ и $p=a+5b-3c$
компланарны и найти их линейную зависимость.
Приравняем к нулю линейную комбинацию векторов m,n,p ($\alpha m+\beta n+\gamma k = 0$) и подставим в равенство разложения векторов m,n,p
по векторам a, b,c .

$$\alpha(a+ 2b- c)+\beta(3a- b+ c)+\gamma(-a+5b-3c)=(\alpha+3\beta - \gamma)a+(2 \alpha - \beta+5 \gamma)b+(- \alpha+ \beta-3 \gamma)c=0$$

Равенство нулю линейной комбинации векторов *a,b,c* возможно лишь в том случае, когда коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Из этого условия
получаем систему линейных алгебраических уравнений, которую решим методом Гауса
(пример 1.1.11)

$$\begin{cases}\alpha+3\beta-\gamma=0\\ 2\alpha-\beta+5\gamma=0\\ -\alpha+\beta-3\gamma=0\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&5\\-1&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-7&7\\0&4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

$$rgA=2;\begin{cases}\alpha=3\beta=\gamma\\ -\beta=-\gamma\\ \gamma=C\end{cases};\begin{cases}\alpha=-2C\\ \beta=C\\ \gamma=C\end{cases},C\in R$$

Коэффициенты равной нулю линейной комбинации векторов *m,n,p* могут быть
отличны от нуля, следовательно векторы *m,n,p* линейно зависимы (компланарны). Подставляя *α, β, γ* в равенство
αm+βn+γp=0 и сокращая на С, получим -*2m*+ *n*+*k* = 0 .

С понятием линейной независимости векторов тесно связано такое фундаментальное
понятие как базис.

Базисом на плоскости Q называется любая упорядоченная пара неколлинеарных
векторов, параллельных плоскости Q. Любой вектор с, параллельный плоскости Q, можно представить в виде *c= αa+ βb.*

Базисом в трехмерном пространстве называется любая упорядоченная тройка некомпланарных (линейно-независимых) векторов. Если *a,b,c*- базис в пространстве, то любой вектор *d* пространства можно единственным образом разложить по этому базису по формуле:

d= αa+ βb+γc

Декартовым базисом на плоскости (рмс 1.2.4) называются два единичных, взаимно-перпендикулярных вектора *i* и *j* (| *i*| = |*j*| =1,
i^j), совпадающих с положительным направлением осей ОХ и ОУ соответственно.

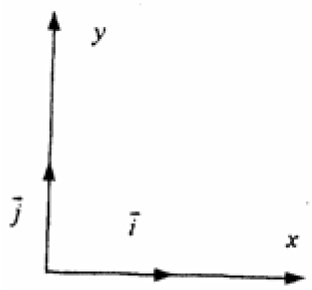


рис.1.2.4

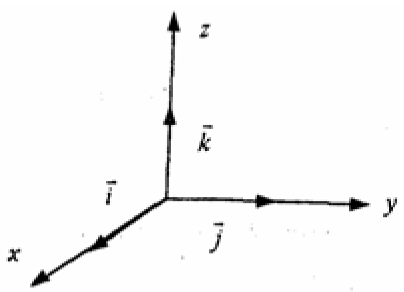


рис.1.2.5

Любой вектор плоскости *a* может быть единственным образом представлен в

виде $a=a_x i+a_y j$, где числа a_x
и a_y называются координатами вектора a .
Декартовым базисом в пространстве (рис.1.2.5.) называются три единичных взаимноперпендикулярных вектора i,j,k, совпадающих с положительным направлением осей OX,OY и OZ соответственно. Любой вектор a может быть единственным образом представлен в виде

$a=a_x i+a_y+a_z k$, где числа a_x , a_y , a_z называются координатами вектора a.

Если вектор $a=AB$ задается координатами начальной точки $A(x_a, y_a, z_a)$ и конечной $B(x_b, y_b, z_b)$, то его координаты имеют вид:

$a=(x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a)$.

Два вектора a и b равны в том и только в том случае, когда координаты их равны, т.е. $a_x=b_x$, $a_y=b_y$, $a_z=b_z$.

3.Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением векторов a и b называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$a\,b=|a||b|\cos(a,b)$
(1.2.2)

Из формулы (1.2.2) для ненулевых векторов можно вычислить косинус угла между
векторами

$$\cos(a,b)=\frac{ab}{|a||b|} \qquad (1.2.3)$$

Длина вектора $|a|$ определяется по формуле

$|a| = \sqrt{aa}$
(1.2.4)

Из свойств скалярного произведения следует обратить внимание на коммутативный (перестановочный) закон $ab=ba$.

Пример 1.2.3. Вычислить угол между векторами a и b , если

$a=2m+3n$, $b=m-2n$, $|m|=2$, $|n|=3$, $(m,n)=\pi/3$. Угол между векторами вычисляется по формуле (1.2.3).

$(2m+3n)(m-2n)=2mm-4-mn+3nm-6nn=2mm-mn-6nn=2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 0-2\cdot 3\cdot\cos(\pi/3)--6\cdot 3\cdot 3\cdot\cos 0=12-3-54=-45$;

$$|a|=\sqrt{aa}=\sqrt{(2m+3n)^2}=\sqrt{4m^2+12mn+9n^2}=\sqrt{4\cdot 4+12\cdot 6\cdot \tfrac{1}{2}+9\cdot 9}=\sqrt{133};$$

$$|b|=\sqrt{bb}=\sqrt{(m-2n)^2}=\sqrt{m^2-4mn+4n^2}=\sqrt{4-4\cdot 6\cdot \tfrac{1}{2}+4\cdot 9}=\sqrt{28};$$

Таким образом, $\cos(ab)=\dfrac{-45}{\sqrt{28\cdot 133}}=\dfrac{-45}{\sqrt{4724}}$; $(ab)=\pi-\arccos(45/\sqrt{4724})$.

Предположим в пространстве задан декартов базис $\{ i , j, k \}$ и два вектора

$a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$.

В декартовом базисе скалярное произведение векторов и длина вектора вычисляются по формулам:

$a\,b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (1.2.5)

$|a| = \sqrt{aa} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1.2.6)

Условие перпендикулярности векторов: ab=0 или

$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ (1.2.7)

Условие коллинеарности векторов:

$a=\lambda b$ или $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$ (1.2.8)

Пример 1.2.4. При каком значении α векторы $a(2,3,4)$ и $b(3, \alpha,-1)$ перпендикулярны?

Используя (1.2.7), имеем $ab=6+3\alpha -4=0$ или $3\alpha =-2$, $\alpha =-2/3$

Пример1.2.5.При каких значениях α и β векторы $a(2,4, \alpha)$ и $b(4,\beta,1)$коллинеарны?

Используя условие коллинеарности векторов (1.2.8), имеем: 2/4=4/β=α/1. Откуда 4/β =1/2 или α/1=1/2, β = 8, а α =1/2

Пример 1.2. 6. Найти вектор b, коллинеарный вектору $a(1,-2,-2)$ образующий с ортом j острый угол и имеющий длину $|b|$ =15.

Пусть вектор b имеет координаты b_x, b_y, b_z, Из условия коллинеарности (1.2.8) имеем $b = \lambda a$ или $b_x = \lambda a_x = \lambda$, $b_y = \lambda a_y = -2\lambda$, $b_z = \lambda a_z = -2\lambda$.

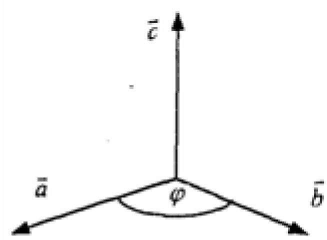
По формуле (1.2.6) вычисляем

$|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{9\lambda^2} = 3|\lambda| = 15.$

Откуда $|\lambda|=5$ или $\lambda=\pm5$. Получаем два вектора b; $b_1(5,-10,-10)$ и $b_2(-5,10,10)$. Так угол между вектором b и ортом j острый, то $cos(b,j)>0$ и координата $b_y>0$. Поэтому в качестве вектора b выбираем вектор b_2 т.е. $b =-5 i+10 j+10k$.

4. Векторное произведение векторов.

Необходимо обратить внимание студентов на определение правой и левой троек векторов (рис.1.2.6 и 1.2.7).



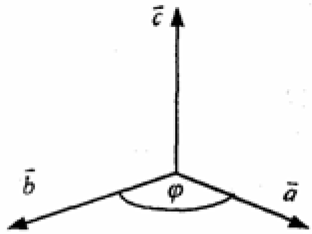


Рис.1.2.6
Рис.1.2.7

Тройка некомпланарных векторов *a,b,c* называется правой (рис.1.2.6) или левой (рис.1.2.7), если будучи приведены к общему началу, эти векторы располагаются так, как могут быть расположены соответственно большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

Векторным произведением векторов *a* и *b* называется вектор *c,* который обозначается символом *c=a′b* и удовлетворяет следующим трем условиям:

1) вектор *c* перпендикулярен плоскости векторов *a* и *b;*
2)образует с векторами *a и b* правую тройку;
3)длина вектора *c* численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах *a* и *b,* т.е.

|c|= |*a*| ×|*b*|sin(*a b*)

(1.2.9)

Из свойств векторного произведения следует обратить внимание на антикоммутативность, т.е. *a′b=-b′a*

Пример 1. 2.7. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах *a=2m+n* и *b = m- n ,* если |*m*|=2, |n|=1, (m,n)= π/6

Вычислим векторное произведение векторов *a*, и *b* и воспользуемся формулой (1.2.9)

*a′b =(2m+ n)-(m- n)= 2m′m- 2m′n+n′*m-*n′n =0-3m′*n-*0=-3m′n*

$$S_{nap} = \frac{1}{2}\,|\,a \times b\,| = \frac{3}{2}\,2 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\,(e\partial^{\,2})$$

$$S_{mp} = \frac{1}{2} S_{nap} = \frac{3}{4}\,(e\partial^{\,2})$$

В декартовом базисе { *i,j,k*} векторное произведение векторов $a(a_x,a_y,a_z)$ и $b(b_x, b_y ,b_z)$ вычисляется по формуле

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.2.10)$$

Пример1.2.8. Найти координаты вектора $b=(b_x,b_y,b_z)$, если он перпендикулярен векторам a_1 (2,-3,1) и a_2 (1,-2,3) и удовлетворяет условию;

b(i +2j-7k) = 10.

Вектор b перпендикулярен векторам a_1 и a_2. Поэтому его можно искать в виде:

$$b = \lambda(a_1 \times a_1) = \lambda\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \lambda(-7i - 5j - k); b = -7\lambda i - 5\lambda j - \lambda k$$

Удовлетворим условию $b(i + 2j - 7k) = 10$; $-7\lambda - 10\lambda +$
$7\lambda = 10$; $-10\lambda = 10$, $\lambda = -1$.

Таким образом вектор имеет вид: $b = 7i + 5j + k$.

Пример 1.2.9.Вычислить площадь треугольника, вершины которого расположены в
точках A(1,2,3), B(2,1,-1), C(3,-1,1).

$S_{\Delta ABC} = 1/2\ |AB\text{x}AC|$.Вычислим координаты векторов AB и AC и векторное произведение $AB'AC$.

$$AB = AB(1,-1,-4); AC = AC(2,-3,-2); AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -10i - 6j - k;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 6^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{137}\,(e\partial^2)$$

5.Смешанное произведение трех векторов.

Смешанным произведением трех векторов *a,b,c* называется число, которое обозначается символом $a\text{x}b\text{-}c$ (смешанное произведение иногда называют векторно-скалярным).

Если векторы *a,b,c* некомпланарны, то смешанное произведение a
$'b\text{-}c$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах
a,b,c, взятому со знаком "+", если упорядоченная тройка векторов *a,b,c*
-правая, и со знаком "-", если эта тройка - левая.

Из свойств смешанного произведения трех векторов следует отметить следующие:

1)при круговой перестановке векторов смешанное произведение не меняется, т.е. (
$a\text{x}\ b) \times c = (c\text{x}a) \times b = (b\text{x}c) \times a;$

2)если в смешанном произведении поменять местами два соседних сомножителя, то
произведение изменит знак, т.е. $(a\text{x}\ b) \times c = -(a\text{x}$
$c) \times b$;

3) смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны, т.е. условием компланарности векторов является равенство нулю
смешанного произведения этих векторов.

Смешанное произведение векторов в декартовом базисе
$\{i,j,k\}$.Если $a(a_x, a_y, a_z)$, $b(b_x, b_y, b_z,)$ и $c(c_x, c_y, c_z)$, то

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1.2.11)}$$

Условие компланарности векторов $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$ (1.2.12)

Наиболее распространенные задачи, решаемые при помощи смешанного произведения:

1)найти объем параллелепипеда, построенного на векторах *a,b,c:*

$V = |a \text{ x } b\times c|$**,**

2) найти объем тетраэдра, построенного на векторах *a,b,c:*

$V=1/6\ (|a \text{ x } b\times c|)$

3) проверить компланарны ли векторы *a,b,c,* если a x $b\times c=0,$ то векторы компланарны, если a x $b\times c^1\ 0,$ то векторы некомпланарны;

4)проверить правую или левую тройку образуют векторы *a,b,c,*

>0 -тройка векторов - правая ,

a x $b\times c=.$

<0 - тройка векторов левая.

Замечание: смешанное произведение векторов *a,b,c,* как правило, записывают в виде $a\times b\times c$.

Пример1.2.10. Вычислить длину высоты тетраэдра *ABCD,* проведенную из вершины *D* к основанию *ABC,* если вершины тетраэдра имеют координаты:

A (1,2,0), B(2,1,1), C(0,-3,-1), D(3,3,4). Найдем координаты векторов, выходящих из вершины *A:*

AB(1,-1,1), AC(-1,-5,-1), AD(2,1,4), $V_{тетр}=1/6(|AB\times AC\times AD|)$; $V_{тетр}=1/3(S_{DABC}\times H_D)$;

$S_{DABC}=1/2\ (|AB´AC|)$; $H_D=\dfrac{3V}{S_{\Delta ABC}}$. Отсюда

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|-6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right| = 2(ед^3)$$

$$AB\times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 6i - 6k; S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}6\sqrt{1+1} = 3\sqrt{2}(ед^2)$$

$$H_D = \frac{3\cdot 2}{3\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}(ед)$$

Вопросы для самопроверки

1.Сформулируйте правила треугольника и параллелограма сложения векторов.

2.Укажите принципиальное различие в формулах для вычисления длины вектора в произвольном и декартовом базисах.

3. Чему равно скалярное произведение базисных векторов в декартовом

базисе?
4.Чему равно векторное произведение базисных векторов в декартовом базисе?
5.Запишите условие компланарности векторов. Приведите пример.
6.Можно ли построить треугольник на векторах *a,b,a+b* ?
7.Приведите пример условия, при выполнении которого из трех векторов *a, b,c*
можно образовать треугольник.

8. Докажите, что объем тетраэдра вычисляется по формуле $V=\frac{1}{6}\,|a\times b\times c|$
9. Вычислите угол между векторами, совпадающими со скрещивающимися ребрами
тетраэдра.
10.Как Вы считаете, произведение векторов *a*x*b*x*c*
(двойное векторное) является векторной величиной или скалярной?

. Методические указания к решению задач по аналитической геометрии,

При изучении аналитической геометрии в пространстве возникают затруднения, связанные с недостаточностью пространственных представлений. В таких случаях полезно пользоваться пространственными моделями (тетрадь-плоскость; карандаш, ручка-прямая,
отрезок прямой) и использовать их при разборе теоретического материала наравне с рисунками, приведенных в задачниках.

Различные виды уравнения плоскости

1.Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0$
$,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору n(A,B,C) :
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
(1.3.1)
Пример 1.3.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 2, 3), перпендикулярно вектору n(2,-1,4). Используя уравнение (1.3.1), получим 2(x-l)-l(y-2)+4(z-3)=0 или 2x-y+4z-l2-0.
Пример 1. 3 . 2.Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1,2,3) пареллельно векторам *a*(3,-1.,0) и *b*(2,l,2).
Плоскость пареллельна векторам *a* и *b*, поэтому вектор нормали к плоскости n(A,B,C) равен векторному произведению векторов)
a и *b* и находится по формуле (1.2.10):

$$n = a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 6j + 5k$$

Уравнение искомой плоскости (1.3.1) имеет вид

-2(x-l)-6(y-2)+5(z-3)=0 или -2x-6y+5z-l=0 .
2.Общее уравнение плоскости:
Ax+By+Cz+D=0
(1.3.2)
В этом уравнении коэффициенты *A, B,C* -координаты вектора *n(A,B,C)* перпендикулярного плоскости.
3.Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Числа *a,b,c* равны величинам направленных отрезков, отсекаемых на осях координат.
4.Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не
лежащие на одной прямой
Пример 1.3.3.Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $\boldsymbol{M_1(1,2,3)}$, $\boldsymbol{M_2(-1,1,1)}$, $\boldsymbol{M_3(0,2,1)}$ **.**
В соответствии с уравнением (1.3.4) получаем

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x-1)-2(y-2)-(z-3) = 2x-2y-z+5=0$$

т.е. $2x-2y-z+5=0$
и есть уравнение искомой плоскости.

Различные видах уравнений прямой в пространстве

1.Общее уравнение прямой $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ (1.3.5)

Прямая задана пересечением двух плоскостей с нормалями $n_1(A_1, B_1, C_1)$ и $n_2(A_2, B_2, C_2)$
2.Канонические (стандартные) уравнения прямой, *a(m,n,p)*

Пример 1.3.4.Перейти от общих уравнений прямой
2x+3y-z+2=0
x-y-3z+6=0 к каноническим уравнениям. Прежде всего выберем какую-нибудь точку M_0 , например M_0 (0,0,2), удовлетворяющую
общим уравнениям прямой. Если сразу не удается подобрать координаты точки M_0 , то эту точку можно найти из решения системы линейных уравнений (см. пример 1.1.11), которой задаются общие уравнения прямой.
Направляющий вектор прямой *a* может быть выбран в виде $a=n_1 \times n_2$ (см. 1.3.5), где n_1(2,3,-l) и n_2(1,-1,-3) -нормальные векторы к плоскостям, пересечением которых и задается прямая

$$a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -5i + 5j - 5k$$

'Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x}{-5} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-5} \qquad \text{или} \qquad \frac{x}{-1} = y = \frac{z-2}{-1}$$

3. Параметрические уравнения прямой

$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + pt,\ z = z_0 + ut,$

$t \in R$ (1.3.7)

Пример 1.3.5.В примере 1.3.4 от канонических уравнений прямой перейти к параметрическим уравнениям.

Ряд равных отношений в канонических уравнениях прямой примера 1.3.4 приравняем к t:

$$t = \frac{x}{-1} = y = \frac{z-2}{-1}$$

Откуда получим параметрические уравнения $x=-t, y=t, z=2-t,\ t \in R$.

4.Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad \textbf{(1.3.8)}$$

Замечание. В уравнениях прямой (1.3.6) и (1.3.8) допускаете равенство нулю одной
или двух координат вектора ***a(m,n,p).*** В этом случае нуль в знаменателе воспринимается только лишь как информация о координатах вектора
a .

Задачи, относящиеся к плоскостям

Пусть заданы две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

1.Взаимное расположение двух плоскостей:

а)условие перпендикулярности плоскостей:

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2 =0$

(1.3.9)

б)условие параллельности плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad \textbf{(1.3.10)}$$

$$\cos\varphi = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad \textbf{(1.3.11)}$$

2.Угол между плоскостями:

3. Расстояние от точки M_0 (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax+By+Cz+D=0:$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \textbf{(1.3.12)}$$

Пример 1. 3 . 6 . Найти расстояние между параллельными плоскостям

$2x+3y-z+1=0 \qquad 2x+3y-z+4=0.$

Это расстояние равно расстоянию от любой точки одно плоскости до другой.

Выберем на первой плоскости произвольную точку, например M_0 (0, 0,1). По формуле (1.3.12) находим

$$d = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1 + 4|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Пример 1.3.7.Найти угол между плоскостями x- 3y+z-1= 0 и y+z+2=0. По формуле (1.3.11) находим

$$\cos\varphi = \frac{|1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{0+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{11}}$$

Замечание. Как правило, вычисляется острый угол между плоскостями.

Задачи относящиеся к прямым в пространстве

Пусть заданы две прямые в пространстве

1.Взаимное расположение двух прямых:

а) условие перпендикулярности прямых:

$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2$
$=0$
(1.3.14)

б) условие параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (1.3.15)$$

2.Угол между прямыми :

$$\cos\varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2|}{|a_1| \cdot |a_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (1.3.16)$$

3. Расстояние от точки $M\ (x_1,y_1,z_1)$ до прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad \mathbf{d} = \frac{|a \times \overline{M_0M_1}|}{|a|}, \qquad (1.3.17)$$

$$\text{где } \bar{a}(m, n, p), \qquad \overline{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

а векторное произведение вычисляется по формуле (1.2.10).

$\longrightarrow$ 4. Условие пересечения

прямых. Прямые задаются уравнениями (1.3.13). Рассмотрим смешанное произведение $a_1\, a_2\, M_1M_2$,

$a_1 \neq \lambda a_2$

$\longrightarrow$ Если $a_1\, a_2$

M_1M_2 = 0

(1.3.18)

$\longrightarrow$ то прямые пересекаются, если

$a_1\, a_2\, M_1M_2 \neq 0$
(1.3.19)
то прямые скрещиваются. Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле (1.2.11).

5. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
Прямые заданы уравнениями (1.3.13). Если $a_1\, a_2\, M_1M_2 \neq 0$ то расстояние d между прямыми вычисляется по формуле

$$d = \frac{\left|a_1 \cdot a_2 \times M_1M_2\right|}{\left|a_1 \times a_2\right|} \qquad (1.3.20)$$

Пример 1.3.8.Исследовать взаимное расположение прямых

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}$$

Первая прямая проходит через точку $M_1(1,-1,-2)$, а вторая прямая через точку $M_2(2,1,1)$. Направляющие векторы прямых a_1 (2,3,4) и a_2(3,-1,1) .
Вычислим смешанное произведение $a_1\, a_2\, M_1M_2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = 8-14 = -6 \neq 0$$

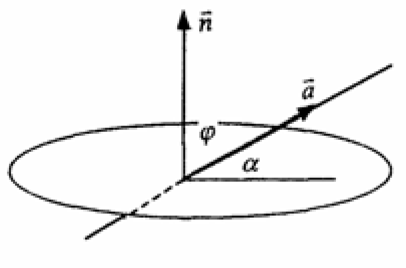
Так как выполняется условие (1.3.19), то прямые скрещиваются.
Пример 1.3.9.Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми примера 1.3.8. Используем формулу (1.3.20).

$$a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7i + 10j - 11k; \quad a_1\, a_2\, M_1M_2 = -6$$

$$d = \frac{|-6|}{\sqrt{49+100+121}} = \frac{6}{\sqrt{170}}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть плоскость задана уравнением (1.3.2), а прямая-уравнением (1.3.6) , либо уравнением (1.3.7), тогда n*(A,B,C)*— нормаль к плоскости,
a(m,n,p) направляющий вектор прямой.



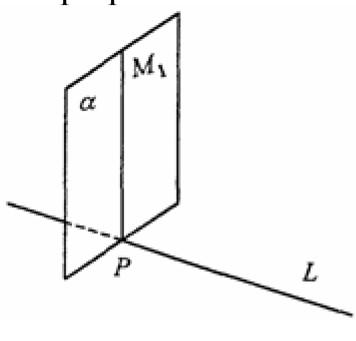


Рис.1.3.1 Рис.1.3.2

1.Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$n = \lambda a \qquad \text{или} \qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (1.3.21)$$

2.Условие параллельности прямой и плоскости:

$na = 0$ или $Am + Bn + Cp = 0$.

(1.3.22)

3.Угол между прямой и плоскостью (рис.1.3.1)

$$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\cos\varphi| = \frac{|an|}{|a||n|} \qquad (1.3.23)$$

4.Координаты точки пересечения прямой и плоскости находятся из системы уравнений (1.3.2) и (1.3.7), а именно

$$\begin{cases} \\ \\ A_x+B_y+C_z+D=0 \end{cases}$$

$x=x_0+mt$

$y=y_0+nt$

(1.3.24)

$z=z_0+pt$

5. Проекция точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$

на прямую (рис. 1.3.2). Координаты точки P определяются из системы

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \\ m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0 \end{cases} \qquad (1.3.24)$$

где плоскость (α) проведена через точку M_1 перпендикулярно прямой L.

Прямая линия на плоскости

Уравнение прямой линии на плоскости может быть получено из канонических
уравнений прямой в пространстве (1.3.6), если положить z_0 = 0 и p=0

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z}{0} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} \\ z=0 \end{cases} \qquad (1.3.26)$$

В зависимости от условий задачи уравнение прямой на плоскости может быть
записано в виде:

а)y=kx+b-

(1.3.27)

уравнение прямой с угловым коэффициентом;

б)ax+by+c=0 -

(1.3.28)
общее уравнение прямой
в)$y=y_0+k(x-x_0)$-
(1.3.29)
уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o,$
$y_o)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k;

$$\text{г)}\quad \frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}- \qquad (1.3.30)$$

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между двумя
прямыми $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+ b_2$
определяется по формуле

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| \qquad (1.3.31)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых имеет вид:
$k_1 = k_2$
(параллельности) (1.3.32)
$k_2 = -1/k_1$ (перпендикулярности) (1.3.33)
Пример 1. 3.10. Треугольник задан координатами вершин $A_1(1,2)$, $A_2(4,0)$, $A_3(6,3)$. Написать уравнения:
1) стороны A_1A_3 ;
2) медианы, проведенной из вершины A_2 ;
3) высоты, проведенной из вершины A_2
1) Воспользуемся уравнением (1.3.30)

$$\frac{y-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\quad;\qquad \frac{y-2}{3-2}=\frac{x-1}{6-1}\quad;\qquad y-2=\frac{1}{5}(x-1);$$

$$y=\frac{1}{5}x+\frac{9}{5}-\text{уравнение стороны}\, A_1A_3.$$

2) Пусть точка К -точка пересечения медианы треугольника, проведенной из A_2
со стороной A_1A_3 . Точка К-середина отрезка A_1A_3. Поэтому ее координаты равны полусумме координат концов отрезка, а именно

$$K(\frac{7}{2},\frac{5}{2}).$$

Воспользуемся уравнением (1.3.30)

$$\frac{y-y_2}{y_k-y_2}=\frac{x-x_2}{x_k-x_2};\qquad \frac{y-0}{\frac{5}{2}-0}=\frac{x-4}{\frac{7}{2}-4};\qquad \frac{2}{5}y=-2(x-4);$$

$$y=-5(x-4);\qquad y=-5x+20-\text{уравнение медианы}\ A_2K$$

3)Высота, проведенная из вершины A_2 перпендикулярна стороне A_1A_3, поэтому угловой коэффициент k определяется из условия (1.3.33):

$$k = -\frac{1}{k_{A_1A_3}} = -\frac{1}{1/5} = -5$$

Воспользуемся уравнением (1.3.29):
$y = y_2 + k(x-x_2)$; $y=0-5(x-4)$;
$y=-5x+20$, т.е. высота треугольника $A_1A_2A_3$,
проведенная из вершины A_2 совпадает с медианой, проведенной из этой вершины.

Вопросы для самопроверки

1.Запишите условия перпендикулярности и параллельности:
а)прямых;
б)плоскостей;
в)прямой и плоскости.
2.Получите координаты точки К делящей данный отрезок АВ в отношении

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \lambda.$$

3.Какие особенности имеет уравнение плоскости, если она:
а)параллельна осям координат OX; OУ; OZ;
б)перпендикулярна осям координат OX; OУ; OZ;
в)параллельна плоскостям OXУ; OXZ; OYZ .
4. Как найти точку, симметричную точке $M_0(x_0,y_0$
$,z_0)$ относительно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.
5. Составьте уравнение плоскости , проходящей через точку M_0 $(x_0$
$,y_0,z_0)$ параллельно двум прямым с направляющими векторами
a_1 и a_2 , причем $a_1 \neq a_2$
6.Получите нормальное уравнение плоскости.
7.Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 , параллельно вектору a .
8.Выведите формулы для нахождения расстояния от точки до прямой, между двумя
скрещивающимися прямыми.
9.Получите уравнение биссектрисы угла треугольника.
10.Получите формулу для нахождения угла между прямыми, лежащими в плоскости
XOУ.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»

(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК ДВФУ>

– КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «Аналитическая геометрия»

Направление подготовки – 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Форма подготовки очная

г. Владивосток

2016

Лекция как метод активного обучения

Лекция (от лат. lectio – чтение) – систематическое, последовательное, монологическое изложение учителем (преподавателем, лектором) учебного материала, как правило, теоретического характера. Как одна из организационных форм обучения и один **из методов обучения** традиционна для высшей школы, где на её основе формируются курсы по многим предметам учебного плана

Однако педагогические и социологические исследования показали, что от **пассивного** участия в процессе обучения очень скоро не остается и следа. Было подсчитано, что после отличной лекции внимательный слушатель мог восстановить 70% материала через 3 часа и 10% через 3 дня. Существует определенная закономерность запоминания в обучении. Мы помним: 10% прочитанного, 20% услышанного, 30% увиденного, 50% увиденного и услышанного, 80% того, что говорим сами, 90% до чего дошли в деятельности.

Поэтому в последнее время появились новые разновидности подачи лекционного материала с целью активизации работы слушателей на занятиях. В их числе

проблемная лекция
лекция-консультация,
лекция - пресс-конференция,
лекция вдвоем,
лекция-беседа,
лекция-дискуссия
лекция-провокация,
лекция-исследование,
лекция с применением техники обратной связи,
лекция визуальная и др.

Выбор метода подачи лекционного материала зависит от:

1. Общих целей образования, воспитания и развития и ведущих установок современной дидактики.

2. Особенностей содержания и методов данной науки и изучаемого предмета, темы.

3. Особенностей методики преподавания конкретной учебной дисциплины и определяемой ею спецификой требований к отбору общедидактических методов.

4. Цели, задачи, содержания материала конкретного уровня.

5 Времени, отведенного на изучение того или иного материала.

6. Возрастных особенностей учащихся, уровня реальных познавательных возможностей.

7. Уровня подготовленности учащихся (образованности, воспитанности, развития).

8. Материальной оснащенности учебного заведения, наличия оборудования, наглядных пособий, технических средств.

9. Возможностей и особенностей учителя, уровня теоретической и практической подготовленности, методического мастерства, его личных качеств.

– Лекция 1.

(«лекция-провокация»)

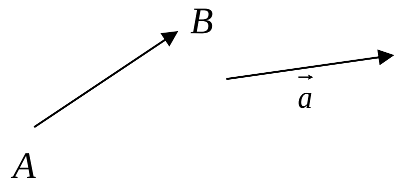
– Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Декартовы координаты векторов и точек

–

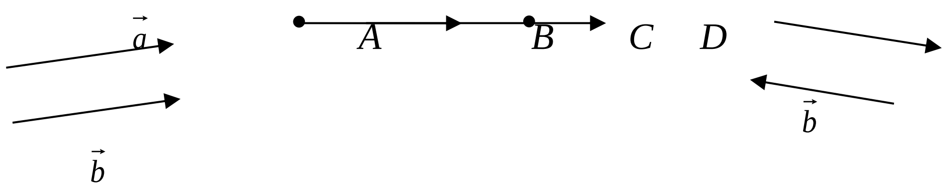
Определение 1.1. **Направленным отрезком** называется упорядоченная пара точек A и B пространства.

Определение 1.2. **Вектором** называется направленный отрезок.

Обозначения: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.

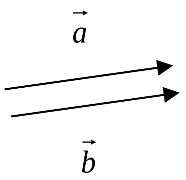


Определение 1.3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



Вектор называется нулевым, если его начальная и конечная точки совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

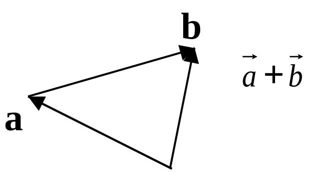
Определение 1.4. Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину (модуль) и одинаковое направление.



Замечание. Таким образом, мы изучаем так называемые **свободные** векторы, начальная точка которых может быть выбрана произвольно. Векторы, для которых важна точка приложения, называются присоединенными (связанными) и используются в некоторых разделах физики.

Линейные операции над векторами.

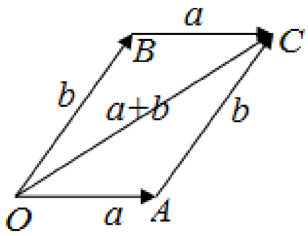
Определение 1.5. **Суммой** $\vec{a}$ **+** $\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, если начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$.



Замечание. Такое правило сложения векторов называют **правилом треугольника.**

Свойства сложения:

<u>Свойство 1.</u> $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$**.**



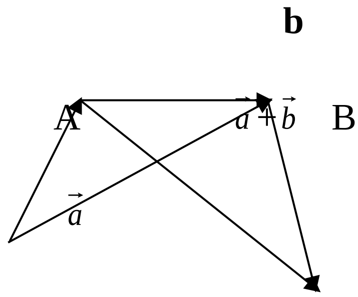
Доказательство. Приложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу и рассмотрим параллелограмм

AOBC. Из определения 5.5 и треугольника OBC следует, что **OC**=$\vec{b}+\vec{a}$**,** а из треугольника OAC – **OC**=$\vec{a}+\vec{b}$**.**

Свойство 1 доказано.

Замечание. При этом сформулировано еще одно правило сложения векторов – правило параллелограмма: сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на них как на сторонах, выходящая из их общего начала.

<u>Свойство 2.</u> **(**$\vec{a}+\vec{b}$**)**+$\vec{c}=\vec{a}$+**(**$\vec{b}+\vec{c}$**).**



Доказательство. Из рисунка видно, что

($\vec{a}+\vec{b}$**)**+$\vec{c}$**=(OA+AB)+BC=OB+BC=OC,**

$\vec{a}$**+(**$\vec{b}+\vec{c}$**)=OA+(AB+BC)=OA+AC=OC.**

Свойство 2 доказано.

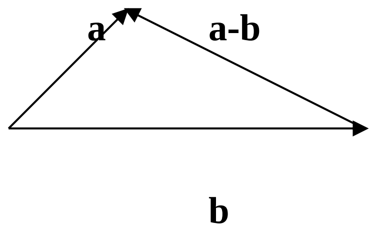
<u>Свойство 3</u>. Для любого вектора **a** существует нулевой вектор **O** такой, что $\vec{a}$ +**O**=$\vec{a}$.

Доказательство этого свойства следует из определения 5.5.

Свойство 4. Для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор $\vec{a}'$ такой, что $\vec{a}+\vec{a}'=\mathbf{O}$.

Доказательство. Достаточно определить $\vec{a}'$ как вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий одинаковую с ним длину и противоположное направление.

Определение 1.6. **Разностью** $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.



Определение 1.7. **Произведением** $k\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий модуль, равный $|k||\vec{a}|$, и направление, совпадающее с направлением $\vec{a}$ при $k>0$ и противоположное $\vec{a}$ при $k<0$.

Свойства умножения вектора на число:

Свойство 1. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$.

Свойство 2. $(k + m)\vec{a} = k\vec{a}+m\vec{a}$.

Свойство 3. $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$.

Следствие. Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Вопросы для самопроверки:

1. Дайте определение модуля вектора, свойства отношения «равно» векторов.
2. Сложение векторов. Свойства сложения векторов.
3. Что значить умножить вектор на число, свойства умножения вектора на число.
4. Что такое ось? Координаты вектора на оси. Утверждение об отношении вектора к единичному вектору. Свойства направляющих косинусов:

– Лекция 2.

(«лекция вдвоем»).

Базис и координаты вектора. Проекция ,свойства проекций.

Определение 2.1. **Линейной комбинацией** векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется выражение вида: $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n$, (5.1), где k_i – числа.

Определение 2.2. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если найдутся такие числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$, не все равные нулю, что соответствующая линейная комбинация векторов равна нулю, т.е. $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = 0$. (5.2)

Если же равенство (5.2) возможно только при всех $k_i = 0$, векторы называются **линейно независимыми**.

Замечание 1. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Замечание 2. Если среди n векторов какие-либо (n-1) линейно зависимы, то и все n векторов линейно зависимы.

Замечание 3. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.

Определение 2.3 Векторы называются **компланарными**, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Замечание 4. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

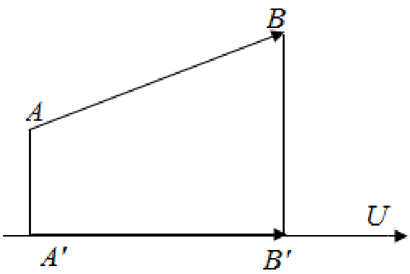
Замечание 5. Любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы.

Определение 2.4. Два линейно независимых вектора на плоскости (или три линейно независимых вектора в пространстве) образуют **базис**, если любой вектор плоскости (пространства) может быть представлен в виде их линейной комбинации. Числовые коэффициенты этой линейной комбинации называются **координатами** данного вектора в рассматриваемом базисе:

если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – базис и $\vec{d}$ = k $\vec{a}$ + m $\vec{b}$ + p $\vec{c}$, то числа k, m, p есть координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Свойства базиса:

1. Любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, а любые три некомпланарных вектора – базис в пространстве.
2. Разложение данного вектора по данному базису единственно, т.е. его координаты в данном базисе определяются единственным образом.
3. При сложении двух векторов их координаты относительно любого базиса складываются.
4. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

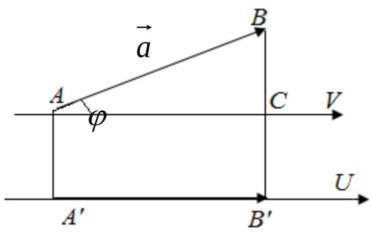


Определение 2.5 **Проекцией** вектора **AB** на ось U называется длина направленного отрезка $\mathbf{A^{/}B^{/}}$ оси U, где $A^{/}$ и $B^{/}$ - основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось U.

Обозначение: пр$_{u}\vec{a}$.

<u>Свойства проекции:</u>

1. Пр$_{u}\vec{a}$ = $|\vec{a}|$ cosφ, где φ – угол между $\vec{a}$ и осью U.



Доказательство: Обозначим через V ось, проходящую через начало A вектора $\vec{a}$ и имеющую тоже направление, что и ось U, и пусть C- проекция B на ось V.

$\angle BAC=\varphi$, $A^{/}B^{/}$ = AC. Т.к. по определению пр$_{u}\vec{a}$ = $A^{/}B^{/}$, то пр$_{u}\vec{a}$ = AC .

Но AC=$|\overrightarrow{AB}|cos\varphi$= $|\vec{a}|cos\varphi$. Следовательно, пр$_{u}\vec{a} = |\vec{a}|cos\varphi$, ч.т.д.

2. При сложении двух векторов их проекции на любую ось складываются.
3. При умножении вектора на число его проекция на любую ось умножается на это число.

Замечание. Свойства 2 и 3 назовем линейными свойствами проекции.

Рассмотрим декартову систему координат, базис которой образуют в пространстве три попарно ортогональных единичных вектора ***i, j, k***. Тогда любой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде их линейной комбинации:

$$\vec{d} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}. \qquad (1.3)$$

Определение 2.6. Числа X, Y, Z называются **декартовыми координатами** вектора $\vec{d}$.

Замечание. Декартовы координаты вектора равны его проекциям на оси Ox, Oy и Oz декартовой системы координат.

Определение 2.6. Косинусы углов, образованных вектором о осями декартовой системы координат, называются его **направляющими косинусами**.

<u>Свойства направляющих косинусов:</u>

1. $X = |\vec{d}|\,cos\alpha$, $Y = |\vec{d}|\,cos\beta$, $Z = |\vec{d}|\,cos\gamma$.
2. $\cos\alpha = \dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.

Вопросы для самопроверки:

1. Свойства проекций вектора на ось.
2. Дайте определение базиса и сформулируйте его свойства.
3. Дайте определение коллениарности и компланарности векторов.
4. Дайте определение линейно зависимости и независимости векторов.

– Лекция 3.

(«лекция беседа»).

– Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение.

Определение 3.1. **Скалярным произведением** двух векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \,. \qquad (5.4)$$

Обозначения скалярного произведения: $\vec{a}\,\vec{b}$, $(\vec{a}\,\vec{b}), \vec{a}\cdot\vec{b}$.

<u>Свойства скалярного произведения:</u>

1. $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,\text{пр}_a\vec{b}$.

Доказательство. По свойству проекции $\text{пр}_a\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$, следовательно, $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,\text{пр}_a\vec{b}$.

2. $\vec{a}\,\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

3. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$.

4. $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\,\vec{b})$.

5. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$.

6. $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}|^2$, где $\vec{a}^{\,2}$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$.

7. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми координатами

$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, то

$\vec{a}\,\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$.

Доказательство. Используя формулу , получим:

$$\vec{a}\,\vec{b} = (X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k})(X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}) \,.$$

Используя свойства 4 и 5, раскроем скобки в правой части полученного равенства:

$\vec{a}\,\vec{b}$ = X_1X_2**ii** +Y_1Y_2**jj** + Z_1Z_2**kk** + X_1Y_2**ij** +X_1Z_2**ik** + Y_1X_2**ji** + Y_1Z_2**jk** + Z_1X_2**ki** + Z_1Y_2**kj.**

Но **ii = jj = kk =** 1 по свойству 6, **ij = ji = ik = ki = jk = kj** = 0 по свойству 2, поэтому

$$\vec{a}\,\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2\,.$$

8. $$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}\,. \qquad (5.6)$$

Замечание. Свойства 2, 3, 4 доказываются из определения 5.14, свойства 5, 6 – из свойств проекции, свойство 8 – из свойства 7 и свойств направляющих косинусов.

Вопросы для самопроверки:

1. Дайте определение скалярного произведения векторов.
2. Свойства скалярного произведения.
3. Выражение угла между векторами через координаты векторов.

– **Лекция 4.**

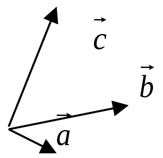
(«лекция вдвоем»).

– Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.

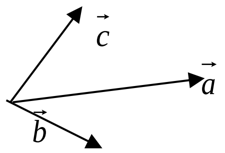
– Координатное выражение векторного и смешанного произведения. Условия коллинеарности и компланарности векторов.

Будем называть три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, для которых определен порядок следования, **тройкой** (или упорядоченной тройкой) векторов.

Определение 4.1. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ называется правой, если после приведения их к общему началу «посмотреть» с конца вектора $\vec{c}$ на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ называется левой.



$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ – правая тройка



$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ – левая тройка

Замечание. В дальнейшем будем рассматривать только **правые системы координат**, т.е. системы, базисные векторы которых образуют правую тройку.

Векторное произведение векторов.

Определение 4.2. Вектор $\vec{c}$ называется **векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

3) Тройка векторов $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ является правой.

Обозначения векторного произведения: $\vec{c} = [\vec{a}\,\vec{b}]$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Свойства векторного произведения.

1) $[\vec{b}\,\vec{a}] = -[\vec{a}\,\vec{b}]$.

2) $[\vec{a}\,\vec{b}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

Доказательство. Из первого пункта определения 6.2 следует, что модуль векторного произведения ненулевых векторов равен нулю только при sinφ = 0, что соответствует коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3) Модуль векторного произведения $|[\vec{a}\;\vec{b}]|$ равняется площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Доказательство следует из первого пункта определения 6.2.

Определение 4.3. **Орт $\mathbf{e_a}$** произвольного вектора $\vec{a}$ – это вектор единичной длины, коллинеарный $\vec{a}$ и одинаково с ним направленный ($|\mathbf{e_a}| = 1$, $\mathbf{e_a} \parallel \vec{a}$).

4) $[(k\,\vec{a})\,\vec{b}] = k[\vec{a}\,\vec{b}]$.

5) $[(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c}] = [\vec{a}\,\vec{c}] + [\vec{b}\,\vec{c}]$.

6) Если в декартовой системе координат $\vec{a} = \{X_a, Y_a, Z_a\}$, $\vec{b} = \{X_b, Y_b, Z_b\}$, то

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \left\{\begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

Представим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в виде: $\vec{a} = X_a\boldsymbol{i} + Y_a\boldsymbol{j} + Z_a\boldsymbol{k}$, $\vec{b} = X_b\boldsymbol{i} + Y_b\boldsymbol{j} + Z_b\boldsymbol{k}$. Отметим, что $[\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{jk}] = \boldsymbol{i}$, $[\boldsymbol{ki}] = \boldsymbol{j}$, $[\boldsymbol{ii}] = [\boldsymbol{jj}] = [\boldsymbol{kk}] = 0$. Тогда с использованием свойств 4 и 5 получим:

$[(X_a\boldsymbol{i} + Y_a\boldsymbol{j} + Z_a\boldsymbol{k})(X_b\boldsymbol{i} + Y_b\boldsymbol{j} + Z_b\boldsymbol{k})] = (Y_aZ_b - Y_bZ_a)\boldsymbol{i} + (X_bZ_a - X_aZ_b)\boldsymbol{j} + (X_aY_b - X_bY_a)\boldsymbol{k}$, что доказывает свойство 6.

Пример. Вычислим векторное произведение векторов $a=\{3,-4,2\}$ и $b=\{1,5,1\}$.

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \left\{\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}\right\} = \{-14, -1, 19\}.$$

Смешанное произведение векторов.

Определение 4.4. **Смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется результат скалярного умножения векторного произведения $[\vec{a}\,\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначение: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = [\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$.

<u>Свойства смешанного произведения.</u>

1) Смешанное произведение $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ если они образуют правую тройку, или числу, противоположному этому объему, если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ – левая тройка. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c} = 0$.

   Доказательство.

a) Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то вектор $[\vec{a}\,\vec{b}]$ ортогонален плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и, следовательно, $[\vec{a}\,\vec{b}] \perp \vec{c}$. Поэтому $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c} = 0$.

b) Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c} = |[\vec{a}\,\vec{b}]||\vec{c}| = S\cdot|\vec{c}|\cos\varphi$, где φ – угол между $\vec{c}$ и $[\vec{a}\,\vec{b}]$. Тогда $\pm\,|\vec{c}|\cos\varphi$ – высота рассматриваемого параллелепипеда. Таким образом, $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c} = \pm V$, где выбор знака зависит от величины угла между $\vec{c}$ и $[\vec{a}\,\vec{b}]$. Утверждение доказано.

Следствие. $[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c} = \vec{a}\ [\vec{b}\,\vec{c}\,]$.

Действительно, обе части равенства представляют объем одного и того же пареleллепипеда. Поэтому положение векторных скобок в смешанном произведении не важно, и в его обозначении скобки не ставятся : $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

2) Если $\vec{a}$ = {X_a, Y_a, Z_a}, $\vec{b}$ = {X_b, Y_b, Z_b}, $\vec{c}$ = {X_c, Y_c, Z_c}, то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Используя координатную запись скалярного и векторного произведения, запишем:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c} = (Y_aZ_b - Y_bZ_a)X_c + (X_bZ_a - X_aZ_b)Y_c + (X_aY_b - X_bY_a)Z_c = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}$ = {-3,2,-1}, $\vec{b}$ ={2,1,0}, $\vec{c}$ = {-1,3,-1}. Для этого вычислим определитель, составленный из их координат:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$ следовательно, векторы компланарны.

Пример 2. Найдем объем пирамиды с вершинами в точках A(0,-3,-1), B(3,3,2), C(1, 0, -3) и D(2, -1, 1).

Отметим, что объем пирамиды ABCD в 6 раз меньше объема параллелепипеда, построенного на векторах **AB, AC** и **AD**. Найдем координаты этих векторов:

AB = {3,6,3}, **AC** = {1,3,-2}, **AD** = {2,2,2}. Тогда **AB AC AD** = $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18.$

Следовательно, объем пирамиды равен 18:3 =6.

Вопросы для самопроверки:

1. Что значит тройка векторов правая (левая)?
2. Дайте определение векторного произведения векторов.
3. Сформулируйте свойства векторного произведения векторов.
4. Сформулируйте свойства смешанного произведения векторов. Запишите формулу для вычисления

– Лекция 5.
Линии на плоскости и их уравнения..

«лекция вдвоем»

Пусть на плоскости π заданы декартова прямоугольная система координат Оxy и некоторая линия L. Рассмотрим уравнение, связывающее переменные x и y

$$\Phi (x,y) = 0 \quad (7.1)$$

Определение 5.1. Уравнение называется уравнением линии L (относительно заданной системы координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты x и y ни одной точки, не лежащей на линии L.

Т.е. линия L представляет собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (7.1).

Примеры.

1. Уравнение $(x-a)^2+ (y-b)^2= r^2$ является уравнением окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $M_0 (a,b)$.

2. Уравнение $x^2+y^2=0$ определяет на плоскости Oxy только одну точку (0,0).

3. Уравнение $x^2+y^2+4=0$ вообще не определяет никакого геометрического образа.

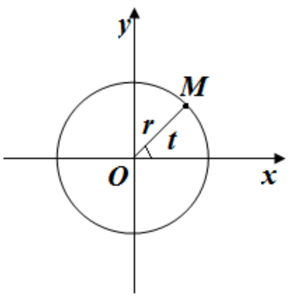
Параметрическое представление линии

Для аналитического представления линии L возможно выражать координаты x и y точек этой линии при помощи параметра t :

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t), \qquad (7.2.)$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и непрерывны по параметру t в области $\{t\}$ изменения этого параметра. Исключение из двух уравнений (7.2) параметра t приводит к уравнению вида (7.1).

Пример. Найдем параметрические уравнения окружности радиуса $r>0$ с центром в начале координат.



Пусть M (x,y) - любая точка этой окружности, а t - угол между радиусом – вектором OM и осью Ox, отсчитываемой против часовой стрелки.

Тогда $$x=r\cos t,\ y=r\sin t \qquad (7.3)$$

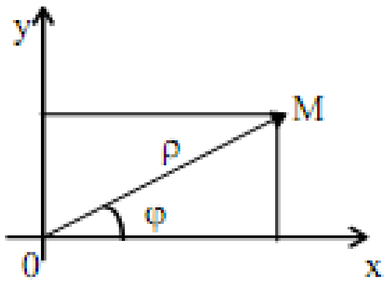
Эти уравнения представляют собой параметрические уравнения нашей окружности. Чтобы точка M (x,y), один раз обошла окружность, t должно изменяться в пределах: $0\le t<2\pi$.

Для исключения параметра t из уравнения, нужно возвести в квадрат и сложить уравнения (7.3); получим

$$x^2+y^2=r^2$$

Уравнение линии в полярных координатах

Введем на плоскости полярные координаты, выберем на плоскости точку О (полюс) и выходящий из нее луч Ох; укажем единицу масштаба.



Полярными координатами точки М называются два числа:

ρ **(полярный радиус)** равное расстоянию точки М от полюса О и

φ **(полярный угол) -** угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки луч Ох до совмещения с лучом ОМ.

Точку М обозначают символом М(ρ,φ) , и обычно считают, что

$0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Если начало декартовой прямоугольной системы находится в полюсе, а ось абсцисс совпадает с полярной осью, то очевидна **связь между полярными координатами точки М(ρ,φ), и ее декартовыми координатами М(х,у) :**

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi \qquad (7.4)$$

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая их, получим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Разделив одно на другое, получим, что $tg = \dfrac{y}{x}$, а также используя знаки х и у, определим четверть, в которой находится точка М.

Т.е., зная декартовы координаты точки х и у можно найти ее полярные координаты.

Если Ф (х,у) = 0 представляет собой уравнение линии L в декартовой прямоугольной системе координат Оху, то достаточно подставить на место х и у их выражения в полярных координатах (7.4):

получим $\Phi_1(\rho,\varphi) = 0$,

где использовали обозначение $\Phi_1(\rho,\varphi) = \Phi(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi)$

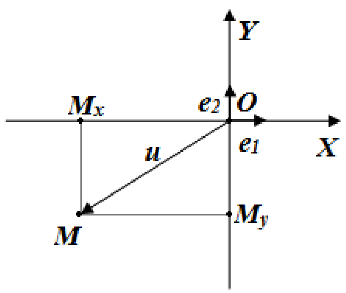
Прямоугольная система координат на плоскости

Задание прямоугольной системы координат, прежде всего, предполагает, что выбрана одна определенная единица длины, посредством которой измеряются длины всех отрезков.

Такую длину будем называть ***масштабом*** .

Вектор, длина которого равна 1, назовем ***ортом***.

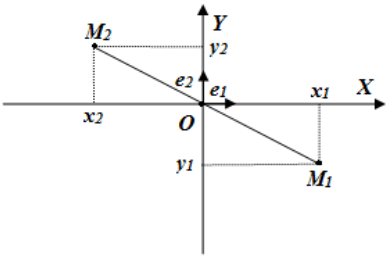
После того как масштаб выбран, прямоугольную систему координат определяем как частный случай аффинной системы координат, при условии, что единичные координатные векторы e_1 и e_2 были бы <u>взаимно перпендикулярными ортами</u>.



Пусть дан вектор $u = \overrightarrow{OM} = \{x, y\}$

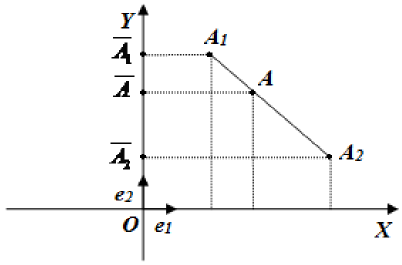
Длину вектора $\overrightarrow{OM}$ обозначим $|u| = |\overrightarrow{OM}|$, обозначим M_x и M_y проекции точки M на оси координат, имеем $x=(OM_x)$, $y=(OM_y)$, тогда по теореме Пифагора

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_x}|^2 + |\overrightarrow{OM_y}|^2, \text{ т.е. } |u|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |u| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Отсюда вытекает формула для расстояния $\rho(M_1,M_2)$ между двумя точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ т.к. $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$, то $\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Деление отрезка в данном отношении



Пусть даны 2 точки $A_1(x_1,y_1)$ и $A_2(x_2,y_2)$. Найдем координату точки $A(x,y)$, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $\lambda_1:\lambda_2$.

Пусть отрезок A_1A_2 не параллелен оси OX, спроецируем точки на A_1, A, A_2 на ось OY, тогда имеем $\frac{|A_1A|}{|AA_2|}=\frac{|\overline{A_1}\,\overline{A}|}{|\overline{A}\,\overline{A_2}|}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, но

$|\overline{A_1}\,\overline{A}|=|y_1-y|$ и $|\overline{A}\,\overline{A_2}|=|y-y_2|$ следовательно $\frac{|y-y_1|}{|y_2-y|}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

Но т.к. $\overline{A}$ лежит между $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$, то (y_1-y) и $(y-y_2)$ одного знака , отсюда

$\frac{y_1-y}{y-y_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$\Rightarrow$ $\lambda_2(y_1-y)=\lambda_1(y-y_2)$ или $y=\frac{\lambda_2 y_1+\lambda_1 y_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

Аналогично находится абсцисса точки A $x=\frac{\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

Иногда, если обозначить $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\lambda$, то $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ и $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

Вопросы для самопроверки:

1. Параметрическое представление линии.
2. Как задается прямоугольная система координат на плоскости?
3. Выведите формулу деления отрезка в данном отношении.

Лекция 6.

Прямая на плоскости.

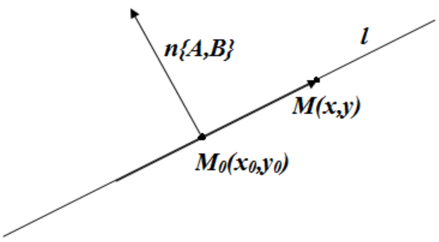
Различные формы уравнений прямой на плоскости. «лекция вдвоем»

Рассмотрим различные виды уравнений прямой на плоскости.

Пусть прямая проходит через точку M_0 (x_0,y_0) перпендикулярно вектору **n** = {A,B}. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$, где M(x,y) – произвольная точка прямой, ортогонален **n**. Поэтому координаты любой точки данной прямой l удовлетворяют уравнению

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 - \qquad (7.5)$$

уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.



Замечание. Вектор **n** называется **нормалью** к прямой.

Преобразуем уравнение (7.5) к виду:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Обозначив $-Ax_0 - By_0 = C$, получим

общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$ (7.6)

Неполные уравнения прямой.

Уравнение (7.6) называется **полным**, если коэффициенты A,B и C не равны нулю, и **неполным**, если хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Рассмотрим возможные виды неполных уравнений прямой.

1) C = 0 - прямая Ax + By = 0 проходит через начало координат.
2) B = 0 - прямая Ax + C = 0 параллельна оси Oy (так как нормаль к прямой {A,0} перпендикулярна оси Oy).
3) A = 0 - прямая By + C = 0 параллельна оси Ox.
4) B=C=0 – уравнение Ax = 0 определяет ось Oy.
5) A=C=0 – уравнение By = 0 определяет ось Ox.

Таким образом, прямая, задаваемая полным уравнением, не проходит через начало координат и не параллельна координатным осям. Преобразуем полное уравнение прямой следующим образом:

$$Ax + By + C = 0 \ |:(-C), \quad -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (7.7)$$

где $a = -\frac{C}{A}$ и $b = -\frac{C}{B}$ равны величинам отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy. Поэтому уравнение (7.7) называют **уравнением прямой в отрезках**.

Получим теперь уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (x_0,y_0) параллельно вектору **q** = $\{l,m\}$. Так как вектор $\overrightarrow{M_0M}$, где M(x,y) – произвольная точка прямой, коллинеарен **q**, координаты любой точки данной прямой удовлетворяют уравнению

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \qquad (7.8)$$

называемому **каноническим уравнением прямой**. Вектор **q** при этом называется **направляющим вектором прямой**. В частности, если прямая проходит через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, ее направляющим вектором можно считать $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$, и из уравнения (7.5) следует:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \ - \qquad (7.9)$$

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Пример.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки M(1,2) и N(5,-3). Уравнение (7.9) примет вид:

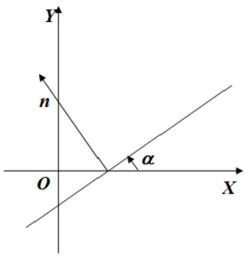
$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-2}{-3-2}, -5x + 5 = 4y - 8, \quad 5x + 4y - 13 = 0$ - общее уравнение данной прямой.

Обозначив за t значения равных дробей, стоящих в левой и правой частях уравнения (7.8),

можно преобразовать это уравнение к виду:

$$x = x_0 + lt, \ \ y = y_0 + mt \qquad (7.10)$$

параметрические уравнения прямой.



Пусть прямая не параллельна оси Ox, тогда в уравнении (7.6) коэффициент $B \neq 0$. Углом наклона этой прямой к оси Ox назовем угол $\alpha>0$, образованный прямой с положительным направлением оси Ox.

Если прямая параллельна оси Ox, то угол наклона α будем считать равным нулю.

Угловым коэффициентом прямой назовем тангенс угла наклона этой прямой к оси Ox, $k= tg\alpha$.

Для прямой, параллельной оси Ox, угловой коэффициент равен 0, а для прямой, перпендикулярной оси Ox, угловой коэффициент не существует ($k = \infty$).

Из уравнения (7.5) и того, что n= {A,B}, - нормальный вектор прямой следует, что

$$tg\alpha = k = -\frac{A}{B}$$

Отсюда получим уравнение прямой с угловым коэффициентом в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Если обозначить $b=y_0 - k\,x_0$, то последнее уравнение примет вид

$$y = kx+b \qquad (7.11)$$

Это уравнение и называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**.

Здесь *k*- угловой коэффициент данной прямой, а *b* - отрезок, отсекаемый данной прямой на оси Оу, начиная от начала координат (при x =0 , y= 0).

Вопросы для самопроверки:

1. Выведите общее уравнение прямой.
2. уравнением прямой в отрезках.
3. параметрические уравнения прямой.
4. уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Лекция 7.

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. . «проблемная лекция»

1. Если прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то угол между ними равен углу между их нормалями, то есть между векторами $\{A_1,B_1\}$ и $\{A_2,B_2\}$. Следовательно**,**

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad \textbf{(}7.12)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых тоже сводятся к условиям параллельности и перпендикулярности нормалей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ - условие параллельности,} \qquad (7.13)$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \text{ - условие перпендикулярности.} \qquad (7.14).$$

2. Если прямые заданы каноническими уравнениями (7.8), по аналогии с пунктом 1 получим:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}, \qquad (7.15)$$

$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$ - условие параллельности, (7.16)

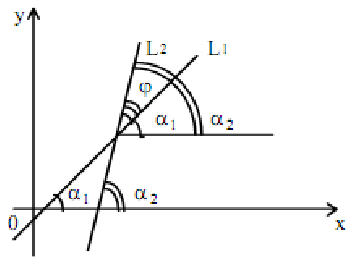
$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$ - условие перпендикулярности. (7.17).

Здесь $\{l_1, m_1\}$ и $\{l_2, m_2\}$ - направляющие векторы прямых.

3. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами (7.11)

$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где

а α_1 и α_2 – углы наклона прямых L_1 и L_2 к оси Ох, то угол φ – угол между этими прямыми.



Из рисунка видно, что угол $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Отсюда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Т.е. угол меду прямыми L_1 и L_2 определяется по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (7.18)$$

Если в этой формуле поменять местами k_1 и k_2 , то формула определит нам угол между прямыми, смежный к прежнему углу. Т.к. эти два угла в сумме равны π и их тангенсы отличаются только знаком.

Прямые параллельны, если: $tg\varphi=0$, т.е $k_1=k_2$, (7.19)

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2получим из формулы (7.18), т.к. $tg\varphi$ не существует при $k_1k_2 +1=0$.

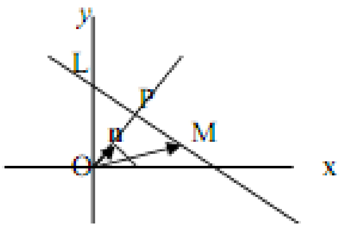
Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 запишем в виде:

$k_2 = -1/k_1$, *(7.20)*

Расстояние от точки до прямой.

Рассмотрим прямую L и проведем перпендикуляр OP к ней из начала координат (предполагаем, что прямая не проходит через начало координат). Пусть n – единичный вектор, направление которого совпадает с OP. Составим уравнение прямой L, в которое входят два параметра: p – длина отрезка OP и α – угол между OP и Ox.

Для точки M, лежащей на L, проекция вектора OM на прямую OP равна p.



С другой стороны, $пр_n OM = n \cdot OM$. Поскольку n={cosα, sinα}, а OM={x,y}, получаем, что x cosα + y sinα = p, или x cosα + y sinα + p = 0 - (7.21)

- искомое уравнение прямой L, называемое нормальным уравнением прямой (термин «нормальное уравнение» связан с тем, что отрезок OP является перпендикуляром, или нормалью, к данной прямой).

Определение 7.2. Если *d* – расстояние от точки A до прямой L, то **отклонение** δ точки A от прямой L есть число +*d*, если точка A и начало координат лежат по разные стороны от прямой L, и число –*d*, если они лежат по одну сторону от L.

Теорема 7.1. Отклонение точки $A(x_0,y_0)$ от прямой *L*, заданной уравнением (7.21), определяется по формуле:

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p\,. \qquad (7.22)$$

Следствие.

Расстояние от точки до прямой определяется так:

$$d = | x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p |\,. \qquad (7.23).$$

Замечание. Для того, чтобы привести общее уравнение прямой к нормальному виду, нужно умножить его на число $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, причем знак выбирается противоположным знаку свободного члена C в общем уравнении прямой. Это число называется нормирующим множителем.

Пример. Найдем расстояние от точки A(7,-3) до прямой, заданной уравнением

$$3x + 4y + 15 = 0. \quad A^2+B^2=9+16=25,\ C=15>0,$$

поэтому нормирующий множитель равен -1/5,

и нормальное уравнение прямой имеет вид:

$-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0.$

Подставив в его левую часть вместо x и y координаты точки A, получим, что ее отклонение от прямой равно $-\frac{3}{5}\cdot 7-\frac{4}{5}\cdot(-3)-3=-4{,}8.$

Следовательно, расстояние от точки A до данной прямой равно 4,8.

Вопросы для самопроверки:

1. Напишите формулу для вычисления угла между прямыми .
2. Вывод формулы для вычисления расстояния от точки до прямой.
3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Лекция 8.

Плоскость в пространстве, нормальное уравнение плоскости.(проблемная лекция)

Отметим, что многие утверждения и формулы, касающиеся плоскости в пространстве, доказываются и выводятся так же, как при изучении прямой на плоскости, поэтому в этих случаях будут даваться ссылки на предыдущую лекцию.

Получим сначала уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = \{A,B,C\}$,называемому нормалью к плоскости. Для любой точки плоскости $M(x,y,z)$ вектор $\mathbf{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ ортогонален вектору $\mathbf{n}$, следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \tag{8.1}$$

Получено уравнение, которому удовлетворяет любая точка заданной плоскости – **уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.**

После приведения подобных можно записать уравнение (8.1) в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{8.2}$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Это линейное уравнение относительно трех переменных называют **общим уравнением плоскости**.

Неполные уравнения плоскости.

Если хотя бы одно из чисел A,B,C,D равно нулю, уравнение (8.2) называют неполным.

Рассмотрим возможные виды неполных уравнений:

1) $D=0$ – плоскость $Ax+By+Cz=0$ проходит через начало координат.
2) $A=0$ – $\mathbf{n} = \{0,B,C\} \perp Ox$, следовательно, плоскость $By+Cz+D=0$ параллельна оси Ox.
3) $B=0$ – плоскость $Ax+Cz+D=0$ параллельна оси Oy.
4) $C=0$ – плоскость $Ax+By+D=0$ параллельна оси Oz.
5) $A=B=0$ – плоскость $Cz+D=0$ параллельна координатной плоскости Oxy (так как она параллельна осям Ox и Oy).

6) A=C=0 – плоскость By+D=0 параллельна координатной плоскости Oxz.

7) B=C=0 – плоскость Ax+D=0 параллельна координатной плоскости Oyz.

8) A=D=0 – плоскость By+Cz=0 проходит через ось Ox.

9) B=D=0 – плоскость Ax+Cz=0 проходит через ось Oy.

10) C=D=0 - плоскость Ax+By=0 проходит через ось Oz.

11) A=B=D=0 – уравнение Cz=0 задает координатную плоскость Oxy.

12) A=C=D=0 – получаем By=0 – уравнение координатной плоскости Oxz.

13) B=C=D=0 – плоскость Ax=0 является координатной плоскостью Oyz.

Если же общее уравнение плоскости является полным (то есть ни один из коэффициентов не равен нулю), его можно привести к виду:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (8.3)$$

называемому **уравнением плоскости в отрезках**. Способ преобразования показан в лекции 7. Параметры a,b и c равны величинам отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях.

Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Если две плоскости (α_1 и α_2) заданы общими уравнениями вида:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то очевидно, что угол между ними равен углу между их нормалями, то есть между векторами $\mathbf{n}_1$={A_1,B_1,C_1) и $\mathbf{n}_2$={A_2,B_2,C_2). Из формулы (5.6) получаем, что косинус угла между плоскостями α_1 и α_2 равен

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{8.4}$$

Условие параллельности плоскостей заключается в параллельности нормалей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

(8.5)

а **условие перпендикулярности плоскостей** – в перпендикулярности нормалей или равенстве нулю их скалярного произведения:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

(8.6)

Выведем еще несколько уравнений плоскости. Пусть плоскость проходит через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой. Тогда векторы $\mathbf{M_1M_2}$={x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1}, $\mathbf{M_1M_3}$={x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1} и $\mathbf{M_1M}$={$x-x_1,y-y_1,z-z_1$}, где $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости, компланарны. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Используя координатную запись смешанного произведения, получаем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.7}$$

Это уравнение, которому удовлетворяют координаты x,y,z любой точки, лежащей на искомой плоскости, является **уравнением плоскости, проходящей через три данные точки.**

Способом, аналогичным изложенному в лекции 7, можно получить **нормальное уравнение плоскости**:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad (8.8)$$

где p – длина перпендикуляра OP, опущенного из начала координат на плоскость, а cosα, cosβ, cosγ – направляющие косинусы нормали к этой плоскости. **При этом расстояние от любой точки A пространства до данной плоскости** определяется по формуле:

$$d = | x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p | \;, \qquad (8.9)$$

где x_0,y_0,z_0 – координаты рассматриваемой точки A. Подмодульное выражение в формуле (8.9) называется **отклонением точки A от плоскости** и принимает положительные значения, если A и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, и отрицательные, если эти две точки лежат по одну сторону от плоскости. Нормальное уравнение получается из общего уравнения плоскости в результате деления его на нормирующий множитель $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знак которого противоположен знаку D.

Доказательства всех сформулированных утверждений полностью аналогичны исследованию нормального уравнения прямой на плоскости, рассмотренного в лекции 7.

Пучок плоскостей.

Через всякую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей. Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется пучком плоскостей.

Пусть дано уравнение прямой как линии пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Составим уравнение:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad (2)$$

где λ - произвольное число. При любом λ это уравнение первой степени, кроме того, при любом λ это уравнение определяет плоскость, проходящую через прямую (1).

Действительно, если точка M_0 принадлежит прямой (1), то:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \end{cases}$$

и, следовательно , $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0$.

Уравнение (2) называется уравнением пучка плоскостей, проходящих через прямую (1).

Уравнение (2) дает любую плоскость пучка, за исключением плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Вопросы для самопроверки:

1. Рассмотрите все случаи неполного уравнения плоскости.
2. Условие параллельности плоскостей, условие перпендикулярности плоскостей
3. Расстояние от любой точки A пространства до данной плоскости определяется по формуле?
4. Пучок плоскостей, написать формулу.

Лекция 9.

Прямая в пространстве. Угловые соотношения между прямой и плоскостью.

Замечание. Прямую в пространстве невозможно задать одним уравнением. Для этого требуется система двух или более уравнений.

Первая возможность составить уравнения прямой в пространстве – представить эту прямую как пересечение двух непараллельных плоскостей, заданных уравнениями

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, где коэффициенты A_1,B_1,C_1 и A_2,B_2,C_2 не пропорциональны:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

(8.10)

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Однако при решении многих задач удобнее пользоваться другими уравнениями прямой, содержащими в явной форме некоторые ее геометрические характеристики.

Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$.

Определение 8.1. Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее **направляющим вектором**.

Для любой точки M(x,y,z), лежащей на данной прямой, вектор $\mathbf{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ коллинеарен направляющему вектору **a**. Поэтому имеют место равенства:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \qquad (8.11)$$

называемые **каноническими уравнениями** прямой в пространстве.

В частности, если требуется получить уравнения прямой, проходящей через две точки: $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, направляющим вектором такой прямой можно считать вектор $\mathbf{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$, и уравнения (8.11) принимают вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad - \qquad (8.12)$$

- **уравнения прямой, проходящей через две данные точки**.

Если же принять каждую из равных дробей в уравнениях (8.11) за некоторый параметр t, можно получить так называемые **параметрические уравнения прямой**:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}.$$

(8.13)

Для того, чтобы перейти от уравнений (8.10) к каноническим или параметрическим уравнениям прямой, требуется найти направляющий вектор этой прямой и координаты любой точки, принадлежащей ей. Направляющий вектор прямой ортогонален нормалям к обеим плоскостям, следовательно, он коллинеарен их векторному произведению. Поэтому в качестве направляющего вектора можно выбрать [$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$] или любой вектор с пропорциональными координатами. Чтобы найти точку, лежащую на данной прямой, можно задать одну ее координату произвольно, а две остальные найти из уравнений (8.10), выбрав их так, чтобы определитель из их коэффициентов не равнялся нулю.

Пример. Составим канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0 \\ x - 5y + 4z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Найдем [$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$]. $\mathbf{n}_1$ = {2,1,-3}, $\mathbf{n}_2$ = {1,-5,4}. Тогда [$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$] = {-11,-11,-11}. Следовательно, направляющим вектором прямой можно считать вектор {1,1,1}.

Будем искать точку на прямой с координатой z_0=0. Для координат x_0 и y_0 получим систему уравнений $\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 5 = 0 \\ x_0 - 5y_0 + 3 = 0 \end{cases}$, откуда x_0=2, y_0=1. Теперь можно составить канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}.$$

Параметрические уравнения той же прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}.$$

Замечание. Если какая-либо из координат направляющего вектора равна 0, то предполагается, что для любой точки прямой числитель соответствующей дроби в канонических уравнениях тоже равен 0.

Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Угол между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами. Поэтому, если две прямые заданы каноническими уравнениями вида

$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, косинус угла между ними можно найти по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \quad . \qquad (8.14)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых тоже сводятся к соответствующим условиям для их направляющих векторов:

$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ - **условие параллельности прямых**,
(8.15)

$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ - **условие перпендикулярности прямых**. (8.16)

Угол φ между прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

и плоскостью, определяемой общим уравнением

Ax + By + Cz + D = 0,

можно рассматривать как дополнительный к углу ψ между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости. Тогда

$$\sin\varphi=\cos\psi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad (8.17)$$

Условием параллельности прямой и плоскости является при этом условие перпендикулярности векторов **n** и **a**:

$$Al + Bm + Cn = 0,$$
(8.18)

а **условием перпендикулярности прямой и плоскости** – условие параллельности этих векторов: $A/l = B/m = C/n$.
(8.19)

Вопросы для самопроверки:

1. Способы задания прямой в пространстве.
2. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.
3. Условием параллельности прямой и плоскости
4. Параметрические уравнения прямой:

Лекция 10

Некоторые дополнительные примеры на прямую и плоскость в пространстве (лекция вдвоем).

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку М(3; 2; -1) перпендикулярно двум прямым:

$$a_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+4}{5} \quad \text{и} \quad a_2 : \frac{x+3}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-9}{-2}$$

Решение. Составим уравнение любой прямой, проходящей через точку М:

$$\frac{x-3}{\text{m}} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+1}{p}$$

Используя условие перпендикулярности искомой прямой к прямой a_1, а затем к прямой a_2 получим

$$2m-3n+5p=0$$
$$4m+n-2p=0$$

Из этой однородной структуры линейных уравнений с неизвестными *m, n, p* найдем отношения неизвестных:

$$m:n:p = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1:24:14$$

Подставляя в уравнения прямой вместо *m, n, p* пропорциональные им величины, получим искомые уравнения: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{24}=\frac{z+1}{14}$

Пример 2. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x+y-z-4=0 \\ 3x-y+2z-5=0 \end{cases}$$

Решение. Полагая, например, x_0=1, находим из данной системы: y_0=6, z_0=4; таким образом, мы уже знаем одну точку прямой: M_0(1; 6; 4).

Теперь найдем направляющий вектор. Имеем: n_1 ={2;1;-1}, n_2 ={3;-1;2}; отсюда l = [$n_1 n_2$]={1; -7; -5}, т.е. m=1, n=-7, p=-5.

Каноническое уравнение данной прямой мы получим, подставляя найденные значения x_0, y_0, z_0, m, n, p в каноническое уравнение прямой, получим:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-6}{-7}=\frac{z-4}{5}$$

Пример 3. Даны прямая $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{1}$ и плоскость $x+2y+z+6=0$ Найти точку их пересечения.

Решение. Задача сводится к определению координат точки x, y, z из трех данных уравнений (мы имеем два уравнения прямой и одно уравнение плоскости). Полагая $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{1}=t$ отсюда $x=2+t$, $y=3+2t$, $z=4+t$.

Подставляя эти выражения влевую часть уравнения данной плоскости получим

$$(2+t)+2(3+2t)+(4+t)-6=0.$$

Решая это уравнение, находим: t=-1, следовательно, координаты искомой точки будут

$$x=1,\ y=1,\ z=3.$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости П, проходящей через точку M(-1; 2;-3) параллельно двум прямым:

$$l_1: \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-6}{-5}$$

$$l_2: \quad \frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z}{1}$$

Напишем уравнение связки плоскостей с центром в точке M:

$$A(x+1)+B(y-2)+C(z+3)=0$$

Используем условие параллельности плоскости П и прямой l_1 , а затем к прямой l_2 :

$$\begin{cases} 3A + 4B - 5C = 0 \\ 2A - 3B + C = 0 \end{cases}$$

Из этой системы однородных уравнений определим отношения коэффициентов *A, B, C* и затем в уравнение связки плоскостей вместо коэффициентов *A, B, C* подставим пропорциональные им величины:

$$A : B : C = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -11 : -13 : 1$$

$$11(x+1) + 13(y-2) - 1(z+3) = 0 \qquad \text{или} \qquad 11x + 13y + z - 18 = 0$$

Пример 5. Найти проекцию прямой

$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 5y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ На плоскость 3x-4y+z-8=0 .

Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую 2x-3y+4z-1+λ(x+5y-2z+3)=0

или (2+λ)x+(5λ-3)y+(4-2λ)z+(3λ-1)=0

Определим λ, используя условие перпендикулярности плоскостей: 3(2+λ)-4(5λ-3)+(4-2λ)=0. Откуда $\lambda = \frac{22}{19}$.

Подставив значение в уравнение, найдем уравнение проектирующей плоскости:

$$2x - 3y + 4z - 1 + \frac{22}{19}(x + 5y - 2z + 3) = 0$$

$$60x + 53y + 32z + 47 = 0$$

Уравнения искомой проекции можно записать как уравнения линии пересечения плоскостей: $\begin{cases} 3x - 4y + z - 8 = 0 \\ 60x + 53y + 32z + 47 = 0 \end{cases}$

Пример 6. Определить условие, при котором две прямые

$$l_1 : \quad \frac{x - a_1}{m_1} = \frac{y + b_1}{n_1} = \frac{z - c_1}{p_1}$$

$$l_2 : \quad \frac{x - a_2}{m_2} = \frac{y + b_2}{n_2} = \frac{z - c_2}{p_2}$$

лежат на одной плоскости.

Решение. Пусть l_1={m_1; n_1; p_1} и l_2 ={m_2; n_2; p_2} направляющие векторы данных прямых, $M_1(a_1; b_1; c_1)$ и $M_2(a_2; b_2; c_2)$ - точки, принадлежа щие прямым

l_1 и l_2. Вектор $M_1M_2=\{a_2$-a_1; b_2-b_1; c_2-$c_1\}$ и направляющие векторы прямых l_1 и l_2 компланарны в том и только в том случае, когда прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости. Условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения:

$(M_1M_2 \cdot l_1 \cdot l_1)=0$, что в координатной записи может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

Вопросы для самопроверки:

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку М(3; 2; -1) перпендикулярно двум прямым: $a_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z+4}{5}$,

$a_2: \frac{x+3}{4}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-9}{-2}$

2. . Определить условие, при котором две прямые

$$l_1: \quad \frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y+b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}$$

$$l_2: \quad \frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y+b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}$$

лежат на одной плоскости.

3. . Найти проекцию прямой

$\begin{cases} 2x-3y+4z-1=0 \\ x+5y-2z+3=0 \end{cases}$ На плоскость 3x-4y+z-8=0 .

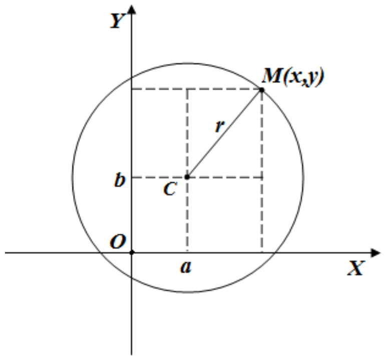
Лекция 11.

Кривые второго порядка. Окружность, особенности уравнения. Эллипс, определение, вывод канонического уравнения эллипса.(проблемная лекция)

Будем рассматривать линии, уравнения которых в декартовой системе координат являются алгебраическими уравнениями второй степени, то есть будем рассматривать алгебраические кривые второго порядка. Будут рассмотрены три вида линий второго порядка: эллипсы, гиперболы и параболы. Основной целью является ознакомление с важнейшими геометрическими свойствами указанных линий.

Окружность

Определение 9.1. Окружностью называется называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от данной фиксированной точки, называемой центром.



Пусть $C(a,b)$ – центр окружности,

r – расстояние от любой точки окружности до центра, т.е. **радиус**,

$M(x,y)$ – любая точка окружности.

Тогда $|CM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, возведем в квадрат $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$.

Если центр окружности лежит в начале координат, то $a=b=0$, то

$x^2 + y^2 = r^2$ – **каноническое уравнение окружности.**

Вернемся к уравнению $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ и раскроем скобки $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + m = 0$, где $m = a^2 + b^2 - r^2$ - это уравнение 2-ой степени, следовательно, окружность есть кривая второго порядка.

Особенности уравнения:

1. коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой.
2. отсутствует член, содержащий произведение $x \cdot y$.

Рассмотрим уравнение вида $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$

Выясним, в каком случае это уравнение является уравнением окружности.

Разделим все на A $\quad x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$

Произведем следующие преобразования

$$\left(x^2+2\frac{D}{2A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+\left(y^2+2\frac{E}{2A}y+\frac{E^2}{4A^2}\right)+\frac{F}{A}-\frac{D^2}{4A^2}-\frac{E^2}{4A^2}=0$$ или

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4FA}{4A^2} \qquad (*)$$

Положим $\frac{D}{2A}=-a$ и $\frac{E}{2A}=-b$

Рассмотрим три возможных случая:

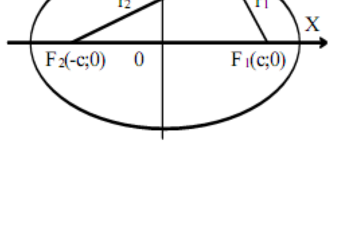
1) $\frac{D^2+E^2-4FA}{4A^2}=r^2>0$, тогда уравнение (*) примет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ следовательно, является уравнением окружности с центром в начале координат.

2) $\frac{D^2+E^2-4FA}{4A^2}=0$, тогда (*) примет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ – этому уравнению удовлетворяет единственная точка с действительными координатами a и b.

3) $\frac{D^2+E^2-4FA}{4A^2}=-r^2<0$, тогда уравнение (*) примет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=-r^2$, т.е. на плоскости не существует точки с действительными координатами, т.е. окружность *мнимая.*

Эллипс.

Определение 9.2. **Эллипсом** называется геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая чем расстояние между фокусами.



Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат XOY так, чтобы фокусы эллипса F_1 и F_2 лежали на оси абсцисс, а начало координат делило бы расстояние между фокусами пополам. Обозначим $F_1F_2=2c$.

Тогда координаты фокуса F_1 будут (c;0), а координаты фокуса F_2 будут (-c;0).

Возьмем произвольную точку $M(x,y)$, лежащую на эллипсе. Соединим точку M с фокусами F_1, F_2. Длины отрезков MF_1 и MF_2 обозначим соот ветственно через r_1 , r_2: $MF_1= r_1$; $MF_2= r_2$. Числа r_1 и r_2 называются **фокальными радиусами** точки M эллипса.

Учитывая, что сумма r_1 и r_2 есть величина постоянная (это следует из определения эллипса) обозначим: $r_1+ r_2=2a$, следует $2a>2c$ или $a>c$.

Определим r_1 и r_2 по формулам расстояния между двумя точками:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad\qquad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Поставляя найденные значения r_1 и r_2 в уравнение $r_1+ r_2=2a$ получим $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ **уравнение эллипса**.

Однако полученная форма уравнения является неудобной для пользования, поэтому обычно уравнение эллипса дается в ином виде.

Преобразуем уравнение. Пусть $M(x,y)$ - точка эллипса, то есть равенство имеет место. Перенесем первый радикал в правую часть и затем возведем обе части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим:

$$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

Отсюда

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ак как по условию $a>c$, то $a^2-c^2>0$ Обозначим разность $b^2=a^2-c^2$ - величина положительная, очевидно, что $b^2<a^2$,

Подставим $b^2=a^2-c^2$ в $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$, тогда

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ и разделив последнее равенство на a^2b^2 , окончательно получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Полученное уравнение называется **каноническим уравнением эллипса**.

Вопросы для самопроверки:

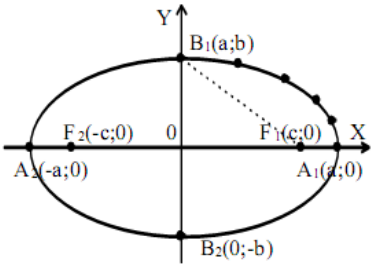
2. каноническое уравнение окружности.
3. уравнение эллипса. Вывод.
4. Определение эллипса.

Лекция 12.

Исследование формы эллипса. Эксцентриситет и фокальные радиусы эллипса. .(«проблемная лекция»).

Исследуем форму эллипса. В уравнении эллипса содержатся только члены с четными степенями текущих координат. Отсюда следует важная геометрическая особенность: эллипс, определяемый уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ симметричен как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy.

Другими словами, если точка $M_0(x_0;y_0)$ лежит на эллипсе, то точки $M_1(x_0;-y_0)$, $M_3(-x_0;y_0)$, $M_4(-x_0;-y_0)$, симметричные точке M_0 соответственно относительно оси Ox, оси Oy и начала O, также лежат на эллипсе. Это позволяет изучение формы и построения эллипса ограничиться первым квадрантом, а затем получившуюся кривую с помощью зеркального отражения построить во всех четырех квадрантах. В случае канонического задания эллипса координатные оси являются **осями симметрии эллипса**. Точка пересечения осей симметрии называется **центром эллипса**.



Из канонического уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

выразим y через x: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

Так как изучение формы эллипса достаточно провести в первом квадранте, то в этом равенстве надо взять лишь знак плюс, то есть $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ и полагать, что $x \geq 0$.

1) При x=0 имеем y=b. Следовательно, точка $B_1(0;b)$ лежит на эллипсе.

2) При возрастании x от 0 до a – y убывает от b до 0.

3) При x=a имеем y=0. Следовательно, точка $A_1(a;0)$ лежит на эллипсе.

4) При $x>a$ получаем мнимые значения y. Следовательно, точек эллипса, у которых $x>a$, не существует.

Дадим переменной x несколько значений, $0<x<a$, и, получив соответствующие значения y, $b>y>0$, построим ряд точек, принадлежащих эллипсу. Учитывая высказанные ранее соображения и соединив найденные точки эллипса плавной линией, получим дугу эллипса B_1A_1 в первом квадранте. Произведя зеркальное отображение дуги B_1A_1 относительно координатных осей, получим весь эллипс. Отсюда следует, что эллипс представляет собой замкнутую кривую, с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии.

Отрезок A_2A_1 и его длина $2a$ называется **большой осью** эллипса, отрезок OA_1 и его длина a называется **большой полуосью эллипса**.

Отрезок B_2B_1 и его длина $2b$ называются **малой осью эллипса**; отрезок OB_1 и его длина b называется **малой полуосью** эллипса.

Длина отрезка F_2F_1, то есть число $2c$, называется **фокусным расстоянием**.

Точки пересечения эллипса с его осями A_1, A_2, B_1, B_2 называются **вершинами эллипса**, а точка пересечения его осей называется **центром эллипса**.

Примечание. Если $a=b$, то уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ или $x^2+y^2=a^2$.

Это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным a. Можно сказать, что окружность является частным случаем эллипса.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к длине большой оси эллипса; обозначив эксцентриситет буквой ε, получим: $\varepsilon=\frac{c}{a}$

Так как $c<a$, то $\varepsilon<1$, то есть эксцентриситет каждого эллипса меньше единицы.

Учитывая, что $c^2=a^2-b^2$, поэтому $\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$;

$\varepsilon=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ и $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением осей эллипса, а отношение осей, в свою очередь, определяется эксцентриситетом.

Таким образом, эксцентриситет характеризует форму эллипса:

- чем ближе эксцентриситет к единице, тем меньше 1- ε^2, тем меньше, следовательно, отношение $\frac{b}{a}$; значит, чем больше эксцентриситет, тем более эллипс вытянут.

- чем больше отношение $\frac{b}{a}$, тем меньше эксцентриситет – эллипс является менее вытянутым.

- в предельном случае, когда $b=a$, то есть когда эллипс обращается в окружность, его эксцентриситет обращается в нуль.

Пусть *M(x;y)* - произвольная точка, лежащая на данном эллипсе Если r_1 и r_2 - фокальные радиусы этой точки, то

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Тогда $r_1^2 - r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 = 4cx \quad \Leftrightarrow \quad r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx$, учитывая, что $r_1 + r_2 = 2a$, то

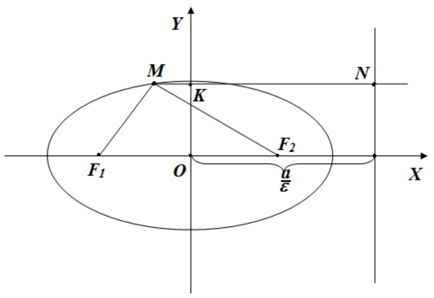
$(r_1 - r_2)2a = 4cx$ или $(r_1 - r_2)a = 2cx$, отсюда $r_1 - r_2 = 2\dfrac{c}{a}x$

Вновь используем $r_1 + r_2 = 2a$ для выражения r_2 через r_1 имеем $2r_1 = 2a + 2\dfrac{c}{a}x$ или $r_1 = a + \dfrac{c}{a}x$. Аналогично $r_2 = a - \dfrac{c}{a}x$

Т.к. $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ тогда $\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x \\ r_2 = a - \varepsilon x \end{cases}$ - **фокальные радиусы** эллипса.

Определение 9.3. **Директрисами** эллипса называются прямые, перпендикулярные фокальной оси эллипса и отстоящие от центра эллипса на расстояние $\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Отсюда, т.к. $\dfrac{a}{\varepsilon} > a$, то $\varepsilon < 1$. $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ - уравнения директрис



Теорема. Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию от этой точки до ближайшей директрисы есть величина постоянная и равная ε.

Доказательство:

$\dfrac{|F_2M|}{|MN|} = \varepsilon$, но $F_2M = r_2 = a - \varepsilon x$ и

$$|MN| = |NK| + |KM| = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon},$$

Тогда $\dfrac{|F_2M|}{|MN|} = \dfrac{a - \varepsilon x}{\dfrac{(a - \varepsilon x)}{\varepsilon}} = \varepsilon$ ч.т.д.

Замечание. При ином выборе системы координат эллипс может задаваться не каноническим уравнением, а уравнением второ

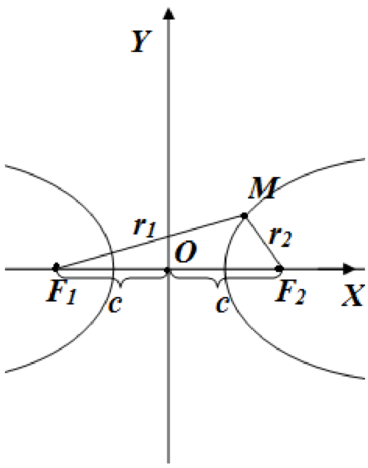
Вопросы для самопроверки:

1. Что такое эксцентриситет эллипса ?
2. фокальные радиусы эллипса.
3. Что такое фокусные расстояния?

Лекция 13.

Кривые второго порядка. Гипербола, её свойства, каноническое уравнение .

Определение 10.1. **Гиперболой** называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютное значение (модуль) разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых **фокусами**, есть величина постоянная и меньшая чем расстояние между фокусами.



Выберем систему координат следующим образом: За ось абсцисс возьмем прямую проходящую через фокусы; за ось ординат – прямую, перпендикулярную оси абцисс и делящую расстояние между F_1 и F_2 пополам.

Тогда фокусы имеют координаты $F_1(-c;0)$и $F_2(c;0)$.

Обозначим $|F_1F_2| = 2c$, $c>0$,

$r_1=|F_1M|$; $r_2=|F_2M|$;

Пусть $M(x,y)$ любая точка гиперболы.

По определению $|r_1-r_2|=const$ обозначим через $2a$, где $a<c$.

Выразив r_1 и r_1 через координаты, получим:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Тогда $$|r_1 - r_2| = \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$ преобразуем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$, возведем в квадрат

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$ приведем подобные

$$4xc=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Возводим обе части в квадрат

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=a^2\left(x^2-2xc+c^2\right)+a^2y^2=a^2x^2-a^2 2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^2\left(c^2-a^2\right)=c^2x^2-a^2x^2-y^2a^2$$

$$a^2\left(c^2-a^2\right)=x^2\left(c^2-a^2\right)-y^2a^2$$

т.к. $c>a$, то $c^2-a^2>0$ Обозначим разность $b^2=c^2-a^2$, тогда $a^2b^2=x^2b^2-y^2a^2$

разделим на a^2b^2 получим $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – **каноническое уравнение гиперболы.**

Если (x,y) удовлетворяет каноническому уравнению гиперболы, то точки с координатами $(-x,-y)$, $(-x, y)$ и $(x,-y)$ тоже удовлетворяют уравнению. Это значит, что кривая симметрична относительно начала координат и координатных осей.

Начало координат – центр симметрии или **центр гиперболы**, ось координат – оси симметрии.

a – называется фокальной полуосью или действительной полуосью.

b – мнимой полуосью.

Это следует учитывать, когда находим точки пересечения с осями координат.

Так, если y=0, то $\frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a$, т.е. гипербола пересекается с осью OX в точках A_1, A_2, где $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$ – вершины гиперболы.

Если x=0, то $-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b\sqrt{-1}=\pm bi$, т.е. гипербола ось OY **не** пересекает.

Определение 10.2. Прямоугольник, стороныа которого параллельны ося координат и отстоят по оси абсцисс от центра на расстояние ***a*** , а по оси ординат на число ***b*** называется основным прямоугольником гиперболы.

Вопросы для самопроверки:

1. Определение гиперболы .
2. – Вывод канонического уравнения гиперболы.
3. Основной прямоугольник гиперболы.?

Лекция 14.

Поверхности второго порядка. Фокальные радиусы, эксцентриситет и директрисы гиперболы. Парабола, каноническое уравнение(«лекция вдвоем»).

Пусть $M(x,y)$ произвольная точка гиперболы, тогда

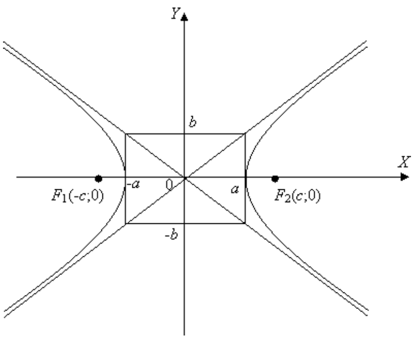
$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ $\quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, тогда

$r_1^2-r_2^2=(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2=x^2+2xc+c^2+y^2-x^2+2xc-c^2-y^2=4cx$ или

$r_1^2-r_2^2=(r_1-r_2)(r_1+r_2)=4cx=\pm 2a(r_1-r_2)$, т.к. $|r_1-r_2|=2a$, тогда $r_1+r_2=\pm\dfrac{2cx}{a}$

$$\begin{cases} r_1+r_2=\pm 2\dfrac{c}{a}x \\ r_1-r_2=\pm 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1=\pm\dfrac{c}{a}x\pm a \\ r_2=\pm\dfrac{c}{a}x\mp a \end{cases}$$

– знак зависит от того на какой ветке берем точку.



отошение $\dfrac{c}{a}=\varepsilon>1$, тогда

для правой ветви ($x\ge a$) $\begin{cases} r_1=a+\varepsilon x \\ r_2=-a+\varepsilon x \end{cases}$

для левой ветви ($x\le -a$) $\begin{cases} r_1=-a-\varepsilon x \\ r_2=a-\varepsilon x \end{cases}$

гипербола у которой $a=b$ называется **равносторонней**.

Определение 10.3. Прямые, перпендикулярные фокальной оси и отстоящие от центра гиперболы на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$ называется **директрисами** гиперболы.

Директрисы не пересекают гиперболу.

Теорема. Отношение расстояния от какой-либо точки гиперболы до фокуса к расстоянию от этой точки до односторонней с фокусом директрисы, есть величина постоянная и равная **эксцентриситету**.

Асимптоты гиперболы

Определение 10.4. Асимптотой данной кривой называется такая прямая, что расстояние от точки на кривой до этой прямой стремится к нулю, при стремлении точки на кривой в бесконечность.

Дано *f(x)* – функция. Надо найти её наклонную асимптоту, т.е. нужно определить k и b

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b_1 = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$$

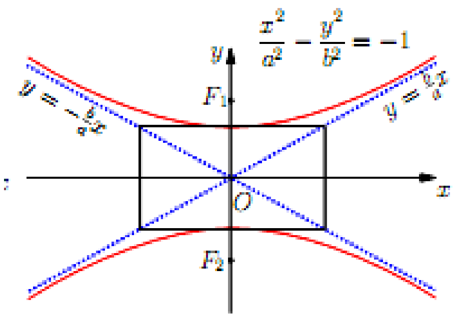
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 = \frac{b^2\left(x^2 - a^2\right)}{a^2} \quad \Rightarrow$$

$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, т.е. $f(x) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm\frac{b}{a}$$

$$b_1 = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x\right) = \pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}\right) = 0$$

Т.е. $\underline{y = kx + b = \pm\frac{b}{a}x}$ – асимптоты гиперболы



Замечание. Уравнение вида

$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ или $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ есть уравнения гиперболы с действительной осью OY и мнимой осью OX. В этом случае вершины и фокусы этой гиперболы лежат на оси OY.

Парабола.

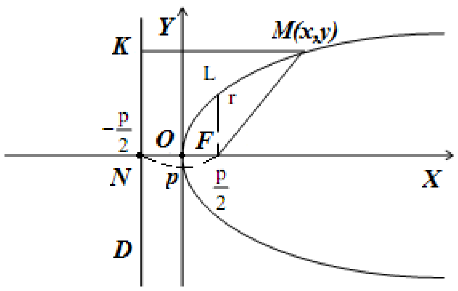
Определение 10.5. **Параболой** называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости, называемой **фокусом**, равно расстоянию до данной прямой, называемой **директрисой**.

Составим уравнение параболы относительно следующей системы координат:

– за ось OX возьмем прямую перпендукулярную директрисе и проходящую через фокус;

– за ось OY возьмем прямую перпендукулярную оси OX и делящую расстояние между фокусом и директрисой пополам;

- за положительное направление выберем направление от директрисы к фокусу.



Обозначим через $|NF|=p$, тогда $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ и $x=-\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы.

Если $M(x,y)$ произвольная точка параболы, то по определению параболы имеем $|FM|=|MK|$ или $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}$ (используем теорему Пифагора). Возводим в квадрат обе части

$y^2+x^2-px+\frac{p^2}{4}=x^2+px+\frac{p^2}{4}$

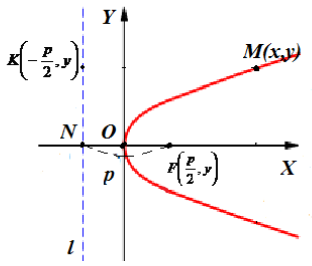
$$\Rightarrow \qquad y^2 = 2px$$ - **каноническое** уравнение параболы.

Так как каноническое уравнение содержит *y* только в квадрате, то ему будут удовлетворять *M(x,y)* и *M(x,-y)* , т.е. парабола симметрична относительно оси *OX*.

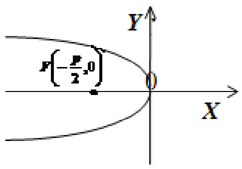
Ось *OX* – ось параболы.

Уравнению параболы удовлятворяет точка (0,0) – вершина параболы.

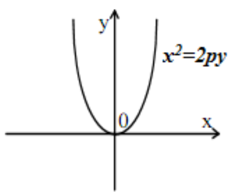
Из уравнения параболы следует, что $x = \dfrac{y^2}{2p}$, т.е. абсцисса всех точек параболы неотрицательна. Отсюда следующий график параболы.



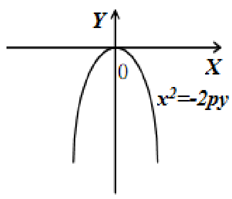
Если система координат выбрана так, что $F\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$, то уравнение будет y^2=-2px



аналогично



и



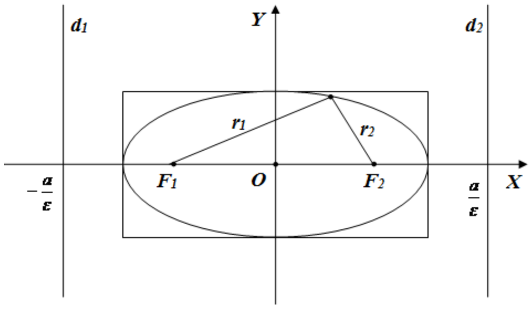
Вопросы для самопроверки:

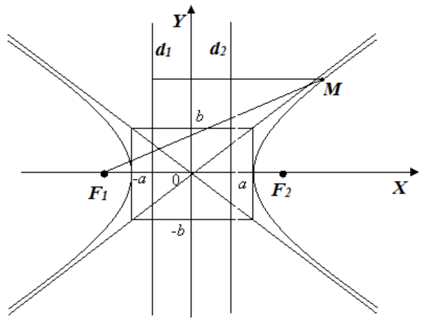
1. Определение Параболы
2. Асимптоты гиперболы. Вывод формулы.
3. Директрисы эллипса и гиперболы.

Лекция 15.

Директриса эллипса и гиперболы. Уравнения в полярных координатах

Рассуждения проводим одновременно для эллипса и гиперболы.





По определению директрисы $d = \frac{a}{\varepsilon}$ – отстоит от центра и перпендикулярна фокальной оси, тогда :

1) Для эллипса ε<1 ($\varepsilon = \frac{c}{a}$, а $a>c$) и $d>a$, т.е. директрисы удалены от центра на расстояние большее a (эллипс **не** пересекают).

2) Для гиперболы ε >1 ($\varepsilon = \frac{c}{a}$, а $c>a$) и $d<a$, т.е. директрисы пересекают основной прямоугольник и проходят между центром и соответствующей вершиной.

Заметим, что расстояние Δ от директрисы до соответствующего ей фокуса есть:

1) В случае эллипса: $\Delta = \frac{a}{\varepsilon} - c = \frac{a}{\varepsilon} - a\varepsilon$ $\left(\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\varepsilon\right)$ или

$$\Delta = \frac{a - a\varepsilon^2}{\varepsilon} = \frac{a\left(1-\varepsilon^2\right)}{\varepsilon} = \frac{a\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)}{\varepsilon} = \frac{a\left(a^2 - c^2\right)}{a^2 \cdot \varepsilon} = \frac{b^2}{a\varepsilon}.$$

2) В случае гиперболы:

$$\Delta = c - \frac{a}{\varepsilon} = a\varepsilon - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a\varepsilon^2 - a}{\varepsilon} = \frac{a\left(\varepsilon^2 -\right)}{\varepsilon} = \frac{a\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)}{\varepsilon} = \frac{a\left(c^2 - a^2\right)}{a^2 \cdot \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{b^2}{a}.$$

Таким образом, в любом случае, $\underline{\Delta = \frac{1}{\varepsilon}\frac{b^2}{a}}$ – расстояние от фокуса до односторонней с данным фокусом директрисы.

Фокальный параметр.
Уравнения в полярных координатах

Пусть есть эллипс или гипербола. Проведем через любой из фокусов F прямую, перепендикулярную её фокальной оси. Длину полученной хорды обозначим через $2P$. Половину данной хорды, т.е. $\boldsymbol{P}$ назовем **фокальным параметром.**

Очевидно, что фокальный параметр окружности равен её радиусу.

Фокальный параметр данных кривых равен модулю ординаты каждой из точек P и P' пересечения с кривой.

<u>Вычислим P для эллипса:</u>

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ подставим абсциссу фокуса, т.е. $x=\pm c$, получим для ординат P и P' значения $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}=\pm\frac{b^2}{a}$

Итак, фокальный параметр для эллипса есть $P=\frac{b^2}{a}$

<u>Для гиперболы:</u>

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, т.е. $x=\pm c$, получим $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}=\frac{b^2}{a}$ т.е. $P=\frac{b^2}{a}$

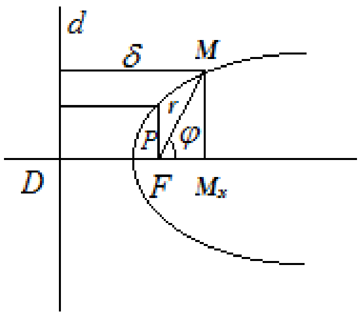
Ранее показали, что расстояние Δ между фокусом и соответствующей директрисой как для эллипса так и для гиперболы равно $\Delta=\frac{1}{\varepsilon}\frac{b^2}{a}$ или , через фокальный параметр, $\Delta=\frac{P}{\varepsilon}$

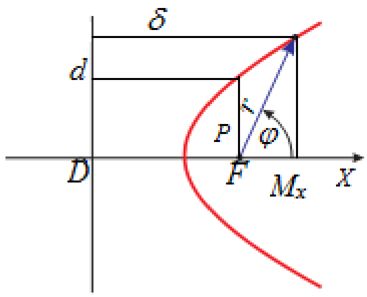
Это выражение годится не только для эллипса и гиперболы, но и для параболы (для которой ε=1).

Таким образом, фокальных параметр может быть выражен как $P=\Delta\varepsilon$, где Δ – расстояние между фокусом и соответствующей директрисой.
Получим уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах, которым постоянно пользуются в астрономии и при рассмотрении проблем механики.

Начало полярной системы координат помещаем в фокус F (левый в случае эллипса, правый в случае гиперболы и в единственный , в случае параболы).

Полярная ось направлена от полюса в сторону противоположную от соответствующей директрисы d.





Обозначим: r – расстояние от точки M до фокуса,
δ – расстояние от точки M до директрисы,
P – фокальный параметр.

По ранее сформулированной теореме, $\frac{r}{\delta}=\varepsilon$ для $\forall$ точки кривой, тогда

$r=\varepsilon\delta$ – полярный радиус точки M .

Вычислим δ:

Обозначим D – точку пересечения директрисы с фокальной осью. M_x – проекции точки M на эту ось.

Видим, что $\delta=(DM_x)=(DF)+(FM_x)$, но $DF=\frac{P}{\varepsilon}$, тогда из треугольника FMM_x имеем

$\frac{FM_x}{r}=\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad FM_x=r\cdot\cos\varphi$, где φ – полярный угол, тогда

$\delta=\frac{P}{\varepsilon}+r\cos\varphi=\frac{P+r\varepsilon\cos\varphi}{\varepsilon}$, подставим в $r=\varepsilon\delta$:

$$r=\varepsilon\delta=\varepsilon\cdot\frac{P+r\varepsilon\cos\varphi}{\varepsilon}=P+r\varepsilon\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \boxed{r=\frac{P}{1-\varepsilon\cos\varphi}}$$ - полярное уравнение.

Пример 1. Определить какую кривую определяет уравнение: $r=\dfrac{\frac{144}{13}}{1-\frac{5}{13}\cos\varphi}$ и написать её каноническое уравнение.

Решение Видим, что $\varepsilon=\frac{5}{13}<1$, следовательно это – эллипс. Установим полуоси a и b:

$$\begin{cases} P=\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{144}{13} \\ \varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{13} \\ a^2-c^2=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=\dfrac{144}{13}a \\ c^2=\dfrac{25}{169}a^2 \\ a^2-c^2=b^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{144}{13}a=a^2-\frac{25}{169}a^2 \Rightarrow \frac{144}{13}a=a^2\left(1-\frac{25}{169}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{144}{13}=\frac{144}{169}a \Rightarrow a=13 \Rightarrow a^2=169,\ b^2=\frac{144}{13}a=\frac{144\cdot 13}{13}=144$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$$ – искомое уравнение.

Пример 2. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, составить её полярное уравнение.

Решение: полярное уравнение имеет вид $r=\frac{P}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, надо найти P и ε ,

т.к. $a=4$, $b=3$ и $b^2=c^2-a^2 \Rightarrow 9=c^2-16 \Rightarrow c=5$ и $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$ но $P=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$

Тогда $r=\dfrac{P}{1-\varepsilon\cos\varphi}=\dfrac{\frac{9}{4}}{1-\frac{5}{4}\cos\varphi} \Rightarrow r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$ – искомое уравнение.

Вопросы для самопроверки:

1. Что мы называем фокальным параметром?
2. $\boxed{r=\dfrac{P}{1-\varepsilon\cos\varphi}}$ что это за уравнение?

3. . Определить какую кривую определяет уравнение: $r = \dfrac{\frac{144}{13}}{1-\frac{5}{13}\cos\varphi}$

и написать её каноническое уравнение?

Лекция 16.

Поверхности второго порядка. Каноническое уравнение эллипсоида, и однополостного гиперболоида, метод параллельных сечений («лекция вдвоем»).

Определение 11.1. **Поверхность второго порядка** – это поверхность, которая в прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением второй степени.

Эллипсоид

Определение 11.2. **Эллипсоидом** называется поверхность второго порядка, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается каноническим уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Установим, как выглядит эллипсоид.

Для этого рассмотрим сечение эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости *XOY*. Каждая из них определяется уравнением $z=h$, где h – любое число.

Линия, которая получится в пересечении определяется уравнением :

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases} \qquad (1)$$

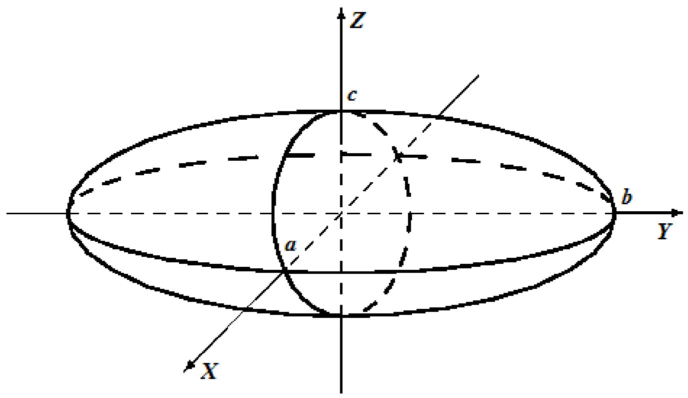
Исследуем уравнение (1)

1) Если $|h|>c$ $(c>0)$, тогда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$, т.е. точек пересечения плоскости $z=h$ с эллипсоидом нет, получается так называемый *мнимый эллипсоид.*

2) Если $h=\pm c$, тогда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, тогда линия (1) вырождается в точку $(0,0,c)$ или $(0,0,-c)$, т.е. плоскость $z=h=\pm c$ касается эллипсоида

3) Если $|h|<c$, тогда уравнение (1) можно переписать в виде :
$\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1 \\ z=h \end{cases}$, где $a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, т.е. в сечении получается эллипс с полуосями $a^*<a$, $b^*<b$
При $h=0$, $a^*=a$, $b^*=b$ – получается самый большой эллипс.

Аналогично, при пересечении эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости XOZ (при $y=h$) и YOZ (при $x=h$)
Величины a, b, c называют **полуосями эллипсоида**. Если все они различны, то эллипсоид называется трехосным.
При равенстве двух полуосей получаются эллипсоиды вращения:
- при $a=b<c$ – вытянутый,
- $a=b>c$ – сплюснутый.
Эти поверхности получаются при вращении эллипса вокруг, соответственно большей и малой оси.
P.S. если $a=b=c$ то каноническое уравнение принимает вид $x^2+y^2+z^2=R^2$ – сфера.



Однополостный гиперболоид

Определение 11.3: **Однополостным гиперболоидом** называется поверхность второго порядка, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

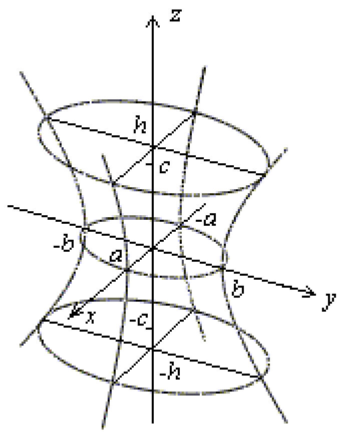
Установим вид поверхности.

Рассмотрим сечение координатными плоскостями XOZ ($y=0$) и YOZ ($x=0$) : исключаем, соответственно уравнения

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ – в сечении получаются гиперболы.

Теперь рассмотрим сечение плоскостью $z=h$, параллельной плоскости XOY , тогда получается линия $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$ или $\begin{cases}\frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1\\ z=h\end{cases}$, где

$a^*=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ и $b^*=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, т.е. в сечении получается эллипс с полуосями $a^*\geq a$, $b^*\geq b$,



достигающих своих наименьших значений при $h=0$, т.е. при пересечении с плоскостью XOY, когда в сечении получается самый маленький эллипс с полуосями $a^*=a$, $b^*=b$ – **горловой эллипс**.

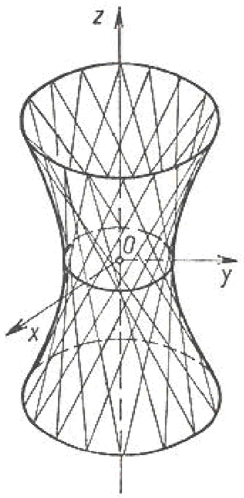
P.S. при $a=b$ получается однополостный <u>гиперболоид вращения</u>.

Таким образом, получили трубку, бесконечно расширяющуюся по мере удаления от плоскости XOY.

Покажем, что однополостный гиперболоид является <u>линейной</u> поверхностью, для чего перепишем уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ в виде $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$ $\Rightarrow$

$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$ рассмотрим две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}$$, где α и β параметры $\neq 0$.



Каждая из этих систем определяет прямую (линию пересечения плоскостей), отсюда следует, что каждая из этих прямых целиком лежит на однополостном гиперболоиде.

Таким образом, через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямые, которые называются образующими однополостного гиперболоида. Он имеет два семейства прямолинейных образующих.

P.S. линейчатый характер однополостного гиперболоида широко использован в строительной технике, например «башня Шухова» (радиомачта).

Вопросы для самопроверки.

1. Что такое горловой эллипс?

2. Определение однополостного гиперболоида.

3. Определение Эллипсоида .

Лекция 17.

Поверхности второго порядка. Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, Эллиптического параболоида, гиперболического параболоида. («лекция вдвоем»).

Двуполостный гиперболоид

Определение 11.4: **Двуполостным гиперболоидом** называется поверхность второго порядка, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

Установим вид поверхности.

Рассмотрим сечение координатными плоскостями XOZ ($y=0$) и YOZ ($x=0$) : исключаем, соответственно уравнения

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ y=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ x=0\end{cases}$ – т.е.:

- в 1-ом случае в сечении гипербола, с действительной осью OZ и мнимой OX ;

- во 2-ом случае в сечении гипербола, с действительной осью OZ и мнимой OY.

Теперь рассмотрим сечение плоскостью $z=h$, параллельной плоскости XOY , тогда получается линия :

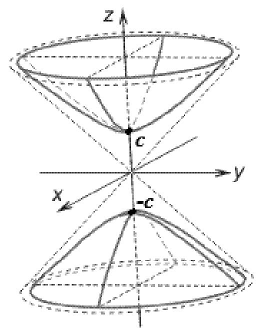
$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1\\ z=h\end{cases}$ или $\begin{cases}\frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1\\ z=h\end{cases}$, где $a^*=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ и $b^*=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$.

а) При $h> c$ ($c>0$) , плоскость $z=h$ пересекает гиперболоид по эллипсу с полуосями a^* и b^*, при увеличении h, величины a^* и b^* также увеличиваются.

б) При $h=\pm c$ уравнению удовлетворяют только координаты двух точек ($0,0,c$) и ($0,0,-c$), т.е. плоскость $z=\pm c$ касается поверхности в двух точках.

в) При $|h|<c$ – мнимый эллипс, т.е. точек пересечения с поверхностью нет.

Таким образом, двуполостный гиперболоид изображается как поверхность состоящая из двух отдельных полостей, каждая из которых имеет вид бесконечно выпыклой чаши.



Эллиптический параболоид

Определение 11.5. **Эллиптическим параболоидом** называется поверхность с каноническим уравнением $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, где $p>0$, $q>0$

Установим вид поверхности.

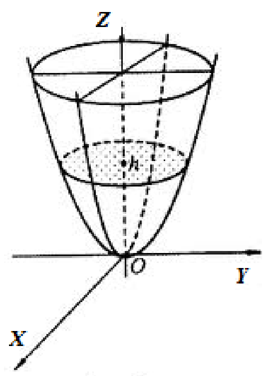
Исследуем с помощью сечений координатными плоскостями XOZ ($y=0$) и YOZ ($x=0$) :

$\begin{cases} x^2=2pz \\ y=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y^2=2qz \\ x=0 \end{cases}$ – т.е. в сечении получаются параболы симметричные относительно оси OZ с вершинами в начале координат.

Теперь рассмотрим сечение плоскостью $z=h$, параллельной плоскости XOY , тогда получается линия:

$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h \\ z=h \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1 \\ z=h \end{cases}$, где $a^*=\sqrt{2hp}$ и $b^*=\sqrt{2hq}$.

Отсюда следует, что при $z=h,$ при $h>0$ пересекает параболоид по эллипсу с полуосями a^* и b^* :



- при увеличении h, величины a^* и b^* также увеличиваются;

- при h=0 , эллипс вырождается в точку (т.е. плоскость z=0 касается данного параболоида);

- при h<0 – мнимый эллипс, т.е. точек пересечения плоскости с эллипсом нет.

p и q – параметры.

При $p = q$ уравнения определяют окружность с центром на оси OZ , т.е. эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы вокруг оси OZ. Такая поверхность называется параболоидом вращения.

Гиперболический параболоид

Определение 11.6. **Гиперболическим параболоидом** называется поверхность с каноническим уравнением $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, где $p>0$, $q>0$

Установим вид поверхности.

1) Рассмотрим сечение координатной плоскостью XOZ ($y=0$) :

$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$ – т.е. в сечении парабола с вершиной в начале координат, направленная вверх и симметричная относительно оси OZ .

2) Сечение плоскостями, параллельными плоскости XOZ ($y=h$) :

$\begin{cases} x^2 = 2pz + \frac{h^2}{q} p \\ y = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2p\left(z + \frac{h^2}{2q} \right) \\ y = h \end{cases}$ – т.е. в сечении также направленные вверх параболы.

3) Сечение координатной плоскостью YOZ ($x=0$) :

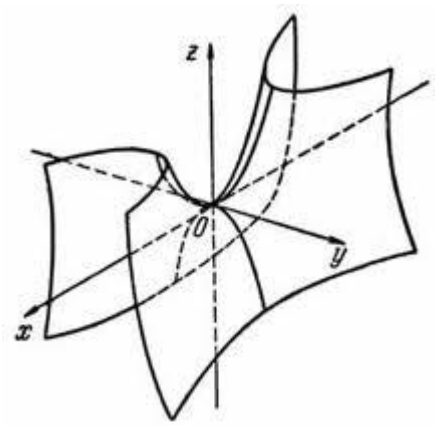
$\begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{cases}$ – т.е. в сечении парабола с вершиной в начале координат, направленная вниз и симметричная относительно оси OZ .

4) Сечение плоскостями, параллельными плоскости YOZ ($x=h$) :

$\begin{cases} y^2 = -2qz + \dfrac{h^2}{p} q \\ x = h \end{cases}$ или $\begin{cases} y^2 = 2p\left(z + \dfrac{h^2}{2q}\right) \\ y = h \end{cases}$ – т.е. в сечении также направленные вниз параболы, чьи вершины лежат на параболе, опеределенной в случае 1).

5) Теперь рассмотрим сечение плоскостью $z=h$, параллельной плоскости XOY , тогда получается линия:

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases}$ или $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{cases}$, отсюда следует, что



- при $h>0$ в сечении получаются гиперболы, пересекающие плоскость XOZ;

- при $h<0$ – гиперболы, пересекающие плоскость YOZ;

- при $h=0$ гипербола вырождается в пересекающиеся прямые

$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Таким образом, гиперболический гиперболоид изображают седлообразной поверхностью:

Эллиптический конус

Определение 11.7: **Эллиптическим конусом** называется поверхность второго порядка, которая задается каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

Установим вид поверхности.

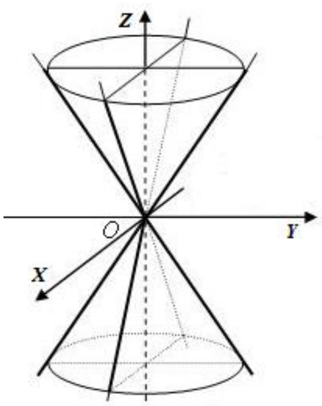
Рассмотрим сечение координатной плоскостью *XOZ* (*y=0*) :

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\\ y=0\end{cases}$, распадающаяся на две пересекающиеся прямые $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\\ y=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0\\ y=0\end{cases}$

Аналогично, в сечении плоскостью *YOZ* (*x=0*) :

$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\\ x=0\end{cases}$, распадается на прямые $\begin{cases}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0\\ x=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\\ x=0\end{cases}$

Теперь рассмотрим сечение плоскостью $z=h$, параллельной плоскости *XOY* , тогда получается линия:



$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$ или $\begin{cases}\frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1\\ z=h\end{cases}$,

где $a^*=\frac{a|h|}{c}$ и $b^*=\frac{b|h|}{c}$

т.е. в сечении эллипсы с полуосями a^* и b^* и при увеличении абсолютного значения h, величины a^* и b^* также увеличиваются, при h=0 , эллипс вырождается в точку (*0,0,0*).

Вопросы для самопроверки.

1. Определение двуполостного гиперболоида
2. сечение двуполостного гиперболоида плоскостью $z=h$, параллельной плоскости XOY.
3. Определение гиперболического параболоида.
4. Определение эллиптического конуса
5.

Лекция 18.

Обзор по всему курсу. Подготовка к зачетному занятию.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»

(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК ДВФУ

– **МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

по дисциплине «Аналитическая геометрия»

Направление подготовки – 11.03.04.«Электроникаи наноэлектроника»

Форма подготовки очная

г. Владивосток

2016

Тематика практических занятий соответствует тематике теоретической части и дополняет ее.

Сущность и содержание практического занятия, его организация и планирование.

1) Практические занятия представляют собой, как правило, занятия по решению различных прикладных задач, образцы которых были даны на лекциях. Отбирая систему упражнений и задач для практического занятия, надо стремится к тому, чтобы это давало целостное представление о предмете и методах изучаемой науки, причем методическая функция выступает здесь в качестве ведущей.

2) В системе обучения существенную роль играет очередность лекций и практических занятий. Хотя каждое практическое занятие, будучи занятием в традиционном плане развивающим, закрепляющим и т.д., может активно выполнять функции подготовительного занятия к последующему активному восприятию лекции.

3) Лекция и практические занятия не только должны строго чередоваться во времени, но и быть методически связаны проблемной ситуацией Опыт подсказывает, что чем дальше лекционные сведения от материала, рассматриваемого на практическом занятии, тем тяжелее вовлечь студентов в творческий поиск

4) Практические занятия по дисциплине - это коллективные занятия

5) Педагогический опыт показывает, что нельзя на практических занятиях ограничиваться выработкой только практических навыков и умений решения задач, построения графиков и т.п. Обучающиеся должны всегда видеть ведущую идею курса и ее связь с практикой

Цели практических занятий:

1) Помочь обучающимся систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;

2) Научить студентов приемам решения практических задач, способствовать овладению навыками и умениями выполнения расчетов, графических и других видов заданий;

3) Научить их работать с книгой, документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой;

4) Формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

С учетом выполняемых функций к практическому занятию, как и к другим методам обучения в вузе, предъявляются требования научности, доступности, единства формы и содержания, органической связи с другими видами учебных занятий и практикой

Важнейшим элементом практического занятия является учебная задача (проблема), предлагаемая для решения

Если студенты поймут, что все учебные возможности занятия исчерпаны, интерес к нему будет утрачен. Учитывая этот психологический момент, очень важно организовать занятие так, чтобы обучающиеся постоянно ощущали увеличение сложности выполняемых заданий

Рекомендуется вначале давать студентам легкие задачи (логические задания), которые рассчитаны на репродуктивную деятельность, требующую простого воспроизведения способов действия, данных на лекции для осмысления и закрепления в памяти

Затем содержание учебных задач усложняется В дальнейшем содержание задач (логических заданий) снова усложняется с таким расчетом, чтобы их решение требовало в начале отдельных элементов продуктивной деятельности, а затем — полностью продуктивной (творческой

Подготовка к проведению практического занятия включает:

1) Подбор вопросов, контролирующих знаний на понимание обучающимися теоретического материала, который был изложен на лекциях и изучен ими самостоятельно. Вопросы должны быть расположены в таком логическом порядке, чтобы в результате ответов на них у всех студентов создалась целостная теоретическая основа — костяк предстоящего занятия.

2) Выбор материала для примеров и упражнений. Подбирая задачи, преподаватель должен знать, почему он предлагает данную задачу, а не другую (выбор задачи не должен быть случайным

3) Решение подобранных задач самим преподавателем (каждая задача, предложенная обучающимся, должна быть предварительно решена и методически обработана

4) Распределение времени, отведенного на занятие, на решение каждой задачи;

5) Подбор иллюстративного материала (графиков,таблиц, схем), необходимого для решения задач, продумывание расположения рисунков и записей на доске,

Практическое занятие проводится, как правило, с одной группой, поэтому план на его проведение может и должен учитывать индивидуальные особенности обучающихся данной группы

План практического занятия предусматривает

1): сколько времени затратить на опрос обучающихся по теории и какие вопросы необходимо задать?

2) какие примеры и задачи будут решаться у доски и в какой последовательности?

3) на что обратить внимание в той или иной задаче?

4) как расположить чертежи и вычисления по каждой задаче?

5) кого нужно будет опросить по теории и кого вызвать к доске для решения задач?

6) какие задачи можно предложить для решения на местах без вызова к доске?

7) какие задачи предложить «сильным» студентам?

8) какие задачи задать для самостоятельного решения дома

Для успешного достижения учебных целей подобных занятий при их организации должны выполняться следующие основные требования:

1) соответствие действий обучающихся ранее изученным на лекционных и семинарских занятиях методикам и методам;

2) максимальное приближение действий студентов к реальным, соответствующим будущим функциональным обязанностям;

3) поэтапное формирование умений и навыков, т.е. движение от знаний к умениям и навыкам, от простого к сложному и т.д.;

4) использование при работе на тренажерах или действующей технике фактических документов, технологических карт, бланков и т.п.;

выработка индивидуальных и коллективных умений и навыков

6) Основным методическим документом преподавателя при подготовке и проведении практического занятия являются методические указания.

Занятие 1.(4 часа**)**

Примерные расчетные задания

Написать разложение вектора x по векторам p, q, r.

1. $x=\{-2,4,7\}$, $p=\{0,1,2\}$, $q=\{1,0,1\}$, $r\{-1,2,4\}$.

2. $x=\{6,12,-1\}$, $p=\{1,3,0\}$, $q=\{2,-1,1\}$, $r\{0,-1,2\}$.

3. $x=\{1,-4,4\}$, $p=\{2,1,-1\}$, $q=\{0,3,2\}$, $r\{1,-1,1\}$.

4. $x = \{-9,5,5\}$,
$p = \{4,1,1\}$,
$q = \{2,0,-3\}$,
$r\{-1,2,1\}$.

5. $x = \{-5,-5,5\}$,
$p = \{-2,0,1\}$,
$q = \{1,3,-1\}$,
$r\{0,4,1\}$.

6. $x = \{13,2,7\}$,
$p = \{5,1,0\}$,
$q = \{2,-1,3\}$,
$r\{1,0,-1\}$.

Компланарны ли векторы a, b и c.

1. $a=\{2,3,1\}, b=\{-1,0,-1\}, c=\{2,2,2\}$.
2. $a=\{3,2,1\}, b=\{2,3,4\}, c=\{3,1,-1\}$
3. $a=\{1,5,2\}, b=\{-1,1,-1\}, c=\{1,1,1\}$.
4. $a=\{1,-1,-3\}, b=\{3,2,1\}, c=\{2,3,4\}$.
5. $a=\{3,3,1\}, b=\{1,-2,1\}, c=\{1,1,1\}$.
6. $a=\{3,1,-1\}, b=\{-2,-1,0\}, c=\{5,2,-1\}$.

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1, A_2, A_{3,} A_4$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(1,3,6)$,
$A_2(2,2,1)$,
$A_3(-1,0,1)$,
$A_4(-4,6,-3)$.
2. $A_1(-4,2,6)$,
$A_2(2,-3,0)$,
$A_3(-10,5,8)$,
$A_4(-5,2,-4)$.
3. $A_1(7,2,4)$,
$A_2(7,-1,-2)$,
$A_3(3,3,1)$,
$A_4(-4,2,1)$.
4. $A_1(2,1,4)$,
$A_2(-1,5,-2)$,
$A_3(-7,-3,2)$,
$A_4(-6,-3,6)$.
5. $A_1(-1,-5,2)$,
$A_2(-6,-,-3)$,
$A_3(3,6,-3)$,
$A_4(-10,6,7)$.
6. $A_1(0,-1,-1)$,
$A_2(-2,3,5)$,
$A_3(1,-5,-9)$,
$A_4(-1,-6,3)$.
7. $A_1(5,2,0)$,
$A_2(2,5,0)$,
$A_3(1,2,4)$,
$A_4(-1,1,1)$.
8. $A_1(2,-1,-2)$,
$A_2(1,2,1)$,
$A_3(5,0,-6)$,
$A_4(-10,9,-7)$.
9. $A_1(-2,0,-4)$,
$A_2(-1,7,1)$,
$A_3(4,-8,-4)$,
$A_4(1,-4,6)$.

Найти смешанное произведение векторов

1. a = {-3, 2, -1}, b = {2, 1, 0}, c = {-1, 3, -1}.
2. a = {1, 2, -6}, b = {8, 1, 4}, c = {-4, 2, -1}.
3. a = {4, 8, -1}, b = {1, 1, 6}, c = {-4, 4, -4}.
4. a = {-7, 4, -1}, b = {2, 2, 2}, c = {-1, 8, -9}.
5. a = {-5, 5, -1}, b = {9, 1, 5}, c = {1, 2, -1}.
6. a = {-8, 2, 4}, b = {2, 2, 1}, c = {8, 3, -5}.

Занятие 2 (4 часа**)**

Примерные расчетные задания

2. Даны три точки, A_1, A_2, A_3. Найти:

   a) Длину отрезка A_1A_2

   b) Уравнение прямой A_1A_2

   c) Уравнение прямой, проходящей через точку A_3, параллельно прямой A_1A_2

   d) Уравнение прямой, проходящей через точку A_3, перпендикулярно прямой A_1A_2

   e) Угол между прямыми A_1A_2 и A_2A_3,

   где координаты точек: $A_1\ (7; -4)$; $A_2\ (3;-7)$; $A_3\ (-2;5)$.

3. Вычислить внутренние углы треугольника: $A\ (1;2;1)$; $B\ (3;-1;7)$; $C\ (7;4;-2)$. Убедиться, что данный треугольник равнобедренный.

4. Даны вектора $a=\{4;-2;-4\}$, $b=\{6;-3;2\}$.

   Вычислить: 1) ab 2) $(3a-2b)(a+b)$ 3) $(a+b)^2$ 4) $(a-b)^2$

5. Даны точки $A\ (1;2;0)$, $B\ (3;0;-3)$ и $C\ (5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC, пользуясь свойствами векторного произведения.

6. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости, перпендикулярные плоскости:

   a) $5x-7y+2z=0,\quad 5x-7y+2z+12=0$

   b) $6x-3y+3z-2=0,\quad 3x-y+z-1=0$

   c) $3x-y-2z-5=0,\quad x+4y-3z+2=0$

   d) $2x+3y-z-3=0,\quad x-y-z+5=0$

е) *2x+5y+z-8=0,* *4x+7y+2z-2=0*

Занятие 3 (12 часов**)**

Примерные расчетные задания

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

1. $A(1,0,-2)$, $B(2,-1,3)$, $C(0,-3,2)$.
2. $A(-1,3,4)$, $B(-1,5,0)$, $C(2,6,1)$.
3. $A(4,-2,0)$, $B(1,-1,-5)$, $C(-2,1,-3)$.
4. $A(-8,0,7)$, $B(-3,2,4)$, $C(-1,4,5)$.
5. $A(7,-5,1)$, $B(5,-1,-3)$, $C(3,0,-4)$.
6. $A(-3,5,-2)$, $B(-4,0,3)$, $C(-3,2,5)$.
7. $A(1,-1,8)$, $B(-4,-3,10)$, $C(-1,-1,7)$.
8. $A(-2,0,-5)$, $B(2,7,-3)$, $C(1,10,-1)$.
9. $A(1,9,-4)$, $B(5,7,1)$, $C(3,5,0)$.
10. $A(-7,0,3)$, $B(1,-5,-4)$, $C(2,-3,0)$.
11. $A(0,-3,5)$, $B(-7,2,6)$, $C(-3,2,4)$.
12. $A(5,-1,2)$, $B(2,-4,3)$, $C(4,-1,3)$.
13. $A(-3,7,2)$, $B(3,5,1)$, $C(4,5,3)$.
14. $A(0,-2,8$, $B(4,3,2)$, $C(1,4,3)$.
15. $A(1,-1,5)$, $B(0,7,8)$, $C(-1,3,8)$.

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки

1. $M_1(-3,4,-7)$, $M_2(1,5,-4)$, $M_3(-5,-2,0)$, $M_0(-12,7,-1)$.
2. $M_1(-1,2,-3)$, $M_2(4,-1,0)$, $M_3(2,1,-2)$, $M_0(1,-6,-5)$.
3. $M_1(-3,-1,1)$, $M_2(-9,1,-2)$, $M_3(3,-5,4)$, $M_0(-7,0,-1)$.
4. $M_1(1,-1,1)$, $M_2(-2,0,3)$, $M_3(2,1,-1)$, $M_0(-2,4,21)$.
5. $M_1(1,2,0)$,

$M_2(1,-1,2)$,
$M_3(0,1,-1)$,
$M_0(2,-1,4)$.

6. $M_1(1,0,2)$,

$M_2(1,2,-1)$,
$M_3(2,-2,1)$,
$M_0(-5,-9,1)$.

7. $M_1(1,2,-3)$,

$M_2(1,0,1)$,
$M_3(-2,-1,6)$,
$M_0(3,-2,-9)$.

8. $M_1(3,10,-1)$,

$M_2(-2,3,-5)$,
$M_3(-6,0,-3)$,
$M_0(-6,7,-10)$.

9. $M_1(-1,2,4)$,

$M_2(-1,-2,-4)$,
$M_3(3,0,-1)$,
$M_0(-2,3,5)$.

10. $M_1(0,-3,1)$,

$M_2(-4,1,2)$,
$M_3(2,-1,5)$,
$M_0(-3,4,-5)$.

11. $M_1(1,3,0)$,

$M_2(4,-1,2)$,
$M_3(3,0,1)$,
$M_0(4,3,0)$.

12. $M_1(-2,-1,-1)$,

$M_2(0,3,2)$,
$M_3(3,1,-4)$,
$M_0(-21,20,-16)$.

13. $M_1(-3,-5,6)$,

$M_2(2,1,-4)$,
$M_3(0,-3,-1)$,
$M_0(3,6,68)$.

14. $M_1(2,-4,-3)$,

$M_2(5,-6,0)$,
$M_3(-1,3,-3)$,
$M_0(2,-10,8)$.

Найти угол между плоскостями.

1. $x-3y+5=0, 2x-y+5z-16=0.$
2. $x-3y+z-1=0, x+z-1=0.$
3. $4x-5y+3z-1=0, 2x-4y-z+9=0.$
4. $3x-y+2z+15=0, 5x+9y-3z-1=0.$
5. $6x+2y-4z+17=0, 9x+3y-6z-4=0.$
6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0, 2x+y\sqrt{2}-z+36=0.$
7. $3y-z=0, 2y-z=0.$
8. $6x+3y-2z=0, x+2y+6z-12=0.$
9. $x+2y+2z-3=0, 16x+12y-15z-1=0.$
10. $2x-y+5z+16, x+2y+3z+8=0.$
11. $2x+2y+z-1=0, x+z-1=0.$
12. $3x+y+z-4=0, y+z+5=0.$
13. $3x-2y-2z-16=0, x+y-3z-7=0.$
14. $2x+2y+z+9=0, 2x-y+3z-1=0.$
15. $x+2y+2z-3=0, 2x-y+2z+5=0.$

Написать канонические уравнения прямой.

1. $2x+y+z-2=0, 2x-y-3z+6=0.$
2. $x-3y+2z+2=0, x+3y+z+14=0.$

3. $x-2y+z-4=0, 2x+2y-z-8=0.$

4. $x+y+z-2=0, x-y-2z+2=0.$

5. $2x+3y+z+6=0, x-3y-2z+3=0.$

6. $3x+y-z-6=0, 3x-y+2z=0.$

7. $x+5y+2z+11=0, x-y-z-1=0.$

8. $3x+4y-2z+1=0, 2x-4y+3z+4=0.$

9. $5x+y-3z+4=0, x-y+2z+2=0.$

10. $x-y-z-2=0, x-2y+z+4=0.$

11. $4x+y-3z+2=0, 2x-y+z-8=0.$

12. $3x+3y-2z-1=0, 2x-3y+z+6=0.$

13. $6x-7y-4z-2=0, x+7y-z-5=0.$

14. $8x-y-3z-1=0, x+y+z+10=0.$

Найти точку пересечения прямой и плоскости.

1. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}, x+2y+3z-14=0.$

2. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}, x+2y-5z+20=0.$

3. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}, x-3y+7z-24=0.$

4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}, 2x-y+4z=0.$

5. $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}, 3x+y-5z-12=0.$

6. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}, x+3y-5z+9=0.$

7. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}, x-2y+5z+17=0.$

8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}, x-2y+4z-19=0.$

Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой

1. $M(0,-3,-2), \frac{x-1}{1}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z}{1}.$

2. $M(2,-1,1), \frac{x-4{,}5}{1}=\frac{y+3}{-0{,}5}=\frac{z-2}{1}.$

3. $M(1,1,1), \frac{x-2}{1}=\frac{y+1{,}5}{-2}=\frac{z-1}{1}.$

4. $M(1,2,3), \frac{x-0{,}5}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z-1{,}5}{1}.$

5. $M(1,0,-1), \frac{x-0{,}5}{0}=\frac{y-1{,}5}{2}=\frac{z}{0}.$

6. $M(2,1,0), \frac{x-2}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z+0{,}5}{1}.$

7. $M(-2,-3,0), \frac{x+0{,}5}{1}=\frac{y+1{,}5}{0}=\frac{z-0{,}5}{1}.$

8. $M(-1,0,-1), \frac{x}{-1}=\frac{y-1{,}5}{0}=\frac{z-2}{1}.$

9. $M(0,2,1), \frac{x-1{,}5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}.$

10. $M(3,-3,-1), \frac{x-6}{5}=\frac{y-3{,}5}{4}=\frac{z+0{,}5}{0}.$

Занятие 4 (12 часов**)**

Примерные расчетные задания

1. Составить уравнение окружности, если её центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$ и окружность проходит через точки $A(3;1)$ и $B(-1;3)$.

2. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $9x^2 + 5y^2 = 1$, две другие лежат с концами его малой оси.

3. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

5 Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2 = 16x$ и перпендикулярна к прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

6. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы уравнениями $9x - 2y - 41 = 0$, $7x + 4y + 7 = 0$, $x - 3y + 1 = 0$.

7. Определить эксцентриситет эллипса, если его малая ось видна из фокусов под углом 60^0.

8. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

9. Вычислить длину стороны правильного треугольника *ABC*, вписанного в параболу с параметром *p*, в предположении, что *A* совпадает с вершиной параболы.

10. Составить уравнение хорды окружности $x^2 + y^2 = 49$, делящейся в точке $A(1;2)$ пополам.

11. Определить эксцентриситет эллипса, если :

– отрезок между фокусами виден и вершин малой оси под прямым углом;

– расстояние между директрисами в три раза больше расстояния между фокусами.

12. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если дана точка $M_1\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ гиперболы и уравнение директрис $x=\pm\frac{4}{3}$.

13. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ перпендикулярного к прямой $5x+2y-13=0$.

14. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$, параллельных прямой $3x+2y+7=0$.

15. Установить, какая линия определяется уравнением $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$. Изобразить её на чертеже.

16. Написать уравнение параболы, если известно, что она проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси OX.

17. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, изобразить на рисунке:

a) $y=+\sqrt{9-x^2}$ b) $y=-\sqrt{25-x^2}$

c) $y=-\sqrt{4-y^2}$ d) $x=+\sqrt{16-y^2}$

18. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$, перпендикулярных к прямой $3x+2y+7=0$.

19. Дано уравнение равносторонней гиперболы $x^2-y^2=a^2$. Найти ее уравнение в новой системе, приняв за оси координат ее асимптоты.

20. Определить площадь треугольника, у которого одна вершина принадлежит директрисе параболы $y^2 = 4x$, а две другие служат концами хорды, проходящей через фокус, перпендикулярно оси OX.

21. Определить уравнение линии центров окружностей, заданных уравнениями:

a) $(x-3)^2 + y^2 = 9$ и $(x+2)^2 + (y-1) = 1$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ и $x^2 + y^2 - 6x = 0$

22. Составить каноническое уравнение эллипса, если его малая ось равна 16, а эксцентриситет $e = \frac{3}{5}$.

23. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

24. На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

25.Написать уравнение окружности радиуса $R = \sqrt{5}$, касающихся прямой $x - 2y - 1 = 0$ в точке $M(3;1)$.

26. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а расстояние между директрисами равно $\frac{50}{3}$.

27. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $e = 2$.

28. На параболе $y^2 = 12x$ найти точку, фокальный радиус которой равен

Занятие 5 (4 часа**)**

Примерные расчетные задания

Методом сечений определите вид и название поверхности

1. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $xy=z$

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $xy=z^2$

3. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $xy=z^2+1$

4. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $xy=z^2-1$

5. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $xz=y$

6. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $xz=y^2$

7. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $xz=y^2+1$

8. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$, $xz=y^2-1$

9. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$ $yz=x$

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $yz=x^2$

11. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$, $yz=x^2+1$

12. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, $yz=x^2-1$

13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2z$, $xy=-z$

14. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=-2y$, $xy=-z^2$

15. $\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2x$, $xy=-z^2+1$

16. $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, $xy=-z^2-1$

17. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z$, $xz=-y$

18. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z$, $xz=-y^2$

19. $\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2x$, $xz=-y^2+1$

20. $\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2x$, $xz=-y^2-1$

21. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=-2y$, $yz=-x$

22. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z$, $yz=-x^2$

23. $-\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2x$, $yz=-x^2+1$

24. , $yz=-x^2-1$

25. ,

26. $-\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=-2z$,

27. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2$,

28. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=-2$,

29. $\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2$,

30. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=+2$,

31. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$

32. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$

33. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$

34. $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$

35. $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$ 36. $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$

37. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-4z$, $xz=2y^2$ 38. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-4z$, $xz=2y^2-1$

39. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=4z$, $yz=2x^2$ 40. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-4z$,

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»

(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК ДВФУ

1 КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

по дисциплине «Аналитическая геометрия»

Направление подготовки – 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Форма подготовки очная

г. Владивосток

2016

Программа зачета

1. Векторы: определение, равенство, единичные вектора, сложение векторов, умножение вектора на число.
2. Фокальный радиус, эксцентриситет и директрисы гиперболы.
3. Преобразование координат. Параллельный перенос
4. Свойства сложения векторов и умножения вектора на число.
5. Парабола. Вывод канонического уравнения параболы.
6. Преобразование координат . Поворот на угол α
7. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении.
8. Фокальный параметр. Уравнение эллипса и гиперболы в полярных координатах.
9. Парабола как график квадратного трехчлена.
10. Координаты вектора. Свойства координат. Коллинеарность и компланарность векторов.
11. Преобразование координат на плоскости (параллельный перенос, поворот на угол α).
12. Угол между двумя прямыми в прямоугольной системе координат
13. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, угол между векторами.
14. Парабола как график квадратного трёхчлена.
15. Параметрическое уравнение прямой. Каноническое уравнение прямой (в пространстве)
16. Векторное произведение векторов: определение, свойства, векторное произведение в координатной форме.

17. Вывод канонического уравнения эллипса.
18. Способы задания прямой в пространстве
19. Смешанное произведение: определение, свойства. Двойное векторное произведение.
20. Параметрическое и каноническое уравнение прямой в пространстве.
21. Вывод канонического уравнения гиперболы.
22. Прямая на плоскости. Вывод общего уравнения. Расположение прямой относительно системы координат.
23. Директрисы эллипса и гиперболы. Расстояние от фокуса до директрисы
24. Способы задания прямой в пространстве.
25. Угловой коэффициент прямой на плоскости. Уравнение прямой , проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.
26. Фокальный параметр. Уравнения эллипса и гиперболы в полярных координатах
27. Векторное произведение .Свойства векторного произведения.
28. Фокальный параметр. Уравнения эллипса и гиперболы в полярных координатах.
29. Условие параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
30. Уравнение плоскости в пространстве (вывод). Уравнение плоскости в отрезках.
31. Уравнение прямой в отрезках. Пучок прямых. Угол между двумя прямыми в прямоугольной системе координат (вывод).

32. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Нормальное уравнение плоскости.

33. Эллипс. Вывод канонического уравнения эллипса

34. Каноническое уравнение прямой на плоскости. Параметрическое уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой на плоскости в нормальной форме.

35.

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

1. МАКСИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМАЯ СИСТЕМА ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА НАЗЫВАЕТСЯ

1) линейно зависимой 2) ортонормированной 3) системой образующих

4) базисом 5) ортогональной

2. ПРЯМЫЕ $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ СОВПАДАЮТ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА

1) ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \end{pmatrix}$ равен 1

2) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$

3) $A_1A_2+B_1B_2=0$

4) $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

5) $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}\neq 0$

3. УРАВНЕНИЕ $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ЗАДАЕТ

1) эллипс 2) гиперболу 3) параболу 4) мнимый эллипс 5) точку

4 УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ НАЧАЛО КООРДИНАТ, ИМЕЕТ ВИД

1) $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 = 1$

2) $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

3) $Ax + By + Cz = 0$

4) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

5) $Ax + By + Cz + D = 0$

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ - ЭТО КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

1) сферы

2) двуполостного конуса

3) однополостного гиперболоида;

4) эллипсоида

5) двуполостного гиперболоида.

6. ЕСЛИ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ РАВНО НУЛЮ, ТО ВЕКТОРЫ НАЗЫВАЮТСЯ

1) линейно зависимыми 2) линейно независимыми 3) системой образующих

4) базисом 5) ортогональными

7. ПРЯМЫЕ $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ СОВПАДАЮТ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА

1) $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = 0$

2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

3) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

4) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

5) $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

8. УРАВНЕНИЕ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ ЗАДАЕТ

1) эллипс 2) гиперболу 3) параболу 4) пару пересекающихся прямых 5) точку

9. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ,

ИМЕЕТ ВИД

1) $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ 2) $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

3) $Ax + By + Cz = 0$ 4) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 5) $Ax + By + Cz + D = 0$

10. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - ЭТО УРАВНЕНИЕ

1) сферы 2) конуса 3) однополостного гиперболоида

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК ДВФУ

2 ГЛОССАРИЙ

по дисциплине «Аналитическая геометрия»

Направление подготовки – 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Форма подготовки очная

г. Владивосток
2016

Алгебра, -ы, *ж.* Отдел математики, изучающий свойства величин, выраженных буквами, независимо от их числового значения.

Алгоритм, -ы, *м.* Точное предписание о выполнении в определенном порядке некоторой системы предписаний (операций), позволяющее решать совокупность задач определенного класса.

Базис плоскости. Упорядоченная пара некомпланарных векторов.

Вектор, -ы, *м.* Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом.

Вектор единичный. Вектор, длина которого равна единице.

Вектора противоположные. Коллинеарные вектора, равные по длине, но противоположнонапрвавленные.

Геометрия, -и, *ж.* Одна из древнейших частей математики, изучающая пространственные отношения и формы тел.

Доказательство, -а, *ср.* Рассуждение, с помощью которого устанавливается правильность утверждения о свойстве геометрической фигуры.

Дополнение алгебраическое. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

Единичная квадратная матрица. Квадратная матрица, у которой все элементы нули, а элементы главной диагонали единицы.

Индекс, -а, *м.* Числовой или буквенный указатель, помещаемый обычно внизу буквы, входящей в математическое выражение.

Квадрат, -ы, *м.* Прямоугольник с равными сторонами; ромб, у которого все углы прямые.

Комбинаторика, -и, *ж.* Раздел элементарной математики, изучающий вопросы, связанные с подсчетом числа всевозможных комбинаций из элементов данного конечного множества.

Лемма, -ы, *ж.* Вспомогательная теорема, с помощью которой доказывается следующая теорема или несколько теорем.

Луч, -и, *ср.* Часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной точки.

Математика, -и, *ж.* Наука о структурах.

Минор, -ы, *м.* Минором данного элемента определителя третьего порядка называется определитель второго порядка полученный из данного определителя вычеркиванием соответствующей строки и столбца в которой находится данный элемент.

Минор базисный. Всякий минор отличный от 0, порядок которого совпадает с рангом матрицы.

Многоугольник, -и, *м.* Часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной.

Область, -и, *ж.* Множество точек или фигура, состоящая из внутренних точек, таких, что любые две ее точки можно соединить ломаной, принадлежащей этой фигуре.

Определение, -я, *ср.* Предложение, раскрывающее смысл математического понятия.

Орт. Ортом произвольного, ненулевого вектора называют единичный вектор, который коллинеарен и сонаправлен с данным вектором.

Отрезок, -и, *м.* Часть прямой, заключенная между двумя точками этой прямой вместе с этими точками, которые называются концами отрезка.

Параметр, -ы, *м.* Вспомогательная переменная, входящая в формулы и выражения.

Переменная, -е, *ж.* Величина, которая принимает различные значения.

Произведение скалярное двух векторов. Число равное произведению длин этих векторов на $\cos$ угла между ними.

Произведение смешанное. Смешанным произведением трех векторов, называется скалярное произведение векторного произведения данных векторов.

Ранг матрицы. Максимальный порядок минора отличного от 0.

Следствие, -я, *ср.* Небольшая теорема, которая непосредственно следует из аксиом или теорем.

Стереометрия, -и, *ж.* Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.

Теорема, -ы, *ж.* Математическое предложение, правильность или истинность которого доказывается с помощью аксиом или других теорем.

Тождество, -а, *ср.* Равенство, равное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Уравнение, -я, *ср.* Равенство с переменной или переменными.

Уравнение линии на плоскости. Уравнение вида F (x;y) = 0, если все точки этой линии удовлетворяют данному уравнению.

Уравнение поверхности пространства. Уравнение вида F (x;y;z) = 0, если любая точка этой поверхности удовлетворяет данному уравнению.

Уравнение показательное. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени.

Факториал, -ы, *м.* Функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, значение которой равно произведению натуральных чисел от 1 до данного натурального числа ***n*.**

Фигуры подобные. Фигуры, для которых существует преобразование подобия, переводящее одну фигуру в другую.

Фигуры равновеликие. Фигуры, имеющие одинаковые площади.

Формула, -ы, *ж.* Буквенное выражение или равенство, показывающее зависимость между величинами.

Непрерывная функция – функция $f: E \to R$ непрерывна в точке $x_o \in E$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Линейное (векторное) пространство – аддитивная абелева группа L называется линейным пространством над полем K, если для любого λ из K и a из L существует $\lambda a \in L$, для которого .$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b,$ $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$ $(\lambda\mu)a\ \lambda(\mu a),$ $1 \cdot a = a \ \ \forall \lambda, \mu \in K, \forall a, b \in L.$

Базис линейного пространства – его максимальная линейно независимая система векторов.

Размерность линейного пространства – число элементов в его базисе.2012

Бесконечно малая функция- это функция *f(x),* предел которой при x стремящемся к x_0 равен нулю. Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Дифференциальное уравнение - это уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию *y(x)* и ее производные или дифференциалы.

Единичная матрица (E) - это диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

Кусочно-монотонная функция на отрезке *[a;b].* - это функция *f(x)* внутри каждого интервала, на которые можно разделить отрезок *[a;b],* либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна, причем число интервалов конечно.

Минор *k*-го порядка производной матрицы *A* Называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо *k* строк и *k* столбцов.

Нормальный вектор - это вектор, перпендикулярный прямой или плоскости.

Производная функция - это предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента Δx стремится к нулю. Обозначение: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Теорема -это математическое утверждение, истинность которого устанавливается путем доказательства.

Функция -это правило , которое каждому числу x из некоторого множества D ставит в соответствие одно и только одно число y из множества E. Обозначение: $y=f(x),$ где x - независимая переменная ,называемая аргументом ; D -область определения функции; E -область значений функции.

Число e -это иррациональное число 2,71828182845…, служащее основанием натурального логарифма и являющееся пределом последовательности $\left\{(1+\dfrac{1}{n})^n\right\}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$.

Элементарные преобразования матрицы -это следующие преобразования1) Перестановка местами двух строк (столбцов)

.2)Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
3)Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца)

Аксиома - основное положение, самоочевидный принцип.

Аппроксимация - это приближенная замена какой-либо величины другой, более простой или более находящей для данного исследования *и доет.*

Базис - это система векторов пространства R^n , удовлетворяющих условиям: