

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

«СОГЛАСОВАНО»

Руководитель ОП  
д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Гузев М.А.



(подпись) (Ф.И.О. рук. ОП)

«23» июня 2017 г.

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующая (ий) кафедрой  
информатики, математического и компьютерного  
моделирования  
(название кафедры)



Чеботарев А.Ю.

(подпись) (Ф.И.О. зав. каф.)

«23» июня 2017 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (РПУД)**  
**Математическая логика и теория алгоритмов**

*09.03.03 «Прикладная информатика»*

*Форма подготовки очная*

Школа естественных наук ДВФУ

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

Курс 2 семестр 3,4

лекции 70 (час.)

практические занятия -36(час.)

семинарские занятия - час.

лабораторные работы –час.

консультации 72

всего часов аудиторной нагрузки 106 (час.)

самостоятельная работа 74(час.)

реферативные работы (количество)

контрольные работы – 15(количество)

зачет -3 семестр

экзамен -4 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта, самостоятельно установленного ДВФУ, принятого решением Ученого совета Дальневосточного федерального университета, протокол от 28.01.2016 № 01-16, и введенного в действие приказом ректора ДВФУ от 18.02.2016 № 12-13-235.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры информатики, математического и компьютерного моделирования, протокол №22 «23» июня 2017 г..

Заведующий кафедрой информатики, математического и компьютерного моделирования  
А.Ю. Чеботарёв

Составитель старший преподаватель кафедры

И.А. Курочкина

## АННОТАЦИЯ

Программа по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» для направления ООП «09.03.03 – прикладная информатика».

Изучаемая дисциплина формирует у студентов положительную мотивацию на использование современных методов в фундаментальных и прикладных исследованиях.

Изучаемая дисциплина формирует основные компетенции специалиста в области математической логики и теории алгоритмов.

УМКД, предназначенный для организации учебной работы по дисциплине, содержит основной теоретический материал, маршрутную схему изучения и путеводитель по темам дисциплины, задания для самостоятельной работы и рекомендации по их выполнению, описание контрольных работ с методическими указаниями, глоссарий, каталог образовательных ресурсов в сети Интернет, средства педагогического контроля.

Целью изучения дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» является развитие теоретико-множественного, комбинаторного, и алгоритмического мышления. Привить навыки математического исследования социальных, технических, экономических и других проблем науки и производства, умение мыслить научными категориями в области науки, техники, экономики и социальной сферы.

Студент должен овладеть основными вычислительными навыками, необходимыми для решения задач исчисления высказываний, логики предикатов, машины Тьюринга, ознакомиться с современным языком математики; изучить основы исчисления высказываний, логики предикатов и машин Тьюринга и использовать эти знания при знакомстве с задачами математического и компьютерного моделирования. Применять полученные знания при изучении явлений природы и общества и исследовании простейших моделей с помощью методов математической логики и теории алгоритмов.

По результатам выполненных самостоятельно каждым студентом работ и активности студента на занятиях выставляется итоговая отметка.

При подготовке к практическим занятиям следует пользоваться настоящими указаниями, лекционным материалом, представленным студентам в электронном виде и рекомендуемой литературой.

Полученные навыки по курсу «Математическая логика и теория алгоритмов» в дальнейшем будут использоваться при изучении таких дисциплин, как информационные системы, программирование, информационное и компьютерное моделирование, экономика и управление производством.

ОПК-3 Способностью использовать основные законы естественнонаучн ых дисциплин и современные информационно- коммуникационны е технологии в профессиональной деятельности	знает	принципы теорий, связанных с
	умеет	использовать базовые знания дисциплины в профессиональной деятельности
	владеет	навыками использования базовых знаний математической логикой и теорией алгоритмов

ПК-13 Способностью проводить тестирование компонентов программного обеспечения	знает	Теорию алгоритмов и принципы организации проектирования и содержание этапов процесса разработки программных комплексов;
	умеет	формулировать требования к создаваемым программным комплексам;
	владеет	работы в современной программно-технической среде в различных операционных системах; разработки программных комплексов для решения прикладных задач, оценки сложности алгоритмов и программ, использования современных технологий программирования, тестирования и документирования программных комплексов работы с инструментальными средствами моделирования предметной области, прикладных и информационных процессов;

ПК-27 Способностью применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач	знает	теоретические системные основы математической логикой и теорией алгоритмов формализации проблемных ситуаций; принципы, методы математического моделирования; этапы формализации прикладных задач.
	умеет	проводить системный анализ прикладной области; применять математические методы для формализации и решения прикладных задач; строить модели экономических процессов, исследовать их и выработать рекомендации по их практическому применению;

	владеет	использовать для анализа проблемной ситуации методы и принципы системного подхода, соответствующие методы измерений и оценки информационных ресурсов в конкретной предметной области; обрабатывать статистическую информацию.
--	---------	---

## **Пояснительная записка**

Программа учебного курса «Математическая логика и теория алгоритмов» разработана на основе требований государственного образовательного стандарта по соответствующей дисциплине.

**Цель настоящего курса** дать студентам теоретическое представление о математической логике и теории алгоритмов применительно к получаемой ими квалификации.

Курс позволит студентам подготовиться к практическому использованию конкретных методов математической логики и теории алгоритмов, оценить их значение для математики и информатики с точки зрения практических исследований.

### **Основными задачами курса выступают:**

- освоение студентами методов анализа с помощью булевых функций, методов исчисления высказываний, логики предикатов, теории алгоритмов;
- повышение уровня математической культуры;
- формирование базовых навыков самостоятельной практической работы с программными продуктами и информационными сервисами при знакомстве с задачами машин Тьюринга;
- знакомство студентов с общими принципами работы машины Тьюринга;
- приобретение базы, необходимой для дальнейшего изучения специальных дисциплин.

Преподавание дисциплины связано с курсами математического анализа, геометрии, функционального анализа, дифференциальных уравнений, информатики, прикладными дисциплинами.

### **Знать:**

основные понятия теории математической логики и теории алгоритмов.

### **Уметь:**

- формировать и реализовывать программы и технологии, направленные на решение прикладных и информационных задач;
- применять методы математической логики и дискретной математики при решении задач и проблем науки и производства;
- ориентироваться в справочной научной литературе;

- приобретать новые прикладные знания, используя современные методы математической логики;
- использовать математическую логику для формирования суждений по профессиональным проблемам.

**Владеть:**

- приемами комплексного профессионального воздействия на уровень развития и функционирования познавательной и мотивационно-волевой сферы, самосознания, способностей, функциональных состояний;
- приемами пропаганды математических знаний с целью повышения уровня математической культуры общества

Данный курс предполагает значительный объем самостоятельной работы студентов, особенностью которой является поиск и использование необходимой для выполнения заданий практического практикума информации, найденной в ресурсах глобальной компьютерной сети Интернет.

## СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### Исчисление высказываний

- 1. Исчисление высказываний- аксиоматическая логическая система.** Общий обзор курса. Анализ специфики задач, требующих от обучаемых использования аппарата математической логики. Понятие формулы исчисления высказываний. Система аксиом исчисления высказываний. Правила вывода. Определение доказуемой формулы. Получение доказуемых формул.
- 2. Производные правила вывода.**  
Правило одновременной подстановки. Правило сложного заключения. Правило силлогизма. Правило контрпозиции. Правило снятия двойного отрицания.
- 3. Понятие выводимости формулы из совокупности формул.**  
Определение формулы, выводимой из совокупности. Пример вывода формулы из совокупности. Понятие вывода. Правила выводимости.
- 4. Правила выводимости.**  
Теорема индукции. Обобщенная теорема индукции. Правило введения конъюнкции. Правило введения дизъюнкции.
- 5. Доказательство законов логики.**  
Закон перестановки посылок. Закон соединения посылок. Закон разъединения посылок. Закон исключенного третьего. Законы де Моргана.
- 6. Связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний.**
- 7. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний.**  
Проблемы разрешимости, непротиворечивости, полноты и независимости.

### Логика предикатов

- 8. Основные понятия, связанные с предикатами.**  
Понятие предиката. Классификация предикатов. Множество истинности предиката. Равносильность и следование предикатов.
- 9. Логические операции над предикатами.**  
Отрицание предиката. Конъюнкция двух предикатов. Дизъюнкция двух предикатов. Импликация и эквиваленция двух предикатов. Свойства операций.
- 10. Кванторные операции над предикатами.**  
Квантор общности. Квантор существования. Численные кванторы. Ограниченные кванторы.
- 11. Формулы логики предикатов.**  
Определение формулы логики предикатов. Классификация формул логики предикатов. Тавтологии логики предикатов. Законы де Моргана для кванторов.

Законы пренесения кванторов через конъюнкцию и дизъюнкцию. Законы пренесения кванторов через импликацию. Законы удаления квантора общности и введения квантора существования. Законы коммутативности для кванторов.

## **12. Равносильные преобразования формул.**

Понятие равносильности формул. Приведенная форма для формул логики предикатов.

Предваренная нормальная форма для формул логики предикатов.

## **13. Проблемы разрешения для общезначимости и выполнимости формул.**

## **14. Применение логики предикатов в математике.**

Логика предикатов и алгебра множеств. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений. Построение противоположных утверждений. Прямая, обратная и противоположная теоремы.

### **Алгоритмы. Машины Тьюринга.**

## **15. Понятие алгоритма.**

Свойства алгоритма. Разрешимые и перечислимые множества. Вычислимые функции.

## **16. Машины Тьюринга**

Устройство машины Тьюринга. Программа машины Тьюринга. Реализация алгоритма в машине Тьюринга.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Герасимов, А.С. Курс математической логики и теории вычислимости [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.С. Герасимов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2014. — 416 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/50159>. — Загл. с экрана.
2. Лихтарников, Л.М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 288 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/231>. — Загл. с экрана.
3. Синюк В.Г. Алгоритмы и структуры данных [Электронный ресурс] : лабораторный практикум. Учебное пособие / В.Г. Синюк, Ю.Д. Рязанов. — Электрон. текстовые данные. — Белгород: Белгородский государственный технологический



- университет им. В.Г. Шухова, ЭБС АСВ, 2013. — 204 с. — 978-5-361-00194-1. —  
Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28363.html>
- 4.
  5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М. : Физматлит, 2005, 416 с.
  6. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику.— М. : Физматлит, 2004, 384 с.
  7. Лихтарников Л. М., Сукачева Т. Г. Математическая логика: курс лекций : задачник-практикум и решения. — СПб. : Лань, 2009, 288 с.
  8. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика: Учебное пособие. 3-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2004. — 336 с.
  9. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Академия, 2007. - 304 с.
  10. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. — М.: КомКнига, 2006. - 240 с.
  11. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. — СПб.: Лань, 1999. - 288 с.
  12. Тимофеева И.Л. Математическая логика в вопросах и задачах. Учебное пособие для студентов математических факультетов педвузов. — М.: Прометей, 2002. - 112 с.
  13. Тимофеева И.Л. Математическая логика. Курс лекций. Часть 1. — М.: Прометей, 2003. - 144 с.
  14. Тимофеева И.Л. Математическая логика. Курс лекций. Часть 2. — М.: Прометей, 2003. - 164 с.
  15. <http://window.edu.ru/resource/271/75271> Дурнев, В.Г. Элементы теории алгоритмов: учебное пособие / В.Г. Дурнев; Яросл. гос. ун-т. - Ярославль: ЯрГУ, 2008. - 248 с.
  16. <http://window.edu.ru/resource/345/27345> Моисеев В.И. Математическая логика: Учебные материалы. - Воронеж: Изд-во ВГУ, 1999.
  17. <http://www.telesys.pfu.edu.ru> Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учебное пособие. Математическая логика. - М.: РУДН, 2011. - 79 с.

#### Дополнительная литература

18. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов.— Саратов: Издательство Саратовского университета, 1991.

19. Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. – М.: Просвещение, 1986.
20. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2004, 256 с.

## Контрольно-измерительные материалы

### 5. Найти области истинности предикатов:

- |   |   |
|---|---|
| <p>1) <math>\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 2} = 0;</math></p> <p>2) <math>\sqrt{x^2 - 1} = -3;</math></p> <p>3) <math>\begin{cases} x^2 - 13x + 4 \geq 0; \\ 2x^2 + x - 30 &lt; 0; \end{cases}</math></p> <p>4) <math>\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3} = 0.</math></p> <p>5) <math>\frac{(x^2 - 9)(x - 2)}{x^2 + 2x - 3} \geq 0</math></p> <p>6) <math>\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 10 + 20} &lt; 0</math></p> <p>7) <math>\frac{x+1}{1-x} + \frac{x-1}{x} &lt; 2</math></p> <p>8) <math>\frac{x^4 - 3x^2 + 2x^2}{x^3 - 5x^2} &lt; 2</math></p> <p>9) <math>\frac{2x^2 - 7x + 8}{x^2 + 2} &gt; 1</math></p> <p>10) <math>\frac{3x^2 + 10x + 3}{(3-x)^2(4-x)^2}</math></p> <p>11) <math>\frac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5}</math></p> <p>12) <math>\begin{cases} x^2 + 3x + 2 &gt; 0 \\ \frac{x}{x+1} \leq 0 \end{cases}</math></p> <p>13) <math>\begin{cases} 4x^2 &gt; 1 \\ -2x^2 + 5x - 3 &gt; 0 \end{cases}</math></p> <p>14) <math>\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x^2 - 4x &lt; 0 \end{cases}</math></p> | <p>15) <math>\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x^2 - 4x &lt; 0 \end{cases}</math></p> <p>16) <math>\begin{cases} \frac{2x-3}{x^2-x+2} &gt; 0 \\ x^2 - 14x + 45 &lt; 0 \\ x^2 - 11x + 30 &gt; 0 \end{cases}</math></p> <p>17) <math>\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}</math></p> <p>18) <math>\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 &gt; 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}</math></p> <p>19) <math>\sqrt{2x - 3} &gt; x</math></p> <p>20) <math>\sqrt{4x + 5} &lt; x</math></p> <p>21) <math>\sqrt{5 - 2x} &lt; 6x - 1</math></p> <p>22) <math>\sqrt{x + 18} &lt; 2 + x</math></p> <p>23) <math>\sqrt{2x - x^2} &lt; 5 - x</math></p> <p>24) <math>\sqrt{x^2 + 3x + 2} &lt; 2x + 1</math></p> <p>25) <math>\sqrt{(x + 4)(x + 3)} &gt; 6 - x</math></p> <p>26) <math> x^2 + 2x  \geq 3</math></p> <p>27) <math> 2x^2 + 5x - 4  &lt; 3</math></p> <p>28) <math>x^2 - 5 x  + 6 &lt; 0</math></p> <p>29) <math>x^2 -  x  - 12 \geq 0</math></p> <p>30) <math>7 x  - x^2 - 12 \geq 0</math></p> |
|---|---|

### 6. Изобразите на декартовой плоскости области истинности предикатов:

- |   |   |
|---|---|
| <p>1) <math>x + y = 1;</math></p> <p>2) <math>x + 3y = 3;</math></p> <p>3) <math>x - y^2 \geq 0;</math></p> <p>4) <math>\sin x = \sin y;</math></p> <p>5) <math>(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0;</math></p> <p>6) <math>\lg x = \lg y.</math></p> <p>7) <math> y  = 2 - x</math></p> <p>8) <math> y + 1  = 2 - x</math></p> <p>9) <math> y  = 3x - 4</math></p> | <p>10) <math> y - 2  = 3x - 4</math></p> <p>11) <math> y + x  = 3</math></p> <p>12) <math> y - x  = x</math></p> <p>13) <math>(y - 2)^2 + (x + 1)^2 = 1</math></p> <p>14) <math>(y + 2)^2 + (x - 1)^2 = 0</math></p> <p>15) <math> y  = 9 - x^2</math></p> <p>16) <math> y  = x^2 - 4x</math></p> <p>17) <math>y &gt; 3 x  - 2</math></p> <p>18) <math> y  &gt; 3x - 2</math></p> |
|---|---|

19)  $y \leq |3x - 2|$

21)  $|y| + |x| \geq 2$

20)  $|x| + |y| \leq 3$

22)  $xy \leq 2$

7. На множестве  $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$  заданы предикаты:

$A(x)$ : « $x$  не делится на 5»;

$B(x)$ : « $x$  - четное число»;

$C(x)$ : « $x$  - число простое»;

$D(x)$ : « $x$ кратно 3».

Найдите множества истинности следующих предикатов:

1)  $A(x) \& B(x)$ ;

2)  $C(x) \& B(x)$ ;

3)  $C(x) \& D(x)$ ;

4)  $B(x) \& D(x)$ ;

5)  $\overline{B(x)} \& D(x)$

6)  $A(x) \& \overline{D(x)}$ ;

7)  $\overline{B(x)} \& \overline{D(x)}$

8)  $A(x) \& B(x) \& D(x)$ ;

9)  $A(x) \vee B(x)$

10)  $B(x) \vee C(x)$ ;

11)  $C(x) \vee D(x)$ ;

12)  $B(x) \vee D(x)$ ;

13)  $\overline{B(x)} \vee D(x)$

14)  $B(x) \vee \overline{D(x)}$ ;

15)  $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$

16)  $C(x) \rightarrow A(x)$ ;

17)  $D(x) \rightarrow \overline{C(x)}$ ;

18)  $A(x) \rightarrow B(x)$ ;

19)  $(A(x) \& C(x)) \rightarrow \overline{D(x)}$ .

20)  $(A(x) \& D(x)) \rightarrow \overline{C(x)}$ .

**8. Изобразите на диаграммах Эйлера-Венна области истинности для следующих предикатов:**

- 1)  $\overline{P(x)} \& \overline{Q(x)}$ ;
- 2)  $\overline{P(x)} \leftrightarrow \overline{Q(x)}$ ;
- 3)  $(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee R(x) \& \overline{Q(x)}$ ;
- 4)  $P(x) \rightarrow (Q(x) \vee \overline{Q(x)})$ ;
- 5)  $P(x) \& Q(x) \rightarrow \overline{R(x)}$ .

**9. Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов:**

- 1)  $\overline{x > 2} \& (x < y)$ ;
- 2)  $(x \leq y) \vee (|x| \leq 1)$ ;
- 3)  $(x \geq 3) \rightarrow (y < 5)$ ;
- 4)  $((x > 2) \& (y \geq 1)) \& ((x < -1) \vee (y < -2))$
- 5)  $((x > 2) \vee (y > 1)) \& ((x < -1) \vee (y < -2))$

**10. Записать предикаты, полученные в результате логических операций над предикатами  $P(x), Q(x), R(x)$ , области истинности которых заштрихованы на следующих рисунках:**

**11. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов  $M$  совпадает с  $R$ :**

- 1)  $\exists x (x + 5 = x + 3)$ ;
- 2)  $x \left( x^2 + x + \frac{1}{2} = 0 \right)$ ;
- 3)  $\forall x (x^2 + x + 1 > 0)$ ;
- 4)  $\forall x (x^2 - 5x + 6 \geq 0)$ ;
- 5)  $\exists x ((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \& (x^2 - 2x + 1 > 0))$ ;
- 6)  $\exists x ((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \& (x^2 - 6x + 8 \leq 0))$ ;
- 7)  $\exists x ((x^2 - 6x + 8 \geq 0) \vee (x^2 - 6x + 8 < 0))$ ;
- 8)  $\exists x ((x \in \{2, 5\}) \rightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0))$
- 9)  $\forall x ((x \in \{3, 5\}) \rightarrow (x^2 - 6x + 8 < 0))$

**12. Приведите примеры таких значений  $a$ , для которых данное высказывание: а) истинно; б) ложно. ( $M=R$ ).**

- 1)  $\exists x < 0 (x^2 + ax + a = 0)$ ;
- 2)  $\forall x \in [0, 1] (x^2 + x + a < 0)$ ;
- 3)  $\forall x > 7 (x^2 + ax + 1 > 0)$ ;

$$4) \exists x \in [a, a + 1](x^2 - x - 2 < 0)$$

13. Укажите, какие из следующих выражений являются формулами логики предикатов. В каждой формуле выделите свободные и связанные переменные:

14. Даны утверждения

$A(n)$ : « число  $n$  делится на 3 »,

$B(n)$ : « число  $n$  делится на 2 »,

$C(n)$ : « число  $n$  делится на 4 »,

$D(n)$ : « число  $n$  делится на 6 »,

$E(n)$ : « число  $n$  делится на 12 ».

Укажите, какие из следующих утверждений истинны, какие ложны:

1)  $\forall n(A(n) \& B(n) \rightarrow E(n))$ ;

2)  $\forall n(B(n) \& D(n) \rightarrow E(n))$ ;

3)  $\forall n(C(n) \& D(n) \rightarrow E(n))$ ;

4)  $\forall n(E(n) \rightarrow C(n) \& D(n))$ ;

5)  $\forall n(\overline{E(n)} \rightarrow B(n) \& D(n))$ ;

6)  $\exists n(B(n) \& C(n) \rightarrow \overline{D(n)})$ ;

7)  $\forall n(\overline{A(n)} \rightarrow \overline{E(n)})$ .

15. Пусть предикат  $P(x,y)$  определен на множестве  $M = N \times N$  и означает « $x < y$ ».

1) Какие из следующих предикатов тождественно истинные и какие тождественно ложные:

a)  $\exists x P(x, y)$

b)  $\forall x P(x, y)$

c)  $\exists y P(x, y)$

d)  $\forall y P(x, y)$

2) Для тех предикатов из 1), которые не являются ни тождественно истинными, ни тождественно ложными, указать область истинности и область ложности.

3) Какие из следующих предложений истинны и какие ложны:

a)  $\exists x \forall y P(x, y)$

b)  $\forall x \exists y P(x, y)$

c)  $\forall y \exists x P(x, y)$

d)  $\forall x \forall y P(x, y)$

e)  $\forall y \forall x P(x, y)$

f)  $\exists y \forall x P(x, y)$

g)  $\exists x \exists y P(x, y)$

h)  $\exists y \exists x P(x, y)$

**16. Показать, что кванторы общности и существования не перестановочны, то-есть высказывания  $\forall x \exists y F(x, y)$  и  $\exists y \forall x F(x, y)$  могут, вообще говоря, иметь различные значения.**

**17. Среди следующих пар предикатов выберите те, в которых предикаты являются отрицаниями друг друга:**

- 1) « $a < b$ » и « $b < a$ »;
- 2) «Треугольник  $ABC$  прямоугольный» и «Треугольник  $ABC$  тупоугольный»;
- 3) «Целое число  $k$  четно» и «Целое число  $k$  нечетно»;
- 4) «Функция  $f$  нечетна» и «Функция  $f$  четна»;
- 5) «Натуральное число  $n$  – простое» и «Натуральное число  $n$  – составное»

**18. Доказать следующие равносильности:**

- 1)  $\forall x A(x) \equiv \overline{\overline{\exists x \overline{A(x)}}$
- 2)  $\exists x A(x) \equiv \overline{\overline{\forall x \overline{A(x)}}$
- 3)  $c \& \forall x A(x) \equiv \forall x (c \& A(x))$
- 4)  $c \vee \forall x A(x) \equiv \forall x (c \vee A(x))$
- 5)  $\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
- 6)  $\exists x (c \vee A(x)) \equiv c \vee \exists x A(x)$
- 7)  $\exists x (c \& A(x)) \equiv c \& \exists x A(x)$
- 8)  $\exists x A(x) \& \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y (A(x) \& B(y))$
- 9)  $\forall x (A(x) \rightarrow c) \equiv \exists x A(x) \rightarrow c$
- 10)  $\exists x (c \rightarrow A(x)) \equiv c \rightarrow \exists x A(x)$
- 11)  $\exists x (A(x) \rightarrow c) \equiv \forall x A(x) \rightarrow c$

**19. Найти отрицания следующих формул:**

- 1)  $\exists x (A(x) \& B(x) \& C(x))$
- 2)  $\forall x (A(x) \rightarrow \forall y B(y))$
- 3)  $\forall x (A(x) \vee \exists y B(y))$
- 4)  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \& \exists x (S(x) \& \overline{R(x)})$
- 5)  $\exists x (R(x) \leftrightarrow Q(x))$
- 6)  $\forall x \exists y \forall z (P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z))$

**20. Пусть  $A(x)$  и  $B(x)$  – любые предикаты. Какие из следующих формул равносильны формуле  $A(x) \rightarrow \overline{B(x)}$  (\*)?**

- 1)  $A(x) \vee B(x)$
- 2)  $\overline{A(x) \vee B(x)}$ ;
- 3)  $\overline{A(x)} \rightarrow B(x)$ ;
- 4)  $\overline{B(x)} \rightarrow A(x)$ ;
- 5)  $\overline{\overline{A(x) \& B(x)}}$ ;
- 6)  $\overline{A(x) \& \overline{B(x)}}$ ;
- 7)  $B(x) \rightarrow \overline{A(x)}$ .

**21. Доказать, что для любой формулы логики предикатов можно построить ей равносильную формулу, не содержащую:**

- 1) кванторов существования;
- 2) кванторов общности.

**22. Доказать, что формулы  $\exists x(P(x) \& Q(x))$  и  $\exists x P(x) \& \exists x Q(x)$  не равносильны.**

**23. Доказать, что формулы  $\forall x(P(x) \vee Q(x))$  и  $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$  не равносильны.**

**24. Доказать что:**

- 1)  $\exists x \forall y (F(x) \& G(y)) \equiv \forall y \exists x (F(x) \& G(y))$ ;
- 2)  $\exists x \forall y (F(x) \vee G(y)) \equiv \forall y \exists x (F(x) \vee G(y))$ ;
- 3) **Можно ли в 1) и 2) заменить  $F(x)$  и  $G(y)$  двухместными предикатами, зависящими от  $x$  и  $y$ ?**

**25. Пусть  $A(x)$  и  $B(x)$  два одноместных предиката, определенных на множестве  $M$**

**таких, что высказывание  $\exists x \left( A(x) \rightarrow \left( \overline{A(x)} \vee \overline{\overline{B(x) \rightarrow A(x)}} \right) \right)$  истинно.**

**Доказать, что высказывание  $\forall x A(x)$  ложно.**

**26. Даны два предиката  $Q(x, y)$  и  $R(y, z)$ , определенные на множестве  $M \times M$ , где  $M = \{a, b, c\}$ . Для следующих предложений записать их выражения без использования кванторных операций:**

- 1)  $\exists x Q(x, y) \& \forall z R(y, z)$
- 2)  $\forall x \exists y (Q(x, y) \vee R(y, z))$
- 3)  $\forall x \exists y Q(x, y) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y)$
- 4)  $\forall x \forall y Q(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x R(x, y)$

**27. Каким условиям будут удовлетворять области истинности предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$ , определенных на множестве  $M$ , если истинны высказывания:**

- 1)  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \& \exists x (\overline{A(x)} \& B(x))$ ;



- 2)  $\overline{\exists x(A(x) \& B(x))} \& (\forall x(A(x) \rightarrow B(x)))$ ;
- 3)  $\exists x(A(x) \& B(x)) \rightarrow (\forall x(A(x) \rightarrow B(x)))$  ?

**28. Выполнимы ли следующие формулы:**

- 1)  $F \equiv \exists xP(x)$
- 2)  $F \equiv \forall xP(x)$

**29. Можно ли привести пример формулы  $A(x)$ , такой, что выполняема формула:**

- 1)  $F \equiv \overline{\forall x A(x) \rightarrow A(t)}$ ;
- 2)  $F \equiv \overline{A(t) \rightarrow \forall x A(x)}$ .

**30. Доказать, что формула**

$$\exists x(P(x) \& (r \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \bar{r})$$

является общезначимой.

**31. Какие из нижеприведенных формул являются общезначимыми:**

- 1)  $\exists x(P_1(x) \& P_2(x)) \rightarrow (\exists xP_1(x) \& \exists xP_2(x))$ ;
- 2)  $\exists x(P_1(x) \& P_2(x)) \leftrightarrow (\exists xP_1(x) \& \exists xP_2(x))$ ;
- 3)  $(\forall xP_1(x) \vee \exists xP_2(x)) \rightarrow \forall x(P_1(x) \vee P_2(x))$ ;
- 4)  $(\forall xP_1(x) \vee \exists xP_2(x)) \leftrightarrow \forall x(P_1(x) \vee P_2(x))$

**32. Доказать тождественную ложность формулы**

$$\exists x \exists y ((F(x) \rightarrow F(y)) \& (F(x) \rightarrow \overline{F(y)}) \& F(x)).$$

**33. Привести к приведенной нормальной форме следующие формулы логики предикатов:**

- 1)  $F \equiv \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x, y)$ ;
- 2)  $F \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y Q(x, y)$ ;
- 3)  $F \equiv \exists x \forall y P(x, y) \& \exists x \forall y Q(x, y)$ ;
- 4)  $F \equiv \forall x (A(x) \rightarrow \exists y B(y))$ ;
- 5)  $F \equiv \overline{\forall x \exists y (A(x) \leftrightarrow \exists y A(y))}$ ;
- 6)  $F \equiv \overline{p \rightarrow \exists x R(x)}$ ;
- 7)  $F \equiv \overline{\forall x R(x)} \vee \exists x Q(x, y)$ ;
- 8)  $F \equiv \overline{\exists x \forall y \exists z \forall u P(x, y, z, u)}$ .