МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК ДВФУ

«СОГЛАСОВАНО»

Школа естественных наук ДВФУ

Руководитель ОП
____
(подпись) (Ф.И.О. рук. ОП)
«10» мая 2016 г.

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой алгебры, геометрии и анализа

___________ к.ф.-м.н., профессор Р.П.Шепелева
(подпись) (Ф.И.О. зав. каф.)
«10» мая 2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Алгебра

01.03.04 Прикладная математика

Форма подготовки очная

курс 1 семестр 2
лекции 36 час.
практические занятия 36 час.
лабораторные работы 0 час.
в том числе с использованием МАО лек. 0 час/ пр. 0 час./лаб. 0 час
всего часов аудиторной нагрузки 72 час.
в том числе с использованием МАО 0 час.
самостоятельная работа 72 (час.)
в том числе на подготовку к экзамену 36 час.
контрольные работы 8 (количество)
курсовая работа/ курсовой проект ____ семестр
зачет не предусмотрен
экзамен 2 семестр

Рабочая программа учебной дисциплины (РПУД) составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта по направлению 01.03.04 «Прикладная математика», самостоятельно устанавливаемого ДВФУ, утвержденного приказом ректора от 18.02.2016 № 12-13-235

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры алгебры, геометрии и анализа
протокол № 11 от «10» мая 2016 г.
Заведующая кафедрой ________________ Р.П. Шепелева

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20 г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________ __________________

(подпись) (и.о. фамилия)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20 г. № ______

Заведующий кафедрой _______________________ __________________

(подпись) (и.о. фамилия)

АННОТАЦИЯ

Цели освоения дисциплины – привитие научного подхода к исследованиям явлений природы, экономических и производственных процессов; развитие абстрактного логического мышления; ознакомление студентов с фундаментальными понятиями алгебры и, приобретение знаний и навыков, необходимых для эффективного использования математического моделирования в процессе достижения целей научной деятельности. Изучение курса способствует расширению научного кругозора и повышению математической культуры специалиста, развитию его мышления и становлению его мировоззрения.

Задачи курса:

– овладение студентами аппаратом алгебры и аналитическими моделями исследования геометрических форм;

–приобретение базы, необходимой для изучения математических, естественнонаучных, информационных и специальных дисциплин;

– привитие навыков математического исследования социальных, технических, экономических и других проблем науки и производства, умение мыслить научными категориями в области науки, техники, экономики и социальной сферы.

– развитие способностей общаться со специалистами из других областей, работы в междисциплинарной команде, а также работы самостоятельно.

– формирование устойчивых навыков по компетентностному применению современной алгебры при изучении дисциплин профессионального цикла и научном анализе ситуаций, с которыми выпускнику приходится сталкиваться в профессиональной и общекультурной деятельности;

– обучение применению методов современной алгебры для построения математических моделей физических и химических процессов..

В результате изучения дисциплины «Алгебра» у обучающихся формируются следующие общекультурные/ общепрофессиональные/ профессиональные компетенции (элементы компетенций).

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**	
ОПК-1 - готовностью к	Знает	глубоко освоить основные понятия и теоремы

самостоятельной работе		курса
	Умеет	самостоятельно изучать дополнительные разделы дисциплины
	Владеет	навыками изучения математической литературы, способностью анализировать и обобщать полученные знания
ПК-9 способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат	Знает	основные понятия и методы современной алгебры, теорию чисел, методы решения различных систем уравнений, элементы линейной алгебры, основные методы теории групп, колец полей
	Умеет	применять методы современной алгебры при решении задач прикладной математики
	Владеет	методами современной алгебры при решении задач в своей предметной области
ПК-12 способностью самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук	Знает	основные понятия и методы современной алгебры, основные методы теории групп, колец и полей
	Умеет	применять методы линейной алгебры и аналитической геометрии при решении инженерных задач
	Владеет	инструментом для решения математических задач в своей предметной области

Место дисциплины в структуре ООП ВО

Дисциплина относится к учебным дисциплинам базовой части основной образовательной программы (ООП) направления подготовки 01.03.04 – Прикладная математика, квалификация (академическая степень) – бакалавр. Трудоёмкость дисциплины 4 зачётных единицы, 144 академических часа.

Алгебра появилась и развивалась как наука о решении уравнений. После работ Эвариста Галуа, Эмми Нетер она стала наукой об алгебраических системах: группах, кольцах, полях. Особенность построения и содержания курса в том, что в подготовке специалистов естественнонаучных, экономических и технических направлений геометрия и алгебра играют фундаментальную роль. Задача изучения дисциплины – формирование логического мышления, развитие абстрактного мышления.

Для успешного усвоения дисциплины необходимы знания базовых понятий и умений обязательного минимума содержания среднего (полного) образования по математике.

Знания и умения, полученные при изучении дисциплины в рамках ООП могут быть востребованы дисциплинами: Линейная алгебра, Теория вероятностей и статистика, Информатика, Математические методы в экономике и других, использующих в той или иной степени математический инструментарий. Преподавание геометрии и алгебры тесно связано с курсами математического анализа, функционального анализа, дифференциальных уравнений, информатики, прикладными дисциплинами. Изучение дисциплины позволяет будущему специалисту научно анализировать проблемы его профессиональной области (в том числе связанные с созданием новой техники и технологий), успешно решать разнообразные научно-технические задачи с использованием новейших достижений современной алгебры, самостоятельно – используя современные образовательные и информационные технологии – овладевать той новой информацией, с которой ему придётся столкнуться в производственной и научной деятельности.

Изучение теоретического и алгоритмического аппарата современной алгебры способствует развитию у будущих специалистов склонности и способности к творческому мышлению, выработке системного подхода к исследуемым явлениям, умения самостоятельно строить и анализировать математические модели различных систем.

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие общекультурные/ общепрофессиональные/ профессиональные компетенции (элементы компетенций)

Изучение дисциплины формирует теоретические и прикладные знания по основным видам деятельности квалификационной характеристики выпускников. Материал формирует навыки научно-исследовательской работы, математического моделирования и алгоритмической реализации принятия решений. Знания, полученные по данной дисциплине, позволят принимать научно обоснованные оптимальные решения в организационно – управленческой и аналитической деятельности. Студент ознакомится с современным языком математики; изучит такие понятия и конструкции, как алгебраическая система, кольца, поля, модули. Разовьёт способности общаться со специалистами из других областей, работать в междисциплинарной команде, а также применять методы теории групп в исследовательской работе.

В результате изучения дисциплины студент **должен**

***знать*:**

– фундаментальные понятия алгебры (о многочленах, комплексных числах, матрицах и определителях, группах, кольцах, полях; геометрических объектах);

– основные алгебраические и геометрические методы исследования;

– значении алгебры и её методов в других областях науки и техники;

***уметь*:**

– использовать при решении экономических, управленческих и производственных задач основы алгебры и геометрии:

– решать основные типы алгебраических и геометрических задач, решать системы линейных уравнений, производить действия с многочленами, комплексными числами, матрицами, отображениями, линейными операторами, квадратичными формами, собственными векторами, уметь использовать уравнения линий и поверхностей;

– применять свои алгебраические знания при решении теоретических и прикладных вопросов

***владеть*:**

– основными методами геометрического и алгебраического анализа.

I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

РАЗДЕЛ 1. Группы, кольца, поля. Кольцо целых чисел. Поле С. Кольцо многочленов. Деление с остатком. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. (6 час.)

Тема 1. Кольцо целых чисел.

Тема 2. Поле комплексных чисел.

Тема 3. Алгебра многочленов.

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

РАЗДЕЛ 2 . Алгебра матриц. Свойства определителей.(**12 час.**)

Тема 1.Действия над матрицами.

Тема 2 . Теорема Лапласа. Лекции проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-провокация»

ВЕКТОРНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

РАЗДЕЛ 6. Определенный интеграл. (6 часа)

Тема 1 Базис и размерность линейного пространства Матрица перехода от одного базиса к другому.

Тема 2 Ортогональный базис. Процесс ортогонализации. -Лекции проводятся с использованием элементов метода активного обучения "лекция-беседа"

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

РАЗДЕЛ 7. Матрицы линейного оператора в разных базисах. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Самосопряженный линейный оператор. Ортогональный линейный оператор. Теорема Лагранжа. (6 час.)

Тема 1 Линейные операторы в линейном пространстве. Лекции проводятся с использованием элементов метода активного обучения "лекция-беседа"

Тема 2 Линейные операторы в евклидовом пространстве

Тема 3 Квадратичные формы. Применение квадратичных форм к исследованию линий и поверхностей второго порядка**.**

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ЖОРДАНА

РАЗДЕЛ 8 Относительная линейная зависимость и относительный базис. Корневые векторы. Корневое подпространство. Канонический базис. **(6 час.)**

Тема 1. Критерий относительной линейной зависимости. Критерий того, что система векторов – относительный базис. Лекции проводится **с** использованием элементов метода активного обучения "лекция-беседа"

Тема 2. Построение канонического базиса в корневом подпространстве. Построение в общем случае. Теорема существования и единственности канонического базиса.

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Практические занятия (36 час.)

РАЗДЕЛ 1

Занятия 1 (2 час.) Сущность и содержание предмета. Метод Гаусса. Действия над множествами**.** Логические операции

РАЗДЕЛ 2

Занятия 2 (2 час.) Свойства делимости целых чисел. Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида. Свойства сравнений.

РАЗДЕЛ 3

Занятия 3 (2 час.) Поле С. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Занятия 4 (2 час.) Корни из комплексных чисел. Корни из 1. Показательная форма комплексного числа.

РАЗДЕЛ 4

Занятия 5 (4 час.) Деление уголком многочленов. Алгоритм Евклида для многочленов. Представление рациональной дроби в виде суммы простейших.

РАЗДЕЛ 5

Занятие 6 (**2 час.)** Сложение и умножение матриц.

Занятие 7 (4 час.) Вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы.

РАЗДЕЛ 6

Занятие 8 (4 час.) Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы.

РАЗДЕЛ 7

Занятие 9 (4 час.) Алгоритм решения линейных систем. Нахождение фундаментальной системы решений

РАЗДЕЛ 8

Занятие 10 (2 час.) Линейная зависимость и линейная независимость. Критерий. Базис и размерность линейного пространства.

РАЗДЕЛ 9

Занятие 11 (**2 час.**) Процесс ортогонализации. Вычисление собственных векторов.

РАЗДЕЛ 10

Занятие 12 (2 час.) Свойства самосопряженных и ортогональны линейных операторов

РАЗДЕЛ 11

Занятие 13 (**2 час.**) Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Приведение к главным осям. Применение теории квадратичных форм к линиям и поверхностям второго порядка

РАЗДЕЛ 12

Занятие 14 (2 час.) Построение канонического базиса.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	**Дата/сроки выполнения**	**Вид СРС**	**Примерные нормы времени на выполнение**	**Форма контроля**
Современная алгебра	Вторая неделя семестра	ИДЗ	4 часа	Назначение в системе Bb dvfu
Целые числа	Четвёртая неделя семестра	ИДЗ	4 часа	Назначение в системе Bb dvfu
Комплексные числа	Шестая неделя семестра	ИДЗ	4 часа	Назначение в системе Bb dvfu
Многочлены	Восьмая неделя семестра	ИДЗ	6 часов	Назначение в системе Bb dvfu
Матрицы	Десятая неделя семестра	ИДЗ	6 часов	Назначение в системе Bb dvfu
Линейные пространства	Двенадцатая неделя семестра	ИДЗ	4 часа	Назначение в системе Bb dvfu
Линейные операторы	Четырнадцатая неделя семестра	ИДЗ	4 часа	Назначение в системе Bb dvfu
Тест проверки	Зачётная	Тест	4 часа	Тест в

остаточных знаний	неделя			системе Bb dvfu

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены в разделе «Материалы для самостоятельной работы студентов»). Работа должна быть отправлена преподавателю на проверку в системе Bb dvfu по соответствующему «Назначению». Оформление в формате PDF. Критерии оценки: студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя.

Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Выполнение заданий в форме ИДЗ.
2. Подготовка к тестированию по темам курса.

Методические рекомендации по выполнению ситуационных заданий

Самостоятельная работа бакалавров предполагает:

1. Изучение материала по теме занятия и подготовка к практическому занятию.

2. Поиск и сбор первичной и вторичной информации по заявленной проблеме в рамках ситуационных заданий к практическим занятиям и подготовка отчета по результатам самостоятельно проведенных исследовании форме презентации (файл с расширением .ppt).

3. Защита ситуационного задания на практическом занятии с демонстрацией отчета или презентации, ответы на вопросы, обсуждение.

По результатам проверки студенту выставляется определенное количество баллов, которое входит в общее количество баллов студента, набранных им в течение семестра. При оценке результатов выполнения кейс-задачи учитываются четкость структуры работы, умение ставить проблему и анализировать ее, умение логически мыслить, владение профессиональной терминологией, грамотность оформления.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы представлено в Приложении 1 и включает в себя: план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию; характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению; требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

Изучение дисциплины предусматривает:

– лекции, в соответствии с программой, с использованием раздаточного материала;

– выполнение домашних заданий;

– выполнение индивидуальных заданий;

– обязательная проработка материала, который будет разбираться на лекции с подбором дополнительных материалов.

Текущий контроль. Предусматривает учет посещения студентами занятий в течение периода обучения и оценку своевременности и качества выполнения студентами тестов и домашних заданий.

Итоговый контроль. Предусматривает рейтинговую оценку по учебной дисциплине в течение семестра и экзамен

4. Проверка знаний студентов

Фронтальный опрос, 4 контрольных, индивидуальных и самостоятельных работ.

5. Итоговая аттестация: экзамен

Программа экзамена по алгебре

1. Группы. Кольца. Поля.
2. Кольцо целых чисел. Свойства делимости. Теорема о делении с остатком.
3. НОД. Алгоритм Евклида. Теорема и линейном представлении НОД. НОК. Взаимно простые числа. Теорема Евклида.
4. Бесконечность количества простых чисел. Основная теорема арифметики.
5. Формула для вычисления функции Эйлера. Целая часть числа.
6. Свойства сравнений. Полная и приведенная системы представителей.
7. Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма. Кольцо классов вычетов. Поле классов вычетов по простому модулю.
8. Поле С. Алгебраическая запись к. ч. Сопряженные числа. Модуль к.ч.
9. Умножение к. ч. в тригонометрическом виде. Формула Муавра.
10. Корни из к. ч. Мультипликативная группа корней из 1. Первообразные корни. Циклическая группа корней n-й степени из 1.
11. Формулы Кардано. Метод Феррари.
12. Кольцо многочленов. Теорема о делении с остатком для многочленов. Деление уголком по убывающим степеням. Полиномиальная функция. Теорема Безу. Кратность корня

10 Теоремы о линейном представлении НОД многочленов. Алгоритм Евклида для многочленов. Теорема Евклида.

11 Неприводимые многочлены. Основная теорема арифметики кольца многочленов.

12 Основная теорема алгебры к. ч. Следствия. Теорема Виета

13 Многочлены над полем действительных чисел. Границы корней

14 Многочлены над кольцом целых чисел. Признак Эйзенштейна. Лемма Гаусса. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.

15 Многочлены над полем рациональных чисел.

16 Поле отношений. Поле рациональных дробей. Правильные и простейшие дроби. Теорема о представлении правильной дроби в виде суммы простейших.

17 Кольцо многочленов от многих переменных. Высший член произведения. Симметрические многочлены. Теорема.

18 Сочетания. Перестановки. Группа подстановок. Инверсии. Транспозиции.

19 Свойства сложения матриц и умножения матрицы на число.

20 Свойства определителей. Определитель Ван-дер-Монда.

21 Теорема о минорах и алгебраических дополнениях. Теорема Лапласа. Следствия.

22 Определитель произведения. Группа невырожденных матриц. Алгоритм вычисления обратной матрицы.

23 Элементарные преобразования матриц. Теорема о ранге матрицы. Теорема Гамильтона-Кэли.
24 Линейные пространства. Подпространства. Линейная оболочка.
25 Линейная зависимость. Базис и размерность ЛП. Свойства координат
26 Сумма подпространств. Размерность суммы. Критерий прямой суммы.
27 Изоморфизм ЛП.
28 Теорема о базисном миноре. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема Крамера
29 Алгоритм решения системы линейных уравнений. Метод Гаусса
30 Свойства скалярного произведения в Е. Ортогональная система линейно независима.
31 Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому в евклидовом или унитарном пространстве.
32 Мультипликативная группа ортогональных матриц.
33 Ортогональное дополнение подпространства.
34 Свойства линейных операторов.
35 Матрица линейного оператора. Ядро и образ.
36 Самосопряженные линейные операторы.
37 Ортогональные линейные операторы.
38 Линейная независимость собственных векторов для разных собственных значений.
39 Корни характеристического уравнения и только они являются собственными значениями.
40 Характеристические корни симметричной матрицы над полем действительных чисел действительны. Диагонализируемость матрицы
41 Матричная запись квадратичной формы. Теорема Лагранжа. Закон инерции.
42 Положительно определенные квадратичные формы. Критерий.
43 Приведение квадратичной формы к главным осям.
44 Применение квадратичных форм к кривым и поверхностям второго порядка
45 Каноническая форма Жордана.
46 Относительная линейная независимость и относительный базис.
47 Линейная независимость корневых векторов.
48 Инвариантность корневого подпространства
49 Представление ЛП в виде прямой суммы корневых подпространств.
50 Канонический базис циклического подпространства.
51 Фильтрация корневого подпространства.
52 Построение канонического базиса в корневом подпространстве.
53 Построение канонического базиса в общем случае.

№ п\п	Контролируемые разделы/темы	Коды и этапы формирования	Оценочные средства - наименование

	дисциплины	компетенций	Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1.	Целые и комплексные числа	ОПК-1 Знает, умеет, владеет ПК-9 Знает, умеет, владеет ПК-12 Знает, умеет, владеет	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Тесты. 6.Экзаменационные вопросы.	
2.	Матрицы и определители	ОПК-1 Знает, умеет, владеет ПК-9 Знает, умеет, владеет ПК-12 Знает, умеет, владеет	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Тесты. 6.Экзаменационные вопросы.	
3.	Многочлены и рациональные функции	ОПК-1 Знает, умеет, владеет ПК-9 Знает, умеет, владеет ПК-12 Знает, умеет, владеет	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Тесты. 6.Экзаменационные вопросы.	
4.	Линейные и евклидовы пространства	ОПК-1 Знает, умеет, владеет ПК-9 Знает, умеет, владеет ПК-12 Знает, умеет, владеет	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания;	

			5. Тесты. 6.Экзаменационные вопросы.
5.	Линейные операторы и квадратичные формы	ОПК-1 Знает, умеет, владеет ПК-9 Знает, умеет, владеет ПК-12 Знает, умеет, владеет	1. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях; 2. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу; 3. Теоретические диктанты; 4. Индивидуальные домашние здания; 5. Тесты. 6.Экзаменационные вопросы.

Типовые контрольные задания, экзаменационные вопросы и тесты представлены в разделах «Контрольно-измерительные материалы» и «Материалы для самостоятельной работы студентов».

V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры. – Санкт-Петербург, «Лань», 2011, – 462 с.

2. Д.К Фаддеев. Лекции по алгебре. – Санкт-Петербург, «Лань», 2007, –416 с.

3. Д. В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Санкт-Петербург, «Лань», 2008, – 496 с.

4. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Задачи по высшей алгебре. – Санкт-Петербург, «Лань», 2008, – 288 с.

5. Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. – Санкт-Петербург, «Лань», 2011, – 224 с.

6. И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. – Санкт-Петербург, «Лань», 2010, – 480 с.

7. Учебное пособие Г.К. Пака на сайте Открытого университета ДВФУ

Дополнительная литература

1. З.И. Боревич. Матрицы и определители. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, 192 с.

2. И.М. Виноградов. Основы теории чисел. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, – 176 с.

3. П.С. Александров. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, – 512 с.

Х.Д. Икрамов. Задачник по линейной алгебре. – Санкт-Петербург, «Лань», 2012, – 320 с.

В.В. Воеводин. Линейная алгебра. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, – 416 с

А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. – Санкт-Петербург, «Лань», 2012, – 304 с.

М.М. Постников. Линейная алгебра. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, – 400 с.

Нормативно-правовые материалы

1. Приказ Министерства образования и науки РФ от 30 марта 2015 г. № 323 "Об утверждении ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 "Прикладная математика и информатика".

2. Приказ Министерства образования и науки РФ от 19 декабря 2013 г. N 1367 "Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры".

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. http://www.biblioclub.ru "Универсальная библиотека онлайн" – электронная библиотечная система, специализирующаяся на учебных материалах, в том числе электронных учебников для вузов.

2. http://www.elibrary.ru Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU – крупнейший российский портал в области, науки, экономики, управления и образования, содержащий рефераты и полные

тексты более 12 млн. научных статей и монографий.

3. http://www.rsl.ru Электронная полнотекстовая библиотека диссертаций и авторефератов по всем областям знаний, содержащая более 620000 документов.

5. http://www.prlib.ru В режиме электронного читального зала представлен весь полнотекстовый контент электронной национальной библиотеки: монографии, сборники трудов, периодические издания учебники, пособия, графика, музейные коллекции, законодательство России; даны ссылки на все правовые базы данных "Гарант", "Кодекс", "Консультант Плюс" и др.

1. MS Excel.
2. Mathcad.
3. Maple.
4. http://www.dvfu.ru

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного достижения учебных целей занятий должны выполняться следующие основные требования:

-соответствие действий обучающихся ранее изученным на лекционных и семинарских занятиях методикам и методам.

-максимальное приближение действий студентов к реальным, соответствующим будущим функциональным обязанностям.

-поэтапное формирование умений и навыков, т.е. движение от знаний к умениям и навыкам, от простого к сложному и т.д..

-использование при работе на тренажерах или действующей технике фактических документов, технологических карт, бланков и т.п.

-выработка индивидуальных и коллективных умений и навыков.

-распределение времени, отведенного на занятие, на решение каждой задачи;

-подбор иллюстративного материала (графиков,таблиц, схем), необходимого для решения задач, продумывание расположения рисунков и записей на доске.

Студент должен:

-научиться работать с книгой, документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой.

-формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

. На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства. Формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Необходимо поддерживать непрерывный контакт с аудиторией, отвечать на возникающие у студентов вопросы. На практических занятиях преподаватель разбирает примеры по пройденной теме. Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения. Если знаний полученных в аудитории оказалось недостаточно, студент может самостоятельно повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами.

Помощь в освоении данного курса окажут методические указания:

1. Целые числа. Учебное пособие..

2. Комплексные числа. Учебное пособие.

3. Многочлены и рациональные функции. Учебное пособие.

4. Матрицы и определители. Учебное пособие.

5. Линейные пространства. Учебное пособие.

6. Линейные операторы. Учебное пособие.

7.Каноническая форма Жордана. Учебное пособие.

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебные аудитории и компьютерные классы ДВФУ.

Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

по дисциплине «Алгебра»

Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Образовательная программа бакалавриата

Форма подготовки очная

Владивосток

2016

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1-2 недели	Контрольная работа	4 часа	Зачет по заданию
2	3-4 недели	Индивидуальное задание	4 часа	Зачет по заданию
3	5-6 недели	Индивидуальное задание	4 часа	Зачет по заданию
4	7-8 недели	Контрольная работа	4 часа	Зачет по заданию
5	9-10 недели	Индивидуальное задание	4 часа	Зачет по заданию
6	11-12 недели	Индивидуальное задание	4 часа	Зачет по заданию
7	13-14 неделя	Контрольная работа	4 часа	Зачет по заданию
8	15-16 недели	Индивидуальное задание	4 часа	Зачет по заданию
9	17-18 недели	Индивидуальное задание	4 часа	Зачет по заданию

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий (образцы типовых ИДЗ представлены в разделе «Материалы для самостоятельной работы студентов»). Работа должна быть отправлена преподавателю на проверку в системе Bb dvfu по соответствующему «Назначению». Оформление в формате PDF. Критерии оценки: студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя.

Индивидуальное задание № 1 (линейные системы)

Решить систему по формулам Крамера, методом Гаусса, методом обратной матрицы:

Вариант № 1 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$ **Вариант № 2** $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Вариант № 3 $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 14, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$ **Вариант № 4** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$

Вариант № 5 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ **Вариант № 6** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 8, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

Вариант № 7 $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -11, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ **Вариант № 8** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 18. \end{cases}$

Вариант № 9 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ **Вариант № 10** $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

Вариант № 11 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$ **Вариант № 12** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

Вариант № 13 $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$ **Вариант № 14** $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = -11. \end{cases}$

Вариант № 15 $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 7, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$ **Вариант № 16** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 15, \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Вариант № 17 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -14, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ **Вариант № 18** $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -7, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$

Вариант № 19 $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 16, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -13, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$ **Вариант № 20** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -1. \end{cases}$

Вариант № 21 $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ **Вариант № 22** $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

Вариант № 23 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$ **Вариант № 24** $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

Вариант № 25 $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -8. \end{cases}$ **Вариант № 26** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

Вариант № 27 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$ **Вариант № 28** $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Вариант № 29 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$ **Вариант № 30** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

Вариант № 31 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$ **Вариант № 32** $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

Критерии оценки: 5 баллов – система решена тремя методами

4 балла – система решена двумя методами и решение третьим методом не завершено

3 балла – система решена одним методом и другие решения не завершены

0 баллов во всех других случаях

Методические указания к изучению темы: Линейные пространства

Линейные пространства и подпространства

Определение. Линейным пространством над полем *К* называется аддитивная абелева группа *V*, для элементов которой определено умножение на элемент поля К, т. е. $\forall\, \lambda \in K \quad \forall\, a \in \mathbf{V} \quad \exists\, !\lambda a \in \mathbf{V}$, и выполняются следующие условия:

1. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$;
2. $(\lambda + \mu)\, a = \lambda\, a + \mu\, a$;
3. $(\lambda\, \mu) a = \lambda(\mu\, a)$;
4. $1 \cdot a = a$.

Здесь $\lambda, \mu \in K$, $a, b \in \mathbf{V}$, 1- нейтральный элемент поля *К* относительно умножения. Сокращение ЛП ***V****/К* применяем для линейного пространства *V* над полем *К*. Элементы линейного пространства *V* будем называть векторами.

Простейшие свойства умножения на элемент поля

1) $0 \cdot a = \theta$ (здесь 0 - нуль поля К, θ - нулевой вектор аддитивной группы *V*);
Доказательство. $\lambda\, a = (\lambda + 0)\, a = \lambda\, a + 0 \cdot a \;\Rightarrow\; 0 \cdot a = \theta$.

2) $(-1) \cdot a = -a$.
Доказательство. $\theta = 0 \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a \;\Rightarrow$

$$a + (-1) \cdot a = \theta \;\Rightarrow\; (-1) \cdot a = -a.$$

3) $\lambda \cdot \theta = \theta.$
Доказательство. $\lambda\, a = \lambda(a + \theta) = \lambda\, a + \lambda\, \theta \;\Rightarrow\; \lambda \cdot \theta = \theta.$

Примеры линейных пространств

1. Пространство строк

На множестве $K^n = \{< a_1, \ldots, a_n >, a_i \in K\}$ всех упорядоченных наборов n элементов из поля К введем отношение равенства

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n, \text{ если } \alpha =< a_1, \ldots, a_n >, \beta =< b_1, \ldots, b_n >;$$

и операции сложения и умножения на элемент поля К:

$$\alpha + \beta =< a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n >, \quad \lambda\, \alpha =< \lambda\, a_1, \ldots, \lambda\, a_n >.$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы линейного пространства для K^n выполнены, и, следовательно, K^n - пример линейного пространства над полем К, которое называется пространством строк. Аналогично вводится понятие пространства столбцов, для которого мы не будем вводить нового обозначения, а будем с соответствующими оговорками пользоваться тем же обозначением K^n.

Если в качестве К взять множество всех действительных чисел **R**, то $\mathbf{R}^2$ – линейное пространство векторов на плоскости, $\mathbf{R}^3$ – в трехмерном пространстве. Таким образом, понятие линейного пространства – обобщение векторов, рассматриваемых в геометрии.

2. Линейная оболочка

Сумма вида $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$ называется линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_n$ из **V** с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из поля К. Легко видеть, что множество всех линейных комбинаций векторов $a_1, \ldots, a_n$ линейного пространства **V** образует линейное пространство над полем К. Будем называть его линейной оболочкой множества векторов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и обозначать $L(a_1, \ldots, a_n)$.

Рассмотрим линейное пространство **V**/К. Пусть М – подмножество множества **V**. Если М - линейное пространство над полем К относительно операций, введенных в линейном пространстве **V** над полем К, то М называется подпространством ЛП **V**/К. Множество a + М=$\{a + x, x \in$ М $\}$ называется линейным многообразием, где a – фиксированный вектор, а x пробегает множество всех векторов подпространства М. Примерами подпространств являются само линейное пространство **V** и подпространство, состоящее из одного элемента θ. Подпространства, отличные от самого пространства и нулевого, называются собственными. Примером собственного подпространства является линейная оболочка, когда она отлична от **V** и нулевого подпространства.

Упражнения

1. М $\subset$ V. Докажите, что М - подпространство ЛП **V**/К $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in \mathrm{M}\quad x + y \in \mathrm{M}$ и $\forall\, \lambda \in \mathrm{K}, \forall a \in \mathrm{M}\quad \lambda a \in \mathrm{M}$.
2. Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_n)$ - наименьшее по включению подпространство, содержащее элементы $a_1, \ldots, a_\kappa$.
3. Если какой - либо элемент порождающей системы $a_1, \ldots, a_\kappa$ есть линейная комбинация остальных элементов этой системы, то его можно удалить из порождающей системы, не изменив линейной оболочки.
4. В пространстве строк K^n для любого $m \le n$ совокупность всех векторов вида $< x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0 >$ является подпространством.
5. В линейном пространстве многочленов множество всех многочленов, принимающих значение нуль в одной или нескольких точках – подпространство.
6. Пересечение любого семейства подпространств вновь подпространство.
7. Может ли линейное пространство состоять из одного элемента ?
8. Справедливо ли равенство $\theta = -\theta$?
9. Пусть $\lambda a = \theta$, где $\lambda \in \mathrm{K}, a \in \mathrm{V}$. Что можно сказать о λ и a ?
10. Могут ли в линейном пространстве существовать два нулевых элемента ?
11. Что понимается под операцией вычитания в линейном пространстве?

5.2. Линейная зависимость и независимость

Равенство вида $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \theta$ будем называть линейной зависимостью. Если в нем $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, то зависимость называется тривиальной. Если же хотя бы один коэффициент $\neq 0$, то зависимость называется нетривиальной.

Элементы $a_1, \ldots, a_n$ линейного пространства **V**/K называются линейно – зависимыми, если существует их линейная комбинация, равная нулевому вектору, в которой не все коэффициенты равны нулю.

По определению, для линейно – независимой системы векторов существует только тривиальная линейная зависимость, а для линейно – зависимой системы векторов существует нетривиальная линейная зависимость.

Теорема. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда в ней какой – либо вектор является линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$

Пусть система $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависима, т. е. $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, где не все λ_i равны нулю, для которых $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \theta$. Без ограничения общности доказательства можно изменить нумерацию векторов и считать, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $a_1 = (-\lambda_1)^{-1}\lambda_2 a_2 + (-\lambda_1)^{-1}\lambda_3 a_3 + \ldots + (-\lambda_1)^{-1}\lambda_n a_n$, т. е. a_1 - линейная комбинация остальных векторов.

$\boxed{\Leftarrow}$

Если $a_1 = \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n$, то $(-1)a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n = \theta$. А так как $-1 \neq 0$, то линейная зависимость нетривиальная и векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы.

Упражнения

Докажите, что

1. если система содержит нулевой вектор, то она линейно зависима;
2. если подсистема линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима;
3. если система линейно независима, то и всякая ее подсистема линейно независима;
4. система ненулевых векторов содержит максимальную линейно независимую подсистему;
5. если каждый элемент линейного пространства единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_n$, то эти векторы линейно независимы.

5.3. Теорема о ранге матрицы

Число векторов в максимальной линейно независимой подсистеме называется рангом системы векторов линейного пространства.

Рассмотрим матрицу $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ с элементами из поля K строения m x n. Её строки можно рассматривать как элементы пространства строк K^n. Возникает понятие ранга системы строк матрицы A, а также, аналогичным образом, ранга системы столбцов матрицы A.

Теорема о ранге матрицы. Ранг системы строк матрицы равен рангу системы столбцов матрицы и равен наивысшему порядку отличного от нуля минора матрицы.

Доказательство. Предположим, что ранг матрицы A, т. е. наивысший порядок отличного от нуля минора, равен r и предположим, что этот минор расположен в левом верхнем углу матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rm}\\ a_{r+11} & \dots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & \dots & a_{r+1m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & a_{nr+1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \ne 0.$$

С помощью элементарных преобразований приведем ее к виду

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1r}' & a_{1r+1}' & \dots & a_{1m}'\\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2r}' & a_{2r+1}' & \dots & a_{2m}'\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}' & a_{rr+1}' & \dots & a_{rm}'\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{r+1r+1}' & \dots & a_{r+1m}'\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nr+1}' & \dots & a_{mn}' \end{pmatrix},$$

где $a_{11}'\ne 0,\ a_{22}'\ne 0,\ \dots,\ a_{rr}'\ne 0$. Оказывается , что все элементы a_{r+ir+j}' также отличны от нуля для i,j положительных и для которых $i\le n-r,\ j\le m-r$. А это означает, что все строки с номерами больше r являются линейными комбинациями первых r строк. Следовательно, любые $r+1$ строки матрицы линейно зависимы. А это означает, что ранг системы строк равен r. Аналогично доказывается, что ранг системы столбцов также равен r. □

Если ранг матрицы равен r, то любой минор r-ого порядка, отличный от нуля, называется <u>базисным</u>.

Теорема о базисном миноре. Строчки (столбцы) базисного минора линейно независимы. Все остальные строчки (столбцы) – линейные комбинации строчек (столбцов) базисного минора.

Докажите самостоятельно в качестве упражнения.

Упражнения

1. **Докажите, сто квадратная матрица вырождена тогда и только тогда, когда ее строчки (столбцы) линейно зависимы.**
2. Найдите ранг и базисный минор матрицы

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Докажите, что $r\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = r\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = r\mathrm{A}$.
4. Докажите, что размерность линейной оболочки множества векторов S равна рангу системы S.

5.4. Эквивалентные системы. Базис и размерность

Если каждый вектор системы

$$a_1, \dots, a_n \qquad (1)$$

линейного пространства **V**/K является линейной комбинацией векторов системы

$$b_1, \dots, b_m , \qquad (2)$$

то будем говорить, что система (1) линейно выражается через систему (2). Если система (1) линейно выражается через систему (2) и наоборот, то системы (1) и (2) называются эквивалентными.

Теорема. Ранги эквивалентных систем равны.

Доказательство. Пусть системы (1) и (2) эквивалентны, r – ранг системы (1), t – ранг системы (2). Можно считать, что векторы $a_1, \dots, a_r$ и $b_1, \dots, b_t$ линейно независимы. Система (1) линейно выражается через систему (2), а система (2), очевидно, линейно выражается через систему $b_1, \dots, b_t$. Следовательно, система $a_1, \dots, a_r$ линейно выражается через систему $b_1, \dots, b_t$. Аналогично получаем, что и наоборот, система $b_1, \dots, b_t$ линейно выражается через систему $a_1, \dots, a_r$. Итак,

$$\begin{cases} a_1 = \lambda_{11} b_1 + \dots + \lambda_{1t} b_t , \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_r = \lambda_{r1} b_1 + \dots + \lambda_{rt} b_t ; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = \mu_{11} a_1 + \dots + \mu_{1r} a_r , \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b_t = \mu_{t1} a_1 + \dots + \mu_{tr} a_r . \end{cases}$$

По теореме о ранге матрицы из линейной независимости векторов $a_1, \dots, a_r$ следует, что $r \geq t$, а из линейной независимости векторов $b_1, \dots, b_t$ следует, что $t \geq r$. Отсюда, $r = t$. □

Следствие. Эквивалентные линейно независимые системы векторов линейного пространства состоят из одного и того же числа элементов.

Доказательство. Ранг линейно независимой системы равен числу элементов в ней. □

Система векторов линейного пространства называется <u>системой образующих</u>, если любой вектор линейного пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов этой системы.

<u>Базисом</u> линейного пространства называется максимальная линейно независимая система элементов этого пространства.

Теорема. Линейно независимая система образующих линейного пространства - его базис.

Доказательство. После добавления к данной системе любого вектора она становится линейно зависимой, так как в ней появляется вектор, являющийся линейной комбинацией остальных. Следовательно, она максимальная линейно независимая, т. е. базис. □

Теорема. Минимальная система образующих линейного пространства - его базис.

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - минимальная система образующих линейного пространства V/K. Допустим, что векторы $e_1, \dots, e_n$ линейно зависимы. Тогда один из них является линейной комбинацией остальных. Его можно убрать, и оставшиеся векторы останутся системой образующих, а это противоречит условию минимальности. Противоречие. Следовательно, векторы $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, а линейно независимая система образующих векторов – базис линейного пространства. ■

Теорема. Все базисы линейного пространства содержат одно и то же число элементов.

Доказательство. Любые два базиса линейно выражаются друг через друга, т. е. образуют эквивалентные линейно независимые системы, а значит состоят из одного и того же числа элементов. ■

Число элементов n в базисе линейного пространства V/K называется его <u>размерностью</u> и обозначается $\dim_K \mathbf{V} = n$.

Упражнения

1. Докажите, что
   a) Если $\dim_K \mathbf{V} = n$, то в качестве базиса можно взять любые n - линейно независимых элементов из V.

b) Размерность подпространства не превосходит размерности самого линейного пространства.
c) Размерность линейной оболочки $L(x_1,\dots,x_m)$ равна рангу системы векторов $x_1,\dots,x_m$.
2. Найдите базис и размерность линейного пространства K^n.
3. Через H_n^m обозначим линейное пространство матриц строения $m\times n$. Найти базис и размерность этого линейного пространства.
4. Докажите, что следующие системы векторов образуют линейные подпространства и найти их базис и размерность:
a) все n – мерные векторы, у которых первая и последняя координаты равны между собой;
b) все n – мерные векторы, у которых координаты с четными номерами – нули;
c) все n – мерные векторы, у которых координаты с четными номерами равны между собой.

5.5. Матрица перехода от базиса к базису

Любой элемент линейного пространства V/K можно записать в виде

линейной комбинации элементов базиса $e_1,\dots,e_n$ и притом единственным образом

$$a = x_1e_1 + \dots + x_ne_n, \quad x_i \in \mathrm{K}.$$

Коэффициенты $x_1,\dots,x_n$ называются <u>координатами</u> вектора a.

Свойства координат:

1) Два вектора равны $\Leftrightarrow$ их координаты равны.
2) Для того, чтобы сложить два вектора, надо сложить их координаты.
3) Для того, чтобы умножить вектор на элемент λ поля, надо умножить на λ каждую координату вектора.

Пусть в линейном пространстве V/K даны два базиса : $e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_n$. Разложим элементы второго базиса по первому базису:

$$\begin{cases} f_1 = \lambda_{11}e_1 + \dots + \lambda_{1n}e_n, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ f_n = \lambda_{n1}e_1 + \dots + \lambda_{nn}e_n. \end{cases}$$

Если ввести обозначения

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

то эту систему равенств можно переписать в матричном виде

$$f = \mathrm{A}e.$$

Матрица A называется <u>матрицей перехода от базиса e к базису f</u>. Матрица A невырождена, так как векторы $f_1,\dots,f_n$ линейно независимы, поэтому существует матрица A^{-1} и

$$e = \mathrm{A}^{-1}f.$$

Пусть $y_1, \dots, y_n$ координаты вектора a в базисе f. Тогда $a = (y_1 \dots y_n) f$. Вместе с равенствами $a = (x_1 \dots x_n) e$ и $e = \mathrm{A}^{-1} f$ это дает условие $(y_1 \dots y_n) f = (x_1 \dots x_n) \mathrm{A}^{-1} f$. Отсюда , координаты $y_1, \dots, y_n$ вектора a в базисе f связаны с координатами $x_1, \dots, x_n$ в базисе e формулами перехода

$$\boxed{(y_1 \dots y_n) = (x_1 \dots x_n) \mathrm{A}^{-1}, \quad (x_1 \dots x_n) = (y_1 \dots y_n) \mathrm{A}.}$$

Пример. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 сами образуют базис и найти координаты вектора a в этом базисе :

e_1 =(1, 1, 1), e_2 =(1, 1, 2), e_3 =(1, 2, 3) ; a =(6, 9, 14).

▼ Найдем ранг матрицы, составленной из координат векторов e_1, e_2 и e_3:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Ранг равен трем, следовательно, векторы линейно независимы, а любые три линейно независимых вектора в трехмерном пространстве образуют базис.

Пусть $a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. Тогда

$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_1$(1, 1, 1)+ x_2(1, 1, 2)+ x_3(1, 2, 3) =

$(x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3 =$ (6, 9, 14),

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_3 = 3, \\ x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_3 = 3, \\ x_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Координаты вектора a в новом базисе (1, 2, 3).

Пример. Даны два базиса линейного пространства столбцов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найти:

а) матрицу А перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису f_1, f_2, f_3;

б) матрицу A^{-1} обратного перехода;

в) координаты e_1 в обоих базисах;

г) координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3, имеющего во втором базисе координаты (5 3 1).

▼

$$\begin{cases} f_1 = \lambda_{11}e_1 + \lambda_{12}e_2 + \lambda_{13}e_3, \\ f_2 = \lambda_{21}e_1 + \lambda_{22}e_2 + \lambda_{23}e_3, \\ f_3 = \lambda_{31}e_3 + \lambda_{32}e_2 + \lambda_{33}e_3. \end{cases}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} + 2\lambda_{12} + \lambda_{13} \\ \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} \\ \lambda_{11} + 2\lambda_{12} + 3\lambda_{13} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda_{11} = 2{,}5, \\ \lambda_{12} = -1, \\ \lambda_{13} = -0{,}5, \end{matrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{21} + 2\lambda_{22} + \lambda_{23} \\ \lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} \\ \lambda_{21} + 2\lambda_{22} + 3\lambda_{23} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda_{21} = -1{,}5, \\ \lambda_{22} = 1, \\ \lambda_{23} = 0{,}5, \end{matrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{31} + 2\lambda_{32} + \lambda_{33} \\ \lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{33} \\ \lambda_{31} + 2\lambda_{32} + 3\lambda_{33} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda_{31} = -2{,}5, \\ \lambda_{32} = 1, \\ \lambda_{33} = 1{,}5. \end{matrix}$$

а) $\text{A} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -1 & -0{,}5 \\ -1{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$; б) $\text{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$;

в) e_1 имеет координаты (1, 0, 0) в первом базисе и координаты (2,5, -1, -0,5) во втором;

г) координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3 вычисляем по формуле

$$(x_1\ x_2\ x_3) = (5\ \ 3\ \ 1)\,\text{A},$$

x_1=5,5, x_2=-1, x_3=0,5.

Упражнения

1. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:
   а) поменять местами два вектора первого базиса ?

   б) поменять местами два вектора второго базиса ?

2. Найти координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3, если e_1=(1, 1, 1, 1), e_2 = (1, 1, -1, -1), e_3 = (1, -1, 1, -1), e_4 = (1, -1, -1, -1), a = (1, 2, 1, 1).
3. Найти формулы преобразования координат при переходе от базиса e_1, e_2, e_3, e_4 к базису f_1, f_2, f_3, f_4, если

   e_1=(1, 2, -1, 0), f_1= (2, 1, 0,1),

   e_2 = (1, -1, 1, 1), f_2 = (0, 1, 2, 2),

   e_3 = (-1, 2, 1, 1), f_3 = (-2, 1, 1,2),

   e_4 = (-1, -1, 0, 1); f_4 = (1, 3, 1, 2).

4. Уравнение поверхности относительно базиса e_1, e_2, e_3, e_4 имеет вид $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$. Найти уравнение этой поверхности относительно базиса f_1 = (1, 1, 1,1), f_2 = (1, 1, -1, -1), f_3 = (1, -1, 1,-1), f_4 = (1, -1, -1, 1).

5.6. Отображения множеств

Пусть даны два множества M и N. Отображением $\varphi: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ множества M в называется правило, которое каждому элементу a множества M ставит в соответствие элемент $\varphi(a)$ множества N. Если $\varphi(a) = b$, то элемент b множества N называется образом элемента a, а элемент a в свою очередь называется прообразом элемента b. Если $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{M}$, то под $\varphi(\mathrm{X})$ понимают множество всех образов $\varphi(x)$ элементов $x \in \mathrm{X}$, т. е.

$$\varphi(\mathrm{X}) = \{ \varphi(x), \quad x \in \mathrm{X} \}.$$

Если $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{N}$, то множество всех, для которых $\varphi(a) \in \mathrm{Y}$, называют полным прообразом множества Y. Образ элемента a - один, а прообразов элемента b из N может быть несколько или может не быть.

Отображение, которое разные элементы переводит в разные, называется инъективным.

$$\boxed{a_1 \neq a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2), \quad \varphi \text{ - инъекция } \mathrm{M} \text{ в } \mathrm{N}.}$$

Инъективное отображение M в N называют также взаимно однозначным отображением M в N.

Отображение называется сюръективным, если для любого элемента b из N найдется элемент a из M такой, что $\varphi(a) = b$.

$$\boxed{\forall\, b \in \mathrm{N} \;\; \exists\, a \in \mathrm{M} : \varphi(a) = b; \quad \varphi \text{ - сюръекция } \mathrm{M} \text{ на } \mathrm{N}}.$$

Отображение одновременно сюръективное и инъективное называется биективным.

$$\boxed{\text{Инъекция} + \text{сюръекция} = \text{биекция}}$$

Сюръективное отображение M на N называют также взаимно однозначным отображением M на N. В этом случае говорят, что существует взаимно однозначное соответствие между элементами множеств M и N, а множества M и N называют эквивалентными или равномощными: $\mathrm{M} \sim \mathrm{N}$.

Если отображение φ множества M на N взаимно однозначно, то естественным образом определяется отображение множества N на M, называемое обратным к φ и обозначаемое через φ^{-1}. А именно, если $b \in \mathrm{N}$, то существует единственный элемент $a \in \mathrm{M}$, для которого $\varphi^{-1}(b) = a$. Поэтому можно положить $\varphi^{-1}(b) = a$.

Пусть φ_1 - отображение M_1 в N_1, φ_2 - отображение M_2 в N_2, причем $M_1 \subseteq M_2, N_1 \subseteq N_2$. Если φ_1 и φ_2 на M_1 совпадают, то отображение φ_2 называется продолжением отображения φ_1, а отображение φ_1 называется ограничением φ_2 на M_1 и применяется обозначение: $\varphi_2\big|_{M_1} = \varphi_1$.

$$\boxed{\forall\, a \in M_1 \quad \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 \text{ - продолжение } \varphi_1}.$$

Упражнения

1. Докажите свойства эквивалентности множеств: а) $M \sim M$; б) $M \sim N \;\Rightarrow\; N \sim M$; в) $M \sim N, N \sim K \;\Rightarrow\; M \sim K$.
2. Докажите, что $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.
3. Пусть φ_3 – продолжение отображения φ_2, а φ_2 – продолжение φ_1. Докажите, что φ_3 – продолжение φ_1.

5.7. Изоморфизм линейных пространств

Два линейных пространства V_1 и V_2 над полем K называются изоморфными, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие φ , для которого

1. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \forall\, a, b \in V_1$;
2. $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a), \quad \forall\, a \in V_1, \lambda \in V_2$.

Отображение φ в этом случае называется изоморфизмом, а для линейных пространств применяется обозначение $V_1 \approx V_2$.

Для того, чтобы проверить является ли отображение $\varphi: V_1 \to V_2$ изоморфизмом линейных пространств в соответствии с этим определением, надо убедиться , что

1) φ - инъекция V_1 в V_2, т е. $a_1 \neq a_2 \;\Rightarrow\; \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$;
2) φ - сюръекция, т. е. $\forall\, b \in V_2\; \exists\, a \in V_1 \quad \varphi(a) = b$;
3) φ - линейное отображение, т. е. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ и $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$.

Свойства изоморфизмов:

1. $\varphi(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) = \lambda_1\varphi(a_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(a_n)$.
2. $\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$, где θ_1 и θ_2 - нулевые векторы V_1 и V_2 соответственно.
3. $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.
4. $V \approx V$; $V_1 \approx V_2 \Rightarrow V_2 \approx V_1$; $V_1 \approx V_2, V_2 \approx V_3 \Rightarrow V_1 \approx V_3$.

Теорема. При изоморфизме линейно независимая система переходит в линейно независимую.

Доказательство. Пусть φ - изоморфизм между линейными пространствами V_1 и V_2 над полем K и $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы в V_1. Предположим, что θ_1 и θ_2 - нулевые векторы V_1 и V_2 соответственно и $\lambda_1\varphi(a_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(a_n) = \theta_2$.

Тогда по свойству линейности $\varphi(\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_n a_n)=\theta_2$, а в силу того, что φ - мономорфизм, $\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_n a_n=\theta_1$. Из линейной независимости взятых векторов следует, что $\lambda_1=0,\ldots,\lambda_n=0$. Это означает, что векторы $\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n)$ линейно независимы.

Теорема. Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.

Доказательство. Пусть $\dim_K V=n$ и $e_1,\ldots,e_n$ базис V/K. Любой вектор $x\in V$ можно разложить по базису: $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$.

Докажем, что $V\approx K^n$. Для этого проверим, что отображение $\varphi: x\to<x_1,\ldots,x_n>$ - инъекция, сюръекция и линейное. Соответствие φ действительно отображает V в K^n, так как каждому вектору в фиксированном базисе ставится в соответствие единственный набор коэффициентов. Если векторы различны, то хотя бы в одной координате они отличаются, поэтому φ - инъекция. Если $<\lambda_1,\ldots,\lambda_n>\in K^n$, то в V существует элемент $\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n$ и при этом $\varphi(\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n)=<\lambda_1,\ldots,\lambda_n>$, т. е. φ- сюръекция. Столь же очевидна и линейность отображения φ. Если $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$, $y=y_1e_1+\ldots+y_ne_n$, то $\varphi(x+y)=<x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n>$ и $\varphi(\lambda x)=<\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n>$, т. е. $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$.

Так как все линейные пространства над K изоморфны K^n, то они изоморфны между собой. ■

Замечание. Изоморфизм как бы « срисовывает» структуру линейного пространства. Поэтому утверждение теоремы можно трактовать так: линейные пространства одной и той же размерности с алгебраической точки зрения тождественны.

Упражнения

1. Линейно ли отображение $\varphi: V\to K^n$, если
   a) $\varphi(x)=(x_1, x_2+1, x_3+2)$;
   b) b) $\varphi(x)=(2x_1+x_2, x_1+x_3, x_3^2)$;
   c) $\varphi(x)=(x_1+x_2-x_3, x_3, x_2)$.

2. Если φ - линейное отображение V_1 в V_2, то φ называется <u>гомоморфным</u> отображением, $Ker\,\varphi=\{x\,|\,\varphi(x)=\theta_2\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\{y\in V_2\,|\,\exists\, x\in V, \varphi(x)=y\}$. Докажите, что $Ker\,\varphi$ - подпространство линейного пространства V_1, $\operatorname{Im}\varphi$ - подпространство линейного пространства V_2.
3. Линейное инъективное отображение V_1 в V_2 называется мономорфизмом. Докажите, что если φ - мономорфизм, то $\dim_K \operatorname{Im}\varphi\le\dim_K V_2$.
4. Линейное сюръективное отображение V_1 на V_2 называется эпиморфизмом. Докажите, что если $\exists$ эпиморфизм $\varphi: V_1\to V_2$, то $\dim_K V_1 \ge \dim_K V_2$.

Прямая сумма подпространств

Пусть, $V_1, V_2 \ldots, V_k$ - подпространства линейного пространства V/K. Суммой подпространств называется множество всех сумм элементов этих подпространств, взятых по одному из каждого подпространства:

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_k = \{v_1 + v_2 + \ldots + v_k, \quad v_i \in V_i, \quad i = \overline{1, k}\}.$$

Теорема. $\dim_K (V_1 + V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K (V_1 \cap V_2)$.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ - базис $V_1 \cap V_2$, т. е. $\dim_K (V_1 \cap V_2) = m$. Элементы $a_1, \ldots, a_m$ линейно независимы в V_1 и их можно в V_1 дополнить до максимальной линейно независимой системы, т. е. до базиса V_1: $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ - базис V_1, $m + n = \dim_K V_1$. Аналогично, дополним систему $a_1, \ldots, a_m$ до базиса V_2: $a_1, \ldots, a_m, c_1, \ldots, c_l$ - базис V_2, $m + l = \dim_K V_2$. Векторы $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_l$ линейно независимы. В самом деле, если

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m + \mu_1 b_1 + \ldots \mu_n b_n + \nu_1 c_1 + \ldots + \nu_l c_l = \theta,$$

то

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m + \mu_1 b_1 + \ldots \mu_n b_n = -\nu_1 c_1 - \ldots - \nu_l c_l \in V_1 \cap V_2 \quad \Rightarrow$$

$$-\nu_1 c_1 - \ldots - \nu_l c_l = \omega_1 a_1 + \ldots + \omega_m a_m \quad \Rightarrow$$
$$\omega_1 a_1 + \ldots + \omega_m a_m + \nu_1 c_1 + \ldots + \nu_l c_l = \theta \quad \Rightarrow$$

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_m = 0, \nu_1 = 0, \ldots, \nu_l = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m + \mu_1 b_1 + \ldots \mu_n b_n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_m = 0, \mu_1 = 0, \ldots, \mu_n = 0.$$

Итак, из того, что линейная комбинация этих векторов равна θ, следует, что все коэффициенты равны нулю, а это и означает их линейную независимость. Ясно, что эти векторы - система образующих подпространства $V_1 + V_2$, а значит, базис. Получили, что $\dim_K (V_1 + V_2) = m + n + l = (m + n) + (m + l) - m =$

$$= \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K (V_1 \cap V_2). \blacksquare$$

Сумма подпространств называется прямой, если каждый её элемент можно представить в виде суммы элементов подпространств единственным образом. В этом случае пишут $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$.

Теорема. Сумма $V_1 + \ldots + V_k$ - прямая $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = \{\theta\}, \ i = 1, \ldots, k.$$

Доказательство.

Дано: сумма $V_1 + \ldots + V_k$ - прямая. Без ограничения общности можно рассмотреть лишь случай i=1.

Пусть $x \in V_1 \cap (V_2 + \ldots + V_k)$.

Тогда $x \in V_1, x \in V_2 + \ldots V_k \Rightarrow x = x_2 + \ldots + x_k$, где $x_2 \in V_2, \ldots, x_k \in V_k$, т. е. $(-x) + x_2 + \ldots + x_k = \theta$. С другой стороны, для нулевого вектора уже существует представление в виде суммы элементов подпространств: $\theta + \ldots + \theta = \theta$. В силу единственности представления получаем $-x = \theta, x_2 = \theta, \ldots, x_k = \theta$, т. е. $\boxed{x = \theta} \Rightarrow V_1 \cap (V_2 + \ldots + V_k) = \{\theta\}$.

Дано: $\forall\, i \quad V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + V_k = \{0\}$.

Предположим, что для некоторого элемента x имеем $x = x_1 + \ldots + x_k$, $x = y_1 + \ldots + y_k$, где $x_i, y_i \in V_i$, $i = \overline{1,k} \Rightarrow$ $y_1 - x_1 = (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) + \ldots + (x_k - y_k) \in V_1 \cap (V_2 + \ldots + V_k) \Rightarrow$

$y_1 - x_1 = \theta \Rightarrow x_1 = y_1$. Аналогично доказывается, что $x_2 = y_2, \ldots, x_k = y_k$. Следовательно, любой элемент представим в виде суммы элементов $V_1, \ldots, V_k$ единственным образом. ■

Если $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, то говорят, что линейное пространство V разложимо в прямую сумму подпространств. В этом случае $\dim V = \sum_{i=1}^{k} \dim V_i$ и каждый элемент V представим в виде суммы элементов из $V_1, \ldots, V_k$ и притом единственным образом.

Если $V = V_1 \oplus V_2$, то подпространства V_1 и V_2 называются <u>дополнительными</u>.

Пусть V_1 и V_2 - произвольные линейные пространства над одним и тем же полем K. Рассмотрим множество пар вида $< x, y >,\ x \in V_1, y \in V_2$. Оно является линейным пространством (надо проверить !) относительно отношения

равенства $< x_1, y_1 > = < x_2, y_2 > \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$,

сложения $< x_1, y_1 > + < x_2, y_2 > \Leftrightarrow < x_1 + x_2, y_1 + y_2 >$

и умножения на элемент поля $\lambda < x, y > = < \lambda x, \lambda y >$.

Это линейное пространство называется (внешней) <u>прямой суммой</u> линейных пространств V_1 и V_2. Заметим, что V_1 изоморфно подпространству $\overline{V}_1 = \{< x, 0 >, x \in V_1\}$, а $V_2 \approx \overline{V}_2 = \{< 0, y >, y \in V_2\}$, т. е. $V \approx \overline{V}_1 \oplus \overline{V}_2$. Обычно отождествляют V_1 и $\overline{V}_1$, V_2 и $\overline{V}_2$. При таком отождествлении внешняя прямая сумма совпадает с введенной ранее внутренней прямой суммой.

Упражнения

1. Для подпространств V_1 и V_2 докажите, что $V_1 \cap V_2$ и $V_1 + V_2$ тоже подпространства линейного пространства V.
2. Докажите, что $\sum_i P_i$ семейства подпространств – линейная оболочка их объединения.
3. Докажите, что сумма V_1 и V_2 - прямая $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$.

4. Докажите, что сумма $\sum_i V_i$ - прямая тогда и только тогда, когда нулевой вектор представим в виде суммы элементов подпространств единственным образом.
5. Если $V_1 + V_2 = V$, то $\dim(V_1 \cap V_2) = p + q - n$, где $\dim V = n$, $\dim V_1 = p$, $\dim V_2 = q$. Докажите.
6. Если $p + q > n$, то $V_1 \cap V_2 \neq \{\theta\}$. Докажите.
7. Для любого подпространства существует дополнительное подпространство. Докажите.

Евклидовы пространства

Рассматриваем линейное пространство E над полем вещественных чисел R. Скалярным произведением векторов a и b называется число $(a,b) \in \mathbf{R}$, если

1) $(a,a) \geq 0, \quad (a,a) = 0 \Leftrightarrow a = \theta$;
2) $(a,b) = (b,a) \quad \forall\, a,b \in \mathrm{E}$;
3) $(a+b,c) = (a,c) + (b,c) \quad \forall\, a,b,c \in \mathrm{E}$;
4) $(\lambda a,b) = \lambda(a,b) \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{R},\ \forall\, a,b \in \mathrm{E}$.

Евклидовым пространством называется линейное пространство E с введенным на нем скалярным произведением.

Скалярное произведение представляет собой вещественнозначную функцию от двух переменных, определенных на E. Условия 3) и 4) говорят о том, что функция линейна по первой переменной. Из условия 2) легко следует линейность и по второй переменной. В самом деле:

$$(a,b+c) = (b+c,a) = (b,a) + (c,a) = (a,b) + (a,c) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(a,b+c) = (a,b) + (a,c)}.$$

$$(a,\lambda b) = (\lambda b,a) = \lambda(b,a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(a,\lambda b) = \lambda(a,b)}\ .$$

Свойства скалярного произведения

1) $(a,\theta) = 0$;
2) $a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (a,a) > 0$;
3) $(a-b,c) = (a,c) - (b,c)$.

Доказательство свойства 1).

$$(a,b) = (a,b+\theta) = (a,b) + (a,\theta) \quad \Rightarrow \quad (a,\theta) = a\,.$$

Доказательство свойства 3).

$$(a,c) = (a-b+b,c) = (a-b,c) + (b,c) \quad \Rightarrow \quad (a-b,c) = (a,c) - (b,c)\,.$$

Теорема (неравенство Коши – Буняковского)

$$|(a,b)| \leq \sqrt{(a,a),(b,b)}\,.$$

Доказательство. Если $a = \theta$ или $b = \theta$, то неравенство выполняется. Будем считать $a \neq \theta, b \neq \theta$.

$$(a-\lambda b, a-\lambda b) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (a,a) - 2\lambda(a,b) + \lambda^2(b,b) \geq 0\,.$$

Так как $b \neq \theta$, то квадратный трехчлен в левой части неравенства принимает значения ≥ 0, если дискриминант неположителен, т. е. $(a,b)^2 - (a,a)(b,b) \leq 0$, $(a,b)^2 \leq (a,a)(b,b)$. ■

Введем обозначение $\| a \| = \sqrt{(a,a)}$ и назовем это число <u>нормой</u> вектора или <u>длиной</u>. Вектор $\frac{1}{\| a \|} \cdot a$ для ненулевого вектора a назовем <u>ортом</u> вектора a. Переход $a \to \frac{1}{\| a \|} \cdot a = e$ называется <u>нормированием</u>. Заметим, что $\| e \| = 1$. Для ненулевых векторов a и b из неравенства Коши – Буняковского следует, что $\frac{(a,b)}{\| a \| \cdot \| b \|} \leq 1$.

Существует угол α, для которого $\cos\alpha = \frac{(a,b)}{\| a \| \cdot \| b \|}$; $(a,b) = \| a \| \cdot \| b \| \cos\alpha$. Будем называть α <u>углом</u> между векторами a и b. Векторы a и b называются <u>ортонормированными</u>, если их скалярное произведение равно нулю: $a \perp b \iff (a,b) = 0$. Считаем, что нулевой вектор θ ортогонален любому. Система векторов называется <u>ортогональной</u>, если ее векторы попарно ортогональны.

Теорема. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Доказательство. Для ортогональной системы ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_n$ запишем $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \theta$. Домножим скалярно обе части равенства на a_1. Получим

$$\lambda_1(a_1, a_1) + \lambda_2(a_2, a_1) + \ldots + \lambda_n(a_n, a_1) = (\theta, a_1) \Rightarrow \lambda_1(a_1, a_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Аналогично проверяется, что $\lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$. ■

Базис $e_1, \ldots, e_n$ называется <u>ортонормированным</u>, если он ортогонален и каждый его вектор нормирован, т. е.

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j \quad (\text{дельта Кронекера}) \end{cases}.$$

Теорема. Скалярное произведение в ортонормированном базисе равно сумме произведений соответствующих координат.

Доказательство. $a = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, $b = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n \Rightarrow$

$$(a,b) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_j. \ ■$$

Квадратная матрица A порядка n называется ортогональной, если $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$, где A^{T} - транспонированная матрица, I - единичная матрица порядка n.

Теорема. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортогональна.

Доказательство. $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ - два ортонормированных базиса,
$$\begin{cases} e_1 = a_{11} f_1 + \dots + a_{1n} f_n, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ e_n = a_{n1} f_1 + \dots + a_{nn} f_n; \end{cases} \qquad \mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}.$$

Тогда с одной стороны $e_i e_i = 1$ для $1 \le i \le n$, а с другой стороны $(e_i, e_i) = a_{11}^2 + \dots + a_{1n}^2$, т. е. $a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 = 1$.

С одной стороны $(e_i, e_j) = 0$ для $i \ne j$, а с другой стороны $(e_i, e_j) = a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + \dots + a_{in} a_{jn}$, т. е. $a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + \dots + a_{in} a_{jn} = 0$. Отсюда $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$. ■

Теорема. В любой линейной оболочке $L(a_1, \dots, a_n)$ существует ортогональный базис.

Доказательство. Построим новую систему образующих линейной оболочки следующим образом:

$$b_1 = a_1,$$

$$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i, \quad k = 2, 3, \dots, n;$$

$$c_i = \frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \text{ если } b_i \ne \theta$$

и c_i - любое число, если $b_i = \theta$.

Значения c_i получены из условия $(b_k, b_i) = 0$. Система $b_1, \dots, b_n$ ортогональна по построению и является системой образующих, так как все векторы $a_1, \dots, a_n$ линейно выражаются через $b_1, \dots, b_n$. ■

Процессом ортогонализации системы $a_1, \dots, a_n$ называется переход к системе $b_1, \dots, b_n$.

▼ *Пример.* Применить процесс ортогонализации к системе

a_1=(1, 1, -1, -2), a_2=(5, 8, -2, -3), a_3=(3, 9, 3, 8).

Ў $b_1 = a_1$. Вектор b_2 ищем в виде $b_2 = a_2 - \lambda b_1$, где λ находим из условия $(b_2, b_1) = 0$, $(a_2, b_1) - \lambda (b_1, b_1) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{21}{7} = 3$, $b_2 = a_2 - 3b_1$=(5, 8, -2, -3) – 3(1, 1, -1, -2)=(2, 5, 1, 3). $b_3 = a_3 - \alpha b_1 - \beta b_2$, $0 = (b_3, b_1) = (a_3, b_1) - \alpha (b_1, b_1) \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -1$,

$$0 = (b_3, b_2) = (a_3, b_2) - \beta (b_2, b_2) \;\Rightarrow\; \beta = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = \frac{78}{39} = 2;$$

$b_3 = a_3 + b_1 - 2b_2 =$ (3, 9, 3, 8)+(1, 1, -1, -2) – 2(2, 5, 1, 3)=(0, 0, 0, 0).

Ответ: b_1=(1, 1, -1, -2), b_2=(2, 5, 1, 3). Вектор b_3 оказался нулевым из – за того, что векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы. Рациональнее было бы в начале выделить максимальную линейно независимую подсистему и уже к ней применить процесс ортогонализации. ▲

<u>Комплексным евклидовым пространством</u> или <u>унитарным</u> называется линейное пространство над полем комплексных чисел, в котором каждой паре a и b векторов поставлено в соответствие комплексное число (a, b), удовлетворяющее условиям:

(1) $(a,a) \in \mathrm{R}; \quad a \neq \theta \quad \Rightarrow \quad (a,a) > 0$;

(2) $(a,b) = \overline{(b,a)}, \quad$ (здесь $\bar{z} = x - yi$ для $z = x + yi, \quad x, y \in \mathrm{R})$;

(3) $(a+b,c) = (a,c) + (b,c)$;

(4) $(\lambda a, b) = \lambda(a,b)$.

Свойства скалярного произведения, определенного в комплексном евклидовом пространстве:

(1) $(a,b+c) = (a,b) + (b,c)$;

(2) $(a,\lambda b) = \bar{\lambda}(a,b)$.

Доказательство: (1). $(a,b+c) = \overline{(b+c,a)} = \overline{(b,a)} + \overline{(c,a)} = (a,b) + (a,c)$.

Доказательство: (2). $(a,\lambda b) = \overline{(\lambda b,a)} = \overline{\lambda(b,a)} = \bar{\lambda}\,\overline{(b,a)} = \bar{\lambda}(a,b)$.

В комплексном евклидовом пространстве также имеет место неравенство Коши – Буняковского, точно также определяются понятия ортогональности, ортонормированного базиса и т. п.

Упражнения

1. Построить ортогональный базис подпространства, натянутого на векторы a_1=(1, 2, 2, -1), a_2 =(1, 1, -5, 3), a_3 =(3, 2, 8, -7).
2. Пусть $L^{\mathrm{T}} = \{x \mid (x,y) = 0 \ \ \forall\, y \in L\}$ (ортогональное дополнение подпространства L евклидова пространства Е). Доказать, что
   a) L^{T} - подпространство евклидова пространства E;
   b) $(L^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = L, \quad (L_1 + L_2)^{\mathrm{T}} = L_1^{\mathrm{T}} \cap L_2^{\mathrm{T}}, \quad (L_1 \cap L_2)^{\mathrm{T}} = L_1^{\mathrm{T}} + L_2^{\mathrm{T}}$;
3. $\dim L + \dim L^{\mathrm{T}} = \dim \mathrm{E}$.
4. Докажите, что скалярное произведение двух векторов комплексного евклидова пространства, заданных координатами в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле $(a,b) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}$.

Приложение 2

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»

(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине «Алгебра»

Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Образовательная программа бакалавриата

Форма подготовки очная

Владивосток

2016

Паспорт ФОС

по дисциплине «Алгебра»

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-1 - готовностью к самостоятельной работе	Знает	глубоко освоить основные понятия и теоремы курса
	Умеет	самостоятельно изучать дополнительные разделы дисциплины
	Владеет	навыками изучения математической литературы, способностью анализировать и обобщать полученные знания
ПК-9 способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат	Знает	основные понятия и методы современной алгебры, теорию чисел, методы решения различных систем уравнений, элементы линейной алгебры, основные методы теории групп, колец полей
	Умеет	применять методы современной алгебры при решении задач прикладной математики
	Владеет	методами современной алгебры при решении задач в своей предметной области
ПК-12 способностью самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук	Знает	основные понятия и методы современной алгебры, основные методы теории групп, колец и полей
	Умеет	применять методы линейной алгебры и аналитической геометрии при решении инженерных задач
	Владеет	инструментом для решения математических задач в своей предметной области

ОПИСАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КРИТЕРИЕВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

ОПК-1 - готовностью к самостоятельной работе

ПК-12 способностью самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук

Планируемые результаты обучения* (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения**				
	1	2	3	4	5
Знает: основные понятия и методы современной алгебры, теорию чисел, методы решения различных систем уравнений, элементы линейной алгебры, основные методы теории групп, колец полей.	Отсутствие знания элементов линейной алгебры, основных методы теории групп, колец полей.	Фрагментарное знание понятий современной алгебры, теории чисел, методов решения различных систем уравнений,	Неполное знание понятий и методов современной алгебры, теории чисел, методов решения различных систем уравнений,	В целом сформировавшееся знание современной алгебры, теории чисел, методов решения различных систем уравнений, элементов линейной алгебры, основные методов теории групп, колец полей.	Сформировавшееся систематическое знание современной алгебры, теорию чисел, методы решения различных систем уравнений, элементы линейной алгебры, основные методы теории групп, колец полей.
Умеет: применять методы современной алгебры при решении задач физики, химии криптографии, прикладной	Отсутствие умения использовать различные методы современной алгебры	Фрагментарное умение использовать методы современной алгебры	Неполное умение использовать и применять методы современной алгебры	В целом сформировавшееся умение использовать различные методы современной алгебры	Сформировавшееся систематическое умение использовать различные методы современной алгебры при решении задач физики, химии

математики .					криптографии, прикладной математики.
Владеет: методами современной алгебры при решении задач в своей предметной области.	Отсутствие владения методами современной алгебры при решении задач в своей предметной области.	Фрагментарное владение методами современной алгебры при решении задач в своей предметной области.	Неполное владение навыками современной алгебры при решении задач в своей предметной области.	В целом сформировавшееся владение методами современной алгебры при решении задач в своей предметной области.	Сформировавшееся систематическое владение методами современной алгебры при решении задач в своей предметной области.
Шкала оценивания *** (соотношение с традиционными формами аттестации)	0–8 неудовлетворительно	9–12 неудовлетворительно	13–15 удовлетворительно	16–18 хорошо	19–20 отлично

ПК-9 способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат

Планируемые результаты обучения* (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения**				
	1	2	3	4	5
Знает: основные понятия и методы	Отсутствие знания основных понятий и	Фрагментарное знание понятий и методов	Неполное знание основных понятий и	В целом сформировавшееся знание основных	Сформировавшееся систематическое знание

современной алгебры, основные методы теории групп, колец и полей.	методов современной алгебры, основные методы теории групп, колец и полей.	современной алгебры, методов теории групп, колец и полей.	методов современной алгебры, основных методов теории групп, колец и полей.	понятий и методов современной алгебры, основных методов теории групп, колец и полей.	основных понятий и методов современной алгебры, основных методов теории групп, колец и полей.
Умеет: применять методы линейной алгебры и аналитической геометрии при решении инженерных задач.	Отсутствие умения использовать различные методы линейной алгебры и аналитической геометрии при решении инженерных задач.	Фрагментарное умение использовать методы линейной алгебры и аналитической геометрии при решении инженерных задач.	Неполное умение применять методы линейной алгебры и аналитической геометрии при решении инженерных задач.	В целом сформировавшееся умение использовать различные методы линейной алгебры и аналитической геометрии при решении инженерных задач.	Сформировавшееся систематическое умение использовать различные методы линейной алгебры и аналитической геометрии при решении инженерных задач.
Владеет: инструментом для решения математических задач в своей предметной области.	Отсутствие владения методами решения математических задач в своей предметной области.	Фрагментарное владение методами решения математических задач в своей предметной области.	Неполное владение навыками решения математических задач в своей предметной области.	В целом сформировавшееся владение методами решения математических задач в своей предметной области.	Сформировавшееся систематическое владение методами решения математических задач в своей предметной области.
Шкала оценивания *** (соотношение с традиционными формами	0–8 неудовлетворительно	9–12 неудовлетворительно	13–15 удовлетворительно	16–18 хорошо	19–20 отлично

аттестации)					

Критерии оценки разноуровневых задач и заданий

для дисциплины «Алгебра»

Критерии оценки:

- ✓ 100-86 баллов выставляется студенту, если студент правильно выполнил все расчеты, сформулировал аргументированные выводы и безукоризненно графически оформил работу.
- ✓ 85-76 баллов – в расчетах студент допустил не более одной ошибки, не сформулировал выводов, но графическое оформление работы в целом выполнено верно.
- ✓ 75-61 балл - студент допустил несколько (2-3) ошибок в расчетах, не смог сформулировать выводов и некорректно оформил результаты графически
- ✓ 60-50 баллов – студент не смог воспроизвести последовательность расчетов и не имеет представления о графическом оформлении результатов

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Текущая аттестация студентов. Текущая аттестация студентов по дисциплине проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной. Текущая аттестация по дисциплине проводится в форме контрольных мероприятий (контрольные и самостоятельные работы, ИДЗ, коллоквиумы, беглый опрос) по оцениванию фактических результатов обучения студентов и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);

- степень усвоения теоретических знаний;

- уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;

- результаты самостоятельной работы.

По каждому объекту выше дается характеристика процедур оценивания в привязке к используемым оценочным средствам.

Промежуточная аттестация студентов. Промежуточная аттестация студентов проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Промежуточный контроль осуществляется в 7 семестре в форме экзамена.

Предполагается комбинированная (устная/письменная) формы текущего контроля и экзамена: устный опрос в форме собеседования на вопросы экзаменационных билетов (билетов к зачету) и письменный ответ на практические задания и задачи.

Критерии выставления оценки студенту на экзамене

Баллы (рейтинговой оценки)	**Оценка** **Экзамена/зачета** (стандартная)	**Требования к сформированным компетенциям**
100-86 баллов	**«отлично»/** **«Зачтено»**	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий,

		использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.
85-76	**«хорошо» »/** **«Зачтено»**	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.
75-61	**«удовлетворит ельно» »/** **«Зачтено»**	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.
60-50	**«неудовлетвор ительно» »/** **«не зачтено»**	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

Комплект заданий для контрольной работы по дисциплине «Алгебра»

Тема Комплексные числа. Варианты контрольной работы

1 вариант

1. Вычислите: а) $(2+5i)^3$; б) $\dfrac{23+i+i^{37}}{3-i+i^{122}}$.
2. Решите уравнение: $z^4-6z^2+25=0$.
3. Вычислите, используя тригонометрическую форму записи комплексного числа: а) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{13}$; б) $\sqrt[4]{4}$.
4. Решите уравнение: а) $\bar{z}=-zi$; б) $2|z|-8z+1+2i=0$.
5. Пусть $w=\dfrac{z-1}{z+1}$, где $z\neq\pm1$. Докажите, что w - чисто мнимое тогда и только тогда, когда $|z|=1$.

6. Изобразите на плоскости множество всех точек, для которых $\begin{cases} 1 \le |2i - z| < 3; \\ \arg z = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

7. Выразите $\cos^3 \varphi$ через тригонометрические функции кратных углов.

8. Найдите сумму:

$\cos\dfrac{2\pi}{n} + 2\cdot\cos\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + (n-1)\cdot\cos\dfrac{2(n-1)}{n}$.

2 вариант

1. Вычислите: а) $\dfrac{(3-4i)\cdot(2-i)}{2+i} - \dfrac{(3+4i)\cdot(2+i)}{2-i}$;

   б) $\sqrt{-24+10i}$.

2. При каких комплексных z выражения $(3+i)z+1-5i$ и z^2+1-4i одновременно имеют действительные значения ?

3. Вычислите, используя тригонометрическую форму записи комплексного числа:

   а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{26}$; б) $\sqrt[6]{-27}$.

4. Решите уравнение: а) $\bar{z} = -6z + 2 + 2i$;

   б) $|z+1-i| = 2|z|$.

5. Для каких целых n $(1+i)^n = (1-i)^n$?

6. Изобразите на плоскости множество всех точек, для которых $\begin{cases} |z+2i| \le 3; \\ \arg z = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

7. Выразите $tg\, 8x$ через $tg\, x$.

8. Найдите сумму:

$\sin x - C_n^1 \sin 2x + C_n^2 \sin 3x - \ldots + (-1)^n C_n^n \sin(n+1)x$.

3 вариант

1. Вычислите: а) $\dfrac{(2-i)\cdot(3+i)+(2+i)\cdot(3-i)}{(5+i)\cdot(4-i)-(5-i)\cdot(4+i)}$;;

   б) $\sqrt{5+12i}$.

2. При каких действительных х и у числа $x+y^2+1+4i$ и ixy^2+iy^2-3 будут комплексно сопряженными ?

3. Вычислите, используя тригонометрическую форму записи комплексного числа:

   а) $\left(\dfrac{2-2i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{27}$; б) $\sqrt[4]{-4}$.

4. Решите уравнение: а) $|\bar{z}+1+i| = |3-z+2i|$;

б) $z+3|z+1|i=0$.

5. Вычислите $z^{1971}+\dfrac{1}{z^{1971}}$, если $z^2+z+1=0$.

6. Изобразите на плоскости множество всех точек, для которых $\begin{cases} 1<|2i-z|\le 3; \\ \arg z=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

7. Выразите $ctg\,8x$ через $ctg\,x$.
8. Найдите сумму:
$\sin^2 x-\sin^2 3x+\sin^2 5x-\ldots+\sin^2(2n-1)x$.

4 вариант

1. Вычислите: а) $\dfrac{(2+i)\cdot(3-2i)-3i^{10}}{(2-i)^2-1+2i}$;;
б) $\sqrt{-24-10i}$.

2. Найдите действительные значения x, при которых комплексные числа $z_1=\sqrt{x^2-3}+3-i\sin\dfrac{\pi x}{4}$ и $z_2=\sqrt{x^2+5}+1-i\sin^2\dfrac{\pi x}{4}$ являются сопряженными.
3. Вычислите, используя тригонометрическую форму записи комплексного числа:
а) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{24}$; б) $\sqrt[6]{1}$.

4. Решите уравнение: а) $2z^2-3z\cdot|z|+\bar{z}^2=3$;;
б) $|z|+z=1-i$.

5. Вычислите $z^{1971}+\dfrac{1}{z^{1971}}$, если $\dfrac{1}{z}+z=1$.

6. Изобразите на плоскости множество всех точек, для которых $\begin{cases} |z-1|\ge 3; \\ \arg z=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

7. Выразите $ctg\,7x$ через $ctg\,x$.
8. Найдите сумму:
$\sin^2 x-\sin^2 3x+\sin^2 5x-\ldots+\sin^2(2n-1)x$.

Тема Квадратичные формы

Задание 1. Квадратичную форму а) запишите в матричном виде, б) с помощью невырожденного линейного преобразования переменных приведите к каноническому виду, в) приведите к нормальному виду; г) укажите положительный индекс инерции, д) укажите отрицательный индекс инерции; д) ранг матрицы; е) дефект квадратичной формы; ё) сигнатуру

1. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+4x_3^2$.

2. $4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3-3x_2^2+4x_3^2$.

3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$.

4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$.

5. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

6. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$.

7. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$.

8. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.

9. $x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$.

10. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$.

11. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$.

12. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.

13. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$.

14. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.

15. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$.

16. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$.

17. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$.

18. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 6x_3^2$.

19. $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$.

20. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

21. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$.

22. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$.

23. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$.

24. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$.

25. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 4x_2x_3 - x_3^2$.

26. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$.

27. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$.

28. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$.

29. $x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

30. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_3^2$.

31. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

32. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$

Задание 2. Уравнение линии приведите к каноническому виду и определите тип линии; запишите результирующее преобразование переменных

1. $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$

2. $2x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$

3. $4xy + 4x - 4y = 0$

4. $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$

5. $-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$

6. $-2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$

7. $-x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0$

8. $-4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0$

9. $4xy + 4x - 4y - 2 = 0$

10. $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0$

11. $x^2 + y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$

12. $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 4y + 1 = 0$

13. $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$

14. $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0$

15. $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0$

16. $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$

17. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$

18. $4xy + 4x + 4y + 1 = 0$

19. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0$

20. $-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$

21. $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0$

22. $x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$

23. $-x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$

24. $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0$

25. $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0$

26. $-4xy + 8x + 8y + 1 = 0$

27. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0$

28. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$

29. $4xy + 4x - 4y + 4 = 0$

30. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0$

31. $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$

32. $9x^2 + 9y^2 + 6xy + x - 6y - 1 = 0$

Задание 3. Уравнение поверхности приведите к каноническому виду и определите тип поверхности; запишите результирующее преобразование переменных

1. $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 = 0$

2. $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = 16$

3. $xy = z^2$

4. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2 - 4x_2 + 2x_1x_3 = 0$

5. $xz = y^2$

6. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1$

7. $yz = x^2$

8. $yz = -x^2$

9. $yz = x^2 + 1$

10. $yz = -x^2 - 1$

11. $yz = 4x^2 - 1$

12. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = 0$

13. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$

14. $xz = -y^2 - 1$

15. $x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 = 16$

16. $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_1 - 2x_3x_2 - 2x_2 + 4x_3 = 0$

17. $xy = z^2 + 1$

18. $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 = 1$

19. $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 = 0$

20. $xy = z$

21. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = 1$

22. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_1 - 2x_3 = 0$

23. $yz = x$

24. $2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 = 9$

25. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = 0$

26. $x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3+4x_2x_3=4$

27. . $xz=y$

28. $x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3=-1$

29. $xz=-y^2$

30. $5x_1^2+2x_2^2+x_3^2+4x_2x_1+2x_3x_2=1$

31. $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1+4x_2=0$

32. $xz=y^2-1$

Задание 4. Приведите квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием; запишите результирующее преобразование переменных

1. $6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$

2. $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$

3. $4x_1^2-3x_2^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$

4. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2\sqrt{3}x_2x_3$

5. $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$

6. $2x_1^2+9x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$

7. $-4x_1^2-4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$

8 . $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2\sqrt{3}x_2x_3$

9. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$

10. $-x_1^2-x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$

11. $x_1^2-7x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$

12. $2x_1x_2-6x_1x_3-6x_2+2x_3x_4$

13. $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$

14. $3x_1^2-7x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3$

15. $x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$

16. $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8\sqrt{2}x_2x_3$

17. $-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$

18. $-x_1^2+10x_2^2-x_3^2-8x_1x_2+6x_1x_3+8x_2x_3$

19. $x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3$

20. $-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3$

21. $2x_1^2+3x_2^2-2x_3^2-8x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3+2\sqrt{2}x_2x_3$

22. $-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

23. $10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3$

24. $3x_1^2 - 10x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 - 8x_2x_3$

25. $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$

26. $2x_1^2 - 3x_2^2 - 2\sqrt{3}x_3^2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$

27. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$

28. $x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$

29. $5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$

30. $6x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_2x_3$

31. $5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$

32. $-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + \$x_1x_2 + 4x_2x_3$

Задание 5. Найдите все значения параметра λ, при которых квадратичные формы положительно определены

1. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$

2. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$

3. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

4. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$

5. $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

6. $4x_1^2 + 3x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$

7. $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

8. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

9. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3$

10. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

11. $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_2x_3$

12. $x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

13. $9x_1^2 + 6x_2^2 + \lambda x_3^2 - 6x_1x_2 - 10x_1x_3 + 16x_2x_3$

14. $x_1^2 + 17x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$

15. $x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

16. $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_1 + 6x_1x_3 + 2\lambda x_3x_2$

17. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 6x_2x_3$

18. $5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_1 - 2x_1x_3 + 2\lambda x_3x_2$

19. $3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_3x_2$

20. $\lambda x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_1 + 4x_3x_2 - 2x_1x_3$

21. $\lambda x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_1 - 2x_1x_3 + 4x_3x_2$

22. $9x_1^2 + 6x_2^2 + 11x_3^2 - 6x_1x_2 - 10x_1x_3 + \lambda x_2x_3$

23. $4x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_1x_2 - 2x_2x_3$

24. $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$

25. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_1 + 10x_1x_3 + 2\lambda x_3x_2$

26. $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 4x_2x_3$

27. $2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3$

28. $5x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

29. $5x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - +4x_1x_3 2x_2x_3$

30. $9x_1^2 + 6x_2^2 + 11x_3^2 + \lambda x_1x_2 - 10x_1x_3 + 16x_2x_3$

31. $4x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + \lambda x_2x_3$

32. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$

Тема Собственные векторы

Найдите: собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей и ортонормированный базис подпространства собственных векторов ЛП

Варианты

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ **4**. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ **6**. $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$ **7**. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ **8**. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ **10**. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ **11**. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ **12**. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ **15**. $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 6 & 4 & -15 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} -6 & 12 & -2 \\ -9 & 18 & -3 \\ -3 & 18 & -3 \end{pmatrix}$ **19.** $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & 3 \\ -9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ **20**. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **22.** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -5 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **32.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **34.** $\begin{pmatrix} 13 & -5 & -6 \\ 16 & -7 & -8 \\ 16 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ **35.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ **36.** $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -12 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **38.**. $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 8 & 10 & -8 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ **39.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -14 \\ 3 & 6 & -10 \end{pmatrix}$ **40.** $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 1 & 21 & -26 \\ 1 & 17 & -21 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 8 & -5 & -6 \\ 30 & -19 & -23 \\ -14 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **43.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -10 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **44.** $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 22 & -4 & 16 \\ -6 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ **46.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **47.** $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **48.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **50.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ -15 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ **51.** $\begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ -6 & -12 & -9 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ **52.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ -15 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **54.** $\begin{pmatrix} 12 & 18 & 18 \\ -6 & -9 & -9 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ **55.** $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -5 & -7 & -9 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ **56.** $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -3 & -4 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

57. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & -6 & -4 \\ 3 & 13 & 8 \end{pmatrix}$ **58.** $\begin{pmatrix} 7 & 10 & 12 \\ -12 & -19 & -24 \\ 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}$ **59.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ **60.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

Составитель________ ГК Пак

20 мая 2016 года

Экзаменационные билеты

«Дальневосточный федеральный университет»

Школа **естественных наук**

ООП 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Дисциплина Алгебра

Форма обучения очная. Семестр осенний

Реализующая кафедра алгебры, геометрии и анализа

Экзаменационный билет № 1

1. Докажите теорему о минорах и алгебраических дополнениях
2. Докажите, что модуль суммы комплексных чисел не превосходит суммы модулей

   Задачи. Докажите, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет рациональных корней, если p и q – нечётны.

Докажите, что если $2^n - 1$ - простое число, то и n – простое число.

Экзаменационный билет № 2

1. Выведите формулу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме
2. Докажите, что если каждый элемент столбца определителя равен сумме двух чисел, то определитель равен сумме двух определителей.

Задачи. Докажите: $a = bq + c \Rightarrow (a,b) = (b,c)$.

Разложите на множители над R многочлен $x^5 + x + 1$

Экзаменационный билет № 3

1. Докажите, что характеристический многочлен транспонированной матрицы совпадает с характеристическим многочленом самой матрицы.
2. Выведите формулу корней из комплексного числа

Задачи. Докажите, что если a кратно b, то $(a,b) = b$.

Решите уравнение $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$

Экзаменационный билет № 4

1. Мультипликативная группа всех корней из 1.
2. Докажите, что определитель не изменится, если к столбцу прибавить другой, умноженный на число.

Задачи. Докажите, что если $f(0) \cdot f(1)$ нечётно, то нет целых корней многочлена с целыми коэффициента $f(x)$. Решите сравнение $x^2 \equiv 10 (\mathrm{mod}\, 13)$.

Экзаменационный билет № 5

1. Докажите, что если многочлен $f(x)$ делится на каждый из взаимно простых многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то $f(x)$ делится и на их произведение.
2. Вычислите определитель Ван-дер-Монда

Задачи. Докажите, что $p = 6t \pm 1$ для простого числа $p > 3$. Решите $|z - i| = |z + 2|$.

Экзаменационный билет № 6

1. Докажите, что корень из 1 первообразный тогда и только тогда, когда его степень взаимно проста с номером.
2. Вычислите определитель произведения матриц

Задачи. Докажите: $\forall a, b \in N \quad (a,b) = (5a + 3b, 13a + 8b)$.

Разложите на линейные множители $x^4 - 5x^2 + 6$

Экзаменационный билет № 7

1. Поле отношений. Теорема о представлении рациональной функции в виде многочлена и правильной дроби.
2. Сформулируйте и докажите свойства умножения матриц

Задачи. Найдите все простые числа p, для которых $14p^2 + 1$ простое.

Вычислите $\sqrt{-3 + 4i}$.

Экзаменационный билет № 8

1. Докажите, что все векторы образуют кольцо.
2. Докажите, что вычисление определителя $n-$ го порядка можно свести к вычислению нескольких определителей порядка k и $n-k$.

   Задачи. Докажите, что $(a,b)=1, (c,b)=1 \Rightarrow (ac,b)=1.$

   Найдите все значения $a,$ для которых на отрезке $[-1;1]$ имеется ровно 3 разных корня уравнения $4a^2x^4+(2a-8)x^2+|a|+a=0.$

Экзаменационный билет № 9

1. Докажите критерий того, что корень из 1 первообразный
2. Докажите, что все перестановки n-ой степени можно расположить так, что каждая следующая получена из предыдущей с помощью одной транспозиции.

Задачи. Докажите, что над полем Q многочлен неприводим $x^{109}-9$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix} = ?.$$

Экзаменационный билет № 10

1. Взаимно простые числа. Докажите теорему Евклида
2. Поле рациональных функций. Докажите теорему об f/gh

   Задачи. Представить в тригонометрическом виде $-\sqrt{3}-i.$

   Если в все элементы столбца определителя равны 1, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю. Докажите.

Экзаменационный билет № 11

1. Сформулируйте и докажите признак неприводимости многочлена над Z .
2. Простые числа. Докажите бесконечность их числа.

   Задачи. . $\sqrt[6]{-27}=?$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} = ?$$

Экзаменационный билет № 12

1. Докажите, что произведение ненулевых многочленов над полем не равно нулю.
2. Вычислите определитель ступенчатой матрицы

Задачи. Решите систему $z + 2w = 1 + i, 3z + iw = 2 - 3i$.

Докажите, что если $2^n + 1$ - простое число, то $n = 2^k$

Экзаменационный билет № 13

1. Докажите теорему о ЛПНОД двух многочленов № 3.
2. Алгоритм вычисления обратной матрицы

Задачи. Вычислите $(1 + \cos \pi / 3 + i \sin \pi / 3)^6 = ?$ Решите сравнение $19x \equiv 20 mod 121$.

Экзаменационный билет № 14

1 Докажите, что многочлены над полем вещественных чисел разложимы на линейные и квадратные множители

2 Докажите, что ранг суммы матриц не превосходит суммы рангов этих матриц.

Задачи. Вычислите $\sqrt[3]{-2 - 2i}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Экзаменационный билет № 15

1. Докажите, что ранги эквивалентных матриц равны.
2. Сформулируйте и докажите теорему о линейном представлении НОД n многочленов.

Задачи. $\frac{(1+i\sqrt{3})^{3n}}{(1+i)^{4n}} = ?$ Решите сравнение $165x \equiv 99 mod 319$.

Экзаменационный билет № 16

1. Докажите, что симметрический многочлен является многочленом от элементарных симметрических функций с коэффициентами из этого же поля.
2. Докажите Малую теорему Ферма

Задачи. Докажите, что $x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x\cos 72^0 + 1)(x^2 - 2x\cos 144^0 + 1)$

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = ?$$

Экзаменационный билет № 17

1. Докажите, что кольцо классов вычетов по простому модулю – поле.

2. Представление рациональной дроби в виде суммы простейших

Задачи. Приведите к тригонометрическому виду $1 - cosx - isinx$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = ?$$

Экзаменационный билет № 18

1. Докажите, что группа подстановок некоммутативна

2. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами, приводимый над полем Q, приводим над кольцом Z.

Задачи. В определителе порядка *n* найдите количество миноров порядка *k*.
Найдите произведение всех корней $n -$ ой степени из 1.

Экзаменационный билет № 19

1. Вычислите произведение матрицы и присоединённой матрицы.

2. Докажите, что рациональную дробь можно представить в виде многочлена и правильной рациональной дроби единственным образом.

Задачи. . Решите уравнение $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + 1 & \cdots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 & \cdots & x_n^2 + x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{vmatrix} = ?$$

Экзаменационный билет № 20

1. Докажите, что многочлен с комплексными коэффициентами над C представим в виде произведения линейных множителей

2. Сформулируйте и докажите теорему о ЛПНОД n целых чисел.

Задачи. Найдите все корни n —ой степени из комплексного числа

Докажите, что сумма всех алгебраических дополнений определителя не изменится, если ко всем элементам прибавить одно и то же число.

Экзаменационный билет № 21

1. Докажите, что рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной дроби, и притом единственным образом.

2. Докажите, что элементарное преобразование равносильно умножению на матрицу.
Задачи. Остаток от деления 593^{100} на 277?

Вычислите сумму всех корней n–ой степени из 1.

Экзаменационный билет № 22

1. Алгоритм вычисления рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами
2. Докажите, что число первообразных корней степени n из 1 равно $\varphi(n)$.

Задачи. Докажите, что $(AB)^T = B^T A^T$

Экзаменационный билет № 23

1. Вычислите определитель произведения матриц .

2. Докажите теорему о ЛПНОД двух многочленов № 2.

Задачи. Найдите остаток от деления 14147^{100} на 277.

Изобразите на плоскости множество точек, для которых $|Rez + Imz| < 1$.

Экзаменационный билет № 24

1. Вычислите произведение всех корней n–ой степени из 1.

2. Докажите, что постоянный множитель элементов столбца определителя выносится за знак определителя

Задачи. Решите уравнение $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$.
Разложите на линейные множители $x^6 + 27$.

Экзаменационный билет № 25

1. Если $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, то $f(m)$ делится на $p - mq$ для любого рационального корня $\frac{p}{q}$ и любого целого числа m. Докажите.

2. Докажите, что если строчка матрицы – линейная комбинация остальных, то её определитель равен нулю.

Задачи. Найдите число первообразных корней из 1 степени 24.
Определите чётность перестановки $(n\ n-1\ n-3 \ldots 3\ 2\ 1)$

Экзаменационный билет № 26

1. Докажите, что если ε – первообразный корень степени n из 1, то и $\bar{\varepsilon}$ тоже первообразный корень степени n из 1
2. Докажите, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Задача При каких a кратность корня –1 многочлена $x^5 - -ax^2 - ax + 1$ не ниже второй?
Решите $x^2 + (5 - 2i)x + 5(1 - i) = 0$.

Экзаменационный билет № 27

1. Докажите теорему Виета для многочлена с комплексными коэффициентами.

2. Докажите, что если столбец матрицы – линейная комбинация остальных, то её определитель равен нулю.

3. Задачи. Выразите в радикалах корни из 1 степени 8.
   Найдите каноническое представление числа 45!

Экзаменационный билет № 28

1. Докажите, что если к столбцу прибавить линейную комбинацию остальных, то определитель не изменится.

2. Докажите, что порядок корня ε_k степени *n* из 1 равен $\frac{n}{d}$, где $d = (n; k)$.

3. Задачи. Разложите на линейные множители $x^{2n} + x^n + 1$.
   Найдите сумму первообразных корней из 1 степени *p.*

Экзаменационный билет № 29

1. Докажите, что если произведение многочленов делится на неприводимый многочлен *p,* то и один из сомножителей делится на *p.*

2. Докажите, что произведение слагаемого минора на слагаемое его алгебраического дополнения есть слагаемое исходного определителя.

Задачи. $\varphi(66300) = ?$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ?\ .$$

Экзаменационный билет № 30

1. Если в определителе поменять местами два столбца, то знак определителя изменится на противоположный. Докажите.

2. Докажите, что многочлен с комплексными коэффициентами степени *n* имеет ровно *n* корней.

Задачи. Докажите, что многочлен неприводим над полем рациональных чисел $x^{105} - 9$.
Найдите сумму всех делителей числа 500500.

Экзаменационный билет № 31

1. Вычислите определитель треугольной матрицы.

2. Докажите, что многочлен, неприводимый над полем рациональных чисел, не может иметь кратных комплексных корней.

Задачи. Решите систему $x \equiv 4 mod 15, x \equiv 1 mod 12, x \equiv 7 mod 14$.

Является ли корнем из 1 число $\frac{2+i}{2-i}$?

Экзаменационный билет № 32

1. Докажите, что постоянный множитель элементов строчки определителя выносится за знак определителя.

2. Докажите теорему о делении с остатком для многочленов над полем.

Задачи. Множество точек $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = t, t \in R$?

Докажите, что многочлен неприводим над полем рациональных чисел $x^4 - 10x^2 + 1$.

Экзаменационный билет № 33

1. Остаток от деления многочлена f на *x-c* равен *f(c)*. Докажите.

2. Докажите, что произведение слагаемого минора на слагаемое его алгебраического дополнения равно слагаемому определителя.

Задачи. Найдите порядки корней из 1 степени 15.

Докажите, что $m^5 - m$ делится на 30. $m \in Z$.

Экзаменационный билет № 34

1. Докажите, что если $A^T = A^{-1}$, $B^T = B^{-1}$, то $(AB)^T = (AB)^{-1}$

2. Докажите, что правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших

Задачи. Решите систему $x \equiv 3mod7, x \equiv 5mod11, x \equiv 13mod17$.

$(1 + cos\alpha + isin\alpha)^n = ?$

Экзаменационный билет № 35

1. Если к строчке прибавить линейную комбинацию остальных, то определить не изменится.

2. Докажите, что множество всех корней из 1 образует мультипликативную группу.

Задачи. Найдите все рациональные корни многочлена $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$

Изобразите на плоскости множество точек $z = \frac{1+ti}{1-ti}, t \in R$.

Экзаменационный билет № 36

1. Если к столбцу прибавить линейную комбинацию остальных, то определить не изменится.

2. Докажите, что многочлен с комплексными коэффициентами представим в виде произведения линейных множителей

Задачи. Изобразите на плоскости множество точек, для которых $-1 < Reiz < 0$.

Найдите две последние цифры числа 243^{802}.

Экзаменационный билет № 37

1. Докажите, что при элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

2. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Задачи. Изобразите на плоскости множество точек, для которых $|z+3+4i| \leq 5$.

Найдите остаток от деления $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$.

Экзаменационный билет № 38

1. Докажите, что если все элементы строчки квадратной матрицы умножить на число, то и определитель матрицы умножится на это число.
2. Докажите, что НОД многочленов делится на любой общий делитель этих многочленов.

Задачи. Решите сравнение $23x \equiv 13 mod 625$.

Изобразите на плоскости множество точек, для которых $|Imz| < 1$.

Экзаменационный билет № 39

1. Докажите, что если все элементы столбца квадратной матрицы умножить на число, то и определитель матрицы умножится на это число.

2. Докажите, что над всяким полем существует бесконечно много неприводимых многочленов.

Задачи. Докажите, что $mn(m^4 - n^4)$ делится на 30. $m, n \in Z$.

Изобразите на плоскости множество точек, для которых $|z-1| + |z+1| < 3$.

Экзаменационный билет № 40

1. Сформулируйте и докажите теорему о ЛПНОД($f_1, f_2, \ldots, f_n$)

2. Докажите, что при транспонировании матрицы её определитель не меняется.

Задачи. НОД(84; 177)=?

Изобразите на плоскости множество точек, для которых $|z+2| - |z-2| = 3$.

Экзаменационный билет № 41

1. Если в определителе поменять местами две строчки, то знак определителя изменится на противоположный. Докажите.

2. Докажите, что если *x* пробегает полную системы вычетов, то и $ax + b$ тоже пробегает полную систему вычетов по этому же модулю.

Задачи. Разложите на линейные множители $z^4 - 12z^2 + 64 = 0$.

Изобразите на плоскости множество точек, для которых $|z-2| = Rez + 2$.

Экзаменационный билет № 42

1. Докажите, что ранг матрицы, полученной приписыванием к матрице *A* матрицы *B*, не превосходит суммы рангов этих матриц.

2. Докажите теорему Эйлера

Задача. Разложите на линейные множители $z^4 - 12z^2 + 64 = 0$.

Изобразите на плоскости множество точек, для которых $1 \leq |z - 2i| < 2$.

Экзаменационный билет № 43

1. Докажите, что обе части сравнения можно сокращать на множитель, взаимно простой с модулем

2. С каким знаком входит в определитель произведение элементов побочной диагонали?

Задачи. Докажите, что $1^{17} + 3^{17} + 5^{17} + 9^{17} + 11^{17} + 13^{17}$ делится на 14. $\sqrt[3]{343i} =?$

Экзаменационный билет № 44

1. Как изменится определитель, если строчки записать в обратном порядке?

2. Найдите число всех подстановок *n*-ой степени

Задачи. Докажите, что $1^{13} + 5^{13} + 7^{13} + 11^{13}$ делится на 12.

Решите уравнение $\overline{z} = -z$.

Экзаменационный билет № 45

1. Как изменится определитель, если столбцы записать в обратном порядке?

2. Докажите, что если fg делится на h, $(f, h) = 1, \text{то } g$ делится на h.

Задачи. $\sqrt{-5 - 11i} =?$

Докажите, что простое число $p > 3$ можно представить в виде $6t \pm 1$

Экзаменационный билет № 46

1. Докажите, что первообразный корень из 1 является образующим элементом циклической группы всех корней $n-$ ой степени из 1.

2. Докажите, что если миноры взаимно дополнительны, то для них суммы номеров вычеркнутых строк и столбцов имеют одинаковую чётность.

Задачи. Найдите все a и b, для которых $f = 6x^4 - x^3 + ax^2 + bx + b$ делится на $g = x^2 - 4$.

$\sqrt{11 + 60i} =?$

Экзаменационный билет № 47

1. Как изменится определитель, если первый столбец поставить последним?

2. Докажите, что рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби и притом единственным образом.

Задачи. Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 5, находящихся между m и n $(m < n)$

$$\frac{(11-3i)^2+(2-6i)^3}{(8-i)^2-(1-i)^3} = ?$$

Экзаменационный билет № 48

1. Докажите, что $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
2. Докажите, что если x пробегает приведённую системы вычетов, то и ax тоже пробегает приведённую систему вычетов по этому же модулю.

Задачи. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2 + (1-a) + a = 0$ положительны

Выразите sin^3x через тригонометрические функции кратных углов.

Экзаменационный билет № 49

1. Докажите, что сравнения можно почленно перемножать.

2. Вычислите определитель Ван-дер-монда.

Задачи. Разложите на линейные множители $z^4 - 12z^2 + 25 = 0$.

$$\sqrt[3]{8i} = ?$$

Экзаменационный билет № 50

1. Докажите, что умножение матриц ассоциативно

2. Докажите, что если ab делится на c и , $(b, c) = 1$, то a делится на c.

Задачи. Приводим ли многочлен $x^6 + 27$ над R?

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{24} = ?$$

Экзаменационный билет № 51

1. Как изменится определитель, если первую сточку поставить последней?

2. Докажите, что векторы образуют кольцо некоммутативное, неассоциативное, без единицы и с делителями нуля.

Задачи. Многочлен $x^6 + 27$ представьте в виде произведения линейных множителей

Докажите, что $\sqrt{21-20i} = \pm(5-2i)$.

Экзаменационный билет № 52

1. Докажите, что матрица, транспонированная для суммы, равна сумме матриц, транспонированных для слагаемых

2. Докажите, что если $ak \equiv bk(mod\ m)$ и $(k, m) = 1$, то $a \equiv b(mod\ m)$.

Задачи. Перечислите все делители второго порядка многочлена $x^6 + 27$

$$(1 + cosa - isin\alpha)^n = ?$$

Экзаменационный билет № 53

1. Докажите свойства обратной матрицы

2. Докажите, что $a \equiv bmod\ m \Leftrightarrow a - b$ делится на m

Задачи. Докажите, что произведение примитивных многочленов – примитивный многочден.

$$\frac{(2+i)(3-2i)-3i^{10}}{(2-i)^2-1+2i} = ?3.$$

Педагогические тестовые материалы для проверки остаточных знаний по

АЛГЕБРЕ

Направление 01.03.02 Прикладная математики и информатика

Составитель: Г. К. Пак

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬН ОГО ОТВЕТА

Вариант 1

1. ЕСЛИ СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n ЗАПИСАТЬ В ОБРАТНОМ ПОРЯДКЕ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль <u>3)</u> умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ЕСЛИ ДЛЯ ВСЕХ $a, b \in A$ ВЫПОЛНЯЕТСЯ УСЛОВИЕ $ab = ba$, ТО КОЛЬЦО A НАЗЫВАЕТСЯ

<u>1)</u> коммутативным 2) некоммутативным 3) ассоциативным 4) неассоциативным

5) с делителями нуля

3. ЕСЛИ $(\forall a, b \in A)(\exists ab \in A)$, ТО

1) выполняется закон коммутативности умножения в A

2) выполняется закон ассоциативности умножения в A

<u>3)</u> на множестве A определено умножение

4) в A существует нейтральный элемент

5) для любого элемента A существует обратный

4. $\sqrt{2i} =$

1) $\pm(1+i)$ 2) $-(1+i)$ 3) $+(1+i)$ 4) $2i$ 5) не существует

5. ЕСЛИ ИЗ ТОГО, ЧТО ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ РАВНА НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ, СЛЕДУЕТ, ЧТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РАВНЫ НУЛЮ, ТО ВЕКТОРЫ НАЗЫВАЮТСЯ

1) линейно зависимыми   2) линейно независимыми   3) системой образующих

4) базисом   5) ортогональными

6. МНОЖЕСТВО $\{a \in V \mid \varphi a = \theta\}$ НАЗЫВАЕТСЯ

1) суммой подпространств   2) рангом линейного оператора   3) образом линейного оператора   4) ядром линейного оператора   5) нулевым подпространством

7. ЕСЛИ КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ОДНОЗНАЧНО ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ $e_1, \dots, e_n$, ТО $e_1, \dots, e_n$, – ЭТО

1) система образующих 2) базис   3) координаты   4) линейная оболочка
5) ортогональная система

8. ЛЮБУЮ РАЦИОНАЛЬНУЮ ДРОБЬ МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ, И ПРИТОМ ЕДИНСТВЕННЫМ ОБРАЗОМ, В ВИДЕ СУММЫ МНОГОЧЛЕНА И

1) простейшей дроби   2) симметрического многочлена   3) правильной дроби
4) неправильной дроби 5) квадратичной формы

9. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ ЧИСЕЛ 321 И 843 РАВЕН

1)   2) 4   3) 1   4) 2   5) 3

10. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНА ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА РАНГ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ РАВЕН РАНГУ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ. ЭТО – ТЕОРЕМА

1) Крамера   2) Гаусса   3) Кронекера-Капелли

4) Ван-дер-Монда   5) Лагранжа

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 2

1. ЕСЛИ ПЕРВЫЙ СТОЛБЕЦ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ПЕРЕСТАВИТЬ НА ПОСЛЕДНЕЕ МЕСТО, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

<u>4)</u> умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ЕСЛИ СУЩЕСТВУЮТ $a, b \in A$, ДЛЯ КОТОРЫХ $ab \neq ba$, ТО КОЛЬЦО A НАЗЫВАЕТСЯ

1) коммутативным <u>2)</u> некоммутативным 3) ассоциативным 4) неассоциативным

5) с делителями нуля

3. ЕСЛИ $(\forall a, b \in A)(ab = ba)$, ТО

<u>1)</u> выполняется закон коммутативности умножения в A

2) выполняется закон ассоциативности умножения в A

3) на множестве A определено умножение

4) в A существует нейтральный элемент

5) для любого элемента A существует обратный

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА 1

<u>1)</u> $\cos 0 + i\sin 0$ 2) $\cos\pi + i\sin\pi$ 3) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ 4) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

5. ЕСЛИ ЛЮБОЙ ВЕКТОР ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ СИСТЕМЫ, ТО СИСТЕМА ЯВЛЯЕТСЯ

1) линейно зависимой 2) линейно независимой <u>3)</u> системой образующих

4) базисом 5) ортогональной

6. МНОЖЕСТВО $\{y \in V \mid (\exists x \in V)(\varphi x = y)\}$ НАЗЫВАЕТСЯ

1) суммой подпространств 2) дефектом линейного оператора <u>3)</u> образом линейного оператора 4) ядром линейного оператора 5) нулевым подпространством

7. ЕСЛИ КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ $e_1, \dots, e_n$, ТО $e_1, \dots, e_n$, – ЭТО

1) координаты 2) базис <u>3)</u> система образующих 4) линейная оболочка
5) ортогональная система

8. ЛЮБУЮ РАЦИОНАЛЬНУЮ ДРОБЬ МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ, И ПРИТОМ ЕДИНСТВЕННЫМ ОБРАЗОМ, В ВИДЕ СУММЫ ПРАВИЛЬНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ И

1) простейшей дроби 2) многочлена 3) правильной дроби 4) неправильной дроби 5) квадратичной формы

9. НАЙДИТЕ НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ a И b, ЕСЛИ $ab = 600$

1) 8 2) 10 3) 12 4) 14 5) 18

10. ЕСЛИ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНА ТО РАНГ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ РАВЕН РАНГУ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ. ЭТО – ТЕОРЕМА

1) существования 2) критерий 3) единственности

4) достаточная 5) необходимая

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 3

1. ЕСЛИ ПЕРВУЮ СТРОКУ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n ПЕРЕСТАВИТЬ НА ПОСЛЕДНЕЕ МЕСТО, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ЕСЛИ ДЛЯ ВСЕХ ОТЛИЧНЫХ ОТ НУЛЯ $a, b \in A$ ВЫПОЛНЯЕТСЯ УСЛОВИЕ $ab \neq 0$, ТО КОЛЬЦО A НАЗЫВАЕТСЯ КОЛЬЦОМ

1) с 1 2) без 1 3) без делителей нуля 4) с сокращением 5) с делителями нуля

3. ЕСЛИ $(\forall a, b \in A)(\exists ab \in A)$, ТО

1) выполняется закон коммутативности умножения в A

2) выполняется закон ассоциативности умножения в A

3) множестве A замкнуто относительно умножения

4) в A существует нейтральный элемент

5) для любого элемента A существует обратный

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА i ЕСТЬ

1) $\cos 0 + i \sin 0$ 2) $\cos \pi + i \sin \pi$ 3) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ 4) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

5. МАКСИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМАЯ СИСТЕМА ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА НАЗЫВАЕТСЯ

1) линейно зависимой 2) ортонормированной 3) системой образующих

4) базисом 5) ортогональной

6. ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА-КЭЛИ

1) система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы

2) любую квадратичную форму с помощью невырожденного линейного преобразования можно привести к каноническому виду

3) определитель произведения матриц равен произведению определителей

4) линейный оператор является корнем своего характеристического уравнения

5) корни характеристического многочлена и только они – собственные значения линейного оператора

7. ЕСЛИ КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЛИНЕЙНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ $e_1, \ldots, e_n$, ТО ЭТО ПОДПРОСТАНСТВО –

1) линейная оболочка 2) несобственное 3) пустое 4) ортогональное дополнение 5) ортогональная система

8. ЛЮБУЮ ПРАВИЛЬНУЮ РАЦИОНАЛЬНУЮ ДРОБЬ МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ, И ПРИТОМ ЕДИНСТВЕННЫМ ОБРАЗОМ, В ВИДЕ СУММЫ

1) неправильных дробей 2) симметрических многочленов 3) простых дробей 4) простейших дробей 5) квадратичных форм

9. НА КАКИЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА МОЖНО СОКРАТИТЬ ДРОБЬ $\frac{3m-n}{5n+2n}$, ЕСЛИ ДРОБЬ СОКРАТИМА, А ЧИСЛА m И n ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ

1) 2 2) 3 3) 17 4) 23 5) 34

10. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНА ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА РАНГ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ РАВЕН РАНГУ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ. ЭТО – ТЕОРЕМА

1) необходимая 2) достаточная 3) обратная 4) единственности 5) существования

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 4

1. ЕСЛИ СТОЛБЦЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ЗАПИСАТЬ В ОБРАТНОМ ПОРЯДКЕ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль <u>3)</u> умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ЕСЛИ ДЛЯ ВСЕХ $a, b, c \in A$ ВЫПОЛНЯЕТСЯ УСЛОВИЕ $(ab)c = a(bc)$, ТО КОЛЬЦО A НАЗЫВАЕТСЯ

1) коммутативным 2) некоммутативным <u>3)</u> ассоциативным 4) неассоциативным

5) с делителями нуля

3. ЕСЛИ $(\forall a \forall b \forall c \in A)(a(bc) = (ab)c)$, ТО

1) выполняется закон коммутативности умножения в A

<u>2)</u> выполняется закон ассоциативности умножения в A

3) на множестве A определено умножение

4) в A существует нейтральный элемент

5) для любого элемента A существует обратный

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА -1 - ЭТО

1) $\cos 0 + i \sin 0$ <u>2)</u> $\cos \pi + i \sin \pi$ 3) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ 4) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

5) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

5. ЕСЛИ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ РАВНО НУЛЮ, ТО ВЕКТОРЫ НАЗЫВАЮТСЯ

1) линейно зависимыми 2) линейно независимыми 3) системой образующих

4) базисом <u>5)</u> ортогональными

6. ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА-КЭЛИ

1) система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы

2) любую квадратичную форму с помощью невырожденного линейного преобразования можно привести к каноническому виду

3) определитель произведения матриц равен произведению определителей

4) матрица является корнем своего характеристического уравнения

5) корни характеристического многочлена и только они – собственные значения линейного оператора

7. ЕСЛИ КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ОДНОЗНАЧНО ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ $e_1, \dots, e_n$, ТО КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ – ЭТО

1) система образующих 2) базис) 3) линейная оболочка 4) координаты векора 5) ортогональная система

8. ПРИ КАКОМ p МНОГОЧЛЕН $x^3 + px - 1$ ДЕЛИТСЯ НА $x^2 - x - 1$

1) –3 2) –2 3) –1 4) 0 5) 1

9. НА КАКОЕ КОЛИЧЕСТВО НУЛЕЙ ЗАКАНЧИВАЕТСЯ ЧИСЛО 100! ?

1) 20 2) 21 3) 23 4) 24 5) 25

10. ЕСЛИ РАНГ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВЕН РАНГУ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ, ТО СИСТЕМА СОВМЕСТНА. ЭТО – ТЕОРЕМА

1) критерий 2) необходимая 3) противоположная 4) достаточная 5) существования

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 5

1. ЕСЛИ КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n ЗАМЕНИТЬ НА ЭЛЕМЕНТ, СИММЕТРИЧНЫЙ С НИМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ЕСЛИ ДЛЯ ВСЕХ $a, b, c \in A$ ВЫПОЛНЯЕТСЯ УСЛОВИЕ $a(bc) = (ab)c$, ТО КОЛЬЦО A НАЗЫВАЕТСЯ

1) коммутативным 2) некоммутативным 3) ассоциативным 4) неассоциативным

5) с делителями нуля

3. ЕСЛИ $(\exists e \in A)(\forall a \in A)(ae = a)$, ТО

1) выполняется закон коммутативности умножения в A

2) выполняется закон ассоциативности умножения в A

3) на множестве A определено умножение

4) в A существует левый нейтральный элемент

5) в A существует правый нейтральный элемент

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА $-i$ ЕСТЬ

1) $\cos 0 + i\sin 0$ 2) $\cos\pi + i\sin\pi$ 3) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ 4) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

5. ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ НЕТРИВИАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ, ТО ВЕКТОРЫ НАЗЫВАЮТСЯ

1) линейно зависимыми 2) линейно независимыми 3) системой образующих

4) базисом 5) ортогональными

6. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ

1) система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы

2) любую квадратичную форму с помощью невырожденного линейного преобразования можно привести к каноническому виду

3) определитель произведения матриц равен произведению определителей

4) линейный оператор является корнем своего характеристического уравнения

5) корни характеристического многочлена и только они – собственные значения линейного оператора

7. ЕСЛИ КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ОДНОЗНАЧНО ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ $e_1, \dots, e_n$, ТО n – ЭТО

1) степень подпространства 2) дефект 3) сигнатура 4) ранг
5) размерность подпространства

8. ПРИ КАКОМ p МНОГОЧЛЕН $x^3 + px + 1$ ДЕЛИТСЯ НА $x^2 + x - 1$

1) –4 2) –3 3) –2 4) –1 5) 0

9. СКОЛЬКО РАЗЛИЧНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ИМЕЕТ ЧИСЛО $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$?

1) 32 2) 27 3) 16 4) 10 5) 5!

10. ЕСЛИ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ИМЕЕТ РЕШЕНИЕ, ТО ОНА НАЗЫВАЕТСЯ

1) определённой 2) неопределённой 3) совместной
4) однородной 5) несовместной

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 6

1. ЕСЛИ К СТРОКЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ПРИБАВИТЬ ЛИНЕЙНУЮ КОМБИНАЦИЮ ДРУГИХ СТРОК, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ЕСЛИ СУЩЕСТВУЮТ $a,b,c \in A$, ДЛЯ КОТОРЫХ $(ab)c \neq a(bc)$, ТО КОЛЬЦО A НАЗЫВАЕТСЯ

1) коммутативным 2) некоммутативным 3) ассоциативным 4) неассоциативным

5) с делителями нуля

3. ЕСЛИ $(\exists e \in A)(\forall a \in A)(ea = a)$, ТО

1) выполняется закон коммутативности умножения в A

2) выполняется закон ассоциативности умножения в A

3) на множестве A определено умножение

4) в A существует левый нейтральный элемент

5) в A существует правый нейтральный элемент

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА $1+i$

1) $\cos 0 + i \sin 0$ 2) $\cos \pi + i \sin \pi$ 3) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ 4) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

5. БАЗИСОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА НАЗЫВАЕТСЯ

1) максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства

2) система образующих линейного пространства

3) ортогональная система векторов линейного пространства

4) ортонормированная система векторов линейного пространства

5) нормированная система векторов линейного пространства

6. ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

1) система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы

2) сумма произведений всех миноров порядка κ, расположенных на фиксированных κ строках, на их алгебраические дополнения равна определителю

3) определитель произведения матриц равен произведению определителей

4) линейный оператор является корнем своего характеристического уравнения

5) корни характеристического многочлена и только они – собственные значения линейного оператора

7. ЕСЛИ КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ $e_1, \ldots, e_n$, ТО n – ЭТО

1) размерность 2) ранг 3) дефект 4) характеристика 5) число образующих

8. ПРИ КАКОМ q МНОГОЧЛЕН $x^4 - 2x^2 + q$ ДЕЛИТСЯ НА $x^2 + 2x + 1$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) –1

9. НАЙДИТЕ ВСЕ ТАКИЕ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА p, ДЛЯ КОТОРЫХ $p + 10$ И $p + 14$ – ТОЖЕ ПРОСТЫЕ

1) 13 2) 11 3) 7 4) 5 5) 3

10. ЕСЛИ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЙ, ТО ОНА НАЗЫВАЕТСЯ

1) определённой 2) неопределённой 3) совместной
4) однородной 5) несовместной

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 7

1. ЕСЛИ К СТОЛБЦУ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n ПРИБАВИТЬ ЛИНЕЙНУЮ КОМБИНАЦИЮ ОСТАЛЬНЫХ СТОЛБЦОВ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ЕСЛИ СУЩЕСТВУЮТ $a, b, c \in A$, ДЛЯ КОТОРЫХ $a(bc) \neq (ab)c$, ТО КОЛЬЦО A НАЗЫВАЕТСЯ

1) коммутативным 2) некоммутативным 3) ассоциативным 4) неассоциативным

5) с делителями нуля

3. ЕСЛИ $(\exists e \in A)(\forall a \in A)(ae = ea = a)$, ТО

1) выполняется закон коммутативности умножения в A

2) выполняется закон ассоциативности умножения в A

3) на множестве A определено умножение

4) в A существует нейтральный элемент

5) для каждого элемента из A существует обратный элемент

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА $-1+i$

1) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ 2) $\cos\pi + i\sin\pi$ 3) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ 4) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

5. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА – ЭТО КОЛИЧЕСТВО ВЕКТОРОВ

1) в системе образующих 2) в линейно независимой системе образующих 3) в ортогональной системе 4) в ортонормированной системе 5) в линейном пространстве

6. ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

1) система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы

2) сумма произведений всех миноров порядка *к*, расположенных на фиксированных *к* столбцах, на их алгебраические дополнения равна определителю

3) определитель произведения матриц равен произведению определителей

4) линейный оператор является корнем своего характеристического уравнения

5) корни характеристического многочлена и только они – собственные значения линейного оператора

7. ЕСЛИ КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ОДНОЗНАЧНО ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ $e_1, \dots, e_n$, ТО КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ – ЭТО

1) базис 2) система образующих 3) сигнатура 4) ранг 5) координаты вектора

8. ПРИ КАКОМ q МНОГОЧЛЕН $x^4 - 2x^2 + q$ ДЕЛИТСЯ НА $x^2 - 2x + 1$

1) –1 2) –2 3) 3 4) 2 5) 1

9. НАЙДИТЕ ВСЕ ТАКИЕ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА p, ДЛЯ КОТОРЫХ $8p^2 + 1$ ТОЖЕ ПРОСТОЕ

1) 13   2) 11   3) 7   4) 5   5) 3

10. ЕСЛИ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ИМЕЕТ ЕДИНСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ, ТО ОНА НАЗЫВАЕТСЯ

1) совместной   2) неопределённой   3) определённой
4) однородной   5) несовместной

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 8

1. ЕСЛИ ВТОРУЮ СТРОКУ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ЗАМЕНИТЬ НА ПЕРВУЮ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится   2) обратится в нуль   3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ЕСЛИ ДЛЯ ВСЕХ $a \in A$ ВЫПОЛНЯЕТСЯ УСЛОВИЕ $a1 = 1a = a$, ТО КОЛЬЦО *A* НАЗЫВАЕТСЯ

1) унитарным   2) без 1   3) ассоциативным   4) кольцом без делителей нуля

5) кольцом с делителями нуля

3. ЕСЛИ $(\forall a \in A)(\exists a' \in A)(aa' = e)$, ТО

1) выполняется закон коммутативности умножения в *A*

2) выполняется закон ассоциативности умножения в *A*

3) на множестве *A* определено умножение

4) в *A* существует левый нейтральный элемент

5) в *A* существует правый обратный элемент для *a*

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА $-1-i$

1) $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$ 2) $\cos\pi + i\sin\pi$ 3) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ 4) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

5. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА – ЭТО КОЛИЧЕСТВО ВЕКТОРОВ

1) в системе образующих 2) в минимальной системе образующих 3) в ортогональной системе 4) в ортонормированной системе 5) в линейном пространстве

6. СВОЙСТВО ВЫПОЛНЯЕТСЯ НЕ ДЛЯ ВСЕХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1) $AB = BA$ 2) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$ 3) $(A+B)C=AC+BC$ 4) $A(B+C) = AB+AC$

5) $(AB)C= A(BC)$

7. ЕСЛИ ИЗ ТОГО, ЧТО ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ РАВНА НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ, СЛЕДУЕТ, ЧТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ НУЛИ, ТО ЭТИ ВЕКТОРЫ

1) линейно зависимы 2) линейно независимы 3) ортогональны 4) коллинеарны 5) нормированы

8. ПРИ КАКОМ m МНОГОЧЛЕН $x^4 + x^2 + 1$ ДЕЛИТСЯ НА $x^2 + mx + 1$

1) –1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 1

9. НАЙДИТЕ ТАКОЕ НАТУРАЛЬНОЕ n, ДЛЯ КОТОРОГО $10^n - 1$ ДЕЛИТСЯ НА 7

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5 5) 6

10. ЕСЛИ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ИМЕЕТ БОЛЬШЕ ОДНОГО РЕШЕНИЙ, ТО ОНА НАЗЫВАЕТСЯ

1) определённой 2) неопределённой 3) совместной
4) однородной 5) несовместной

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 9

1. ЕСЛИ ВТОРОЙ СТОЛБЕЦ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n ЗАМЕНИТЬ НА ПЕРВЫЙ СТОЛБЕЦ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ЕСЛИ НАЙДУТСЯ $a, b \in A$, ДЛЯ КОТОРЫХ $ab = 0; a \neq 0; b \neq 0,$, ТО КОЛЬЦО A НАЗЫВАЕТСЯ КОЛЬЦОМ

1) с 1 2) без 1 3) без делителей нуля 4) без сокращений

5) с делителями нуля

3. ЕСЛИ $(\forall a \in A)(\exists a' \in A)(a'a = e)$, ТО

1) выполняется закон коммутативности умножения в A

2) выполняется закон ассоциативности умножения в A

3) на множестве A определено умножение

4) в A существует левый обратный элемент для a

5) в A существует правый обратный элемент для a

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА 1

1) $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$ 2) $\cos\pi+i\sin\pi$ 3) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ 4) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

5. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА – ЭТО КОЛИЧЕСТВО ВЕКТОРОВ

1) в системе образующих 2) базисе 3) в ортогональной системе 4) в ортонормированной системе 5) в линейном пространстве

6. СВОЙСТВО ВЫПОЛНЯЕТСЯ НЕ ДЛЯ ВСЕХ МАТРИЦ

1) $AB = BA$ 2) $\lambda(AB)=(\lambda A)B$ 3) $(A+B)C=AC+BC$ 4) $A(B+C) = AB+AC$

5) $(AB)C= A(BC)$

7. ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ РАВНА НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ И НЕ ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ НУЛИ, ТОГДА ЭТИ ВЕКТОРЫ

1) собственные 2) линейно независимы 3) ортогональны 4) линейно зависимы 5) нормированы

8. ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ $x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ НА $x-1$ РАВЕН

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

9. НАЙДИТЕ ТАКОЕ НАТУРАЛЬНОЕ n, ДЛЯ КОТОРОГО 10^n-1 ДЕЛИТСЯ НА 13

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5 5) 6

10. ЕСЛИ В СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВСЕ СВОБОДНЫЕ ЧЛЕНЫ РАВНЫ НУЛЮ, ТО ОНА НАЗЫВАЕТСЯ СИСТЕМОЙ

1) однородной 2) неопределённой 3) совместной
4) крамеровского типа 5) несовместной

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 10

1. ЕСЛИ ПОМЕНЯТЬ МЕСТАМИ ПЕРВУЮ И ПОСЛЕДНЮЮ СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n, ТО ОН

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) изменит знак

2. АССОЦИАТИВНОЕ, КОММУТАТИВНОЕ КОЛЬЦО С 1, В КОТОРОМ ДЛЯ ЛЮБОГО НЕНУЛЕВОГО ЭЛЕМЕНТА СУЩЕСТВУЕТ ОБРАТНЫЙ, НАЗЫВАЕТСЯ

1) областью целостности 2) алгеброй 3) полем 4) группой 5) пространством

3. ЕСЛИ $(\forall a \in A)(\exists a' \in A)(aa' = a'a = e)$, ТО

1) выполняется закон коммутативности умножения в A

2) выполняется закон ассоциативности умножения в A

3) на множестве A определено умножение

4) в A существует левый нейтральный элемент

5) в A существует обратный элемент для a

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА 2

1) $2(\cos 0 + i\sin 0)$ 2) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$ 3) $2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ 4) $2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

5. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА – ЭТО КОЛИЧЕСТВО ВЕКТОРОВ

1) в системе образующих 2) в максимальной линейно независимой системе 3) в ортогональной системе 4) в ортонормированной системе 5) в линейном пространстве

6. $\ker A = \{\theta\} \Leftrightarrow$

1) существует обратный линейный оператор 2) A - нулевой линейный оператор

3) A – самосопряженный линейный оператор 4) A – ортогональный линейный оператор 5) A – кососимметричный линейный оператор

7. ЕСЛИ ИЗ ТОГО, ЧТО ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ РАВНА НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ, СЛЕДУЕТ, ЧТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ НУЛИ, ТО ЭТИ ВЕКТОРЫ ПОРОЖДАЮТ ПОДПРОСТРАНСТВО

1) нулевое 2) пустое 3) собственное 4) корневое 5) ненулевое

8. ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ НА $x + 1$ РАВЕН

1) –7 2) 0 3) 7 4) 14 5) 21

9. НАЙДИТЕ ТАКОЕ НАТУРАЛЬНОЕ n, ДЛЯ КОТОРОГО $10^n - 1$ ДЕЛИТСЯ НА 91

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5 5) 6

10. ЕСЛИ В СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАЙДЁТСЯ СВОБОДНЫЙ ЧЛЕН, ОТЛИЧНЫЙ ОТ НУЛЯ, ИМЕЕТ РЕШЕНИЕ, ТО ОНА НАЗЫВАЕТСЯ

1) определённой 2) неопределённой 3) совместной
4) неоднородной 5) несовместной

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 11

1. ЕСЛИ ПОМЕНЯТЬ МЕСТАМИ ПЕРВЫЙ И ПОСЛЕДНИЙ СТОЛБЦЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n, ТО ОН

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. МНОЖЕСТВО, ЗАМКНУТОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО АССОЦИАТИВНОЙ ОПЕРАЦИИ, В КОТОРОМ ЕСТЬ НЕЙТРАЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ, И ДЛЯ КАЖДОГО ЭЛЕМЕНТА НАЙДЕТСЯ ОБРАТНЫЙ, НАЗЫВАЕТСЯ

1) областью целостности 2) алгеброй 3) полем 4) группой 5) пространством

3. ЕСЛИ ОТОБРАЖЕНИЕ РАЗНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПЕРЕВОДИТ В РАЗНЫЕ, ТО ОНО НАЗЫВАЕТСЯ

1) биективным 2) сюръективным 3) тождественным 4) инъективным 5) взаимно обратным

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, МОДУЛЬ КОТОРЫХ 1, - ЭТО

1) прямая 2) интервал 3) луч 4) окружность 5) круг

5. РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА РАВЕН

1) рангу матрицы перехода от базиса линейного пространства к другому базису

2) рангу системы строк 3) количеству векторов в максимальной линейно независимой подсистеме 4) размерности всего линейного пространства 5) размерности ядра линейного оператора

6. $(\forall a, b \in V)((Aa, b) = (a, Ab)) \Leftrightarrow$

1) существует линейный оператор A^{-1} 2) A - нулевой линейный оператор

3) A – самосопряженный линейный оператор 4) A – ортогональный линейный оператор 5) A – кососимметричный линейный оператор

7. ЕСЛИ ИЗ ТОГО, ЧТО ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ РАВНА НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ, СЛЕДУЕТ, ЧТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ НУЛИ, ТО ЭТИ ВЕКТОРЫ ПОРОЖДАЮТ ПОДПРОСТРАНСТВО

1) пустое 2) несобственное 3) собственное 4) корневое 5) ненулевое

8. ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ НА $x - i$ РАВЕН

1) $13 - 8i$ 2) $5 - 8i$ 3) $13 - 4i$ 4) $5 - 4i$ 5) $5 + 4i$

9. НАЙДИТЕ ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА 5^{102} НА 103

1) 52 2) 8 3) 4 4) 2 5) 1

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. ЧЕМУ РАВНА РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5 5) 6

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 12

1. ЕСЛИ ВСЕ ЭЛЕМЕНТЫ СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ЗАМЕНИТЬ НА НУЛИ, ТО ОН

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ГРУППА, ДЛЯ ЛЮБЫХ ДВУХ ЭЛЕМЕНТОВ КОТОРОЙ ВЫПОЛНЯЕТСЯ РАВЕНСТВО $ab = ba$, НАЗЫВАЕТСЯ

1) аддитивной 2) абелевой 3) циклической 4) мультипликативной 5) конечной

3. ЕСЛИ ОТОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА A В B РАЗНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПЕРЕВОДИТ В РАЗНЫЕ, ТО ОНО НАЗЫВАЕТСЯ

1) взаимно однозначным отображением A на B

2) сюръективным отображением A на B

3) тождественным отображением множества A

4) взаимно обратным отображением A на B

5) взаимно однозначным отображением A в B

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, МОДУЛЬ КОТОРЫХ РАВЕН ДВУМ, - ЭТО

1) прямая 2) интервал 3) луч 4) окружность 5) круг

5. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА РАВНА

1) числу векторов в системе образующих

2) рангу матрицы перехода от одного базиса к другому

3) количеству векторов в ортогональной системе

4) рангу линейного оператора 5) рангу любой системы векторов

6. $(\forall a,b \in V)((Aa, Ab) = (a,b)) \Leftrightarrow$

1) существует линейный оператор A^{-1} 2) A - нулевой линейный оператор

3) A – самосопряженный линейный оператор 4) A – ортогональный линейный оператор 5) A – кососимметричный линейный оператор

7. ЕСЛИ ИЗ ТОГО, ЧТО ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ РАВНА НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ, СЛЕДУЕТ, ЧТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ НУЛИ, ТО ЭТИ ВЕКТОРЫ ПОРОЖДАЮТ ПОДПРОСТРАНСТВО

1) пустое 2) одноэлементное 3) собственное 4) бесконечномерное 5) ненулевое

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ РАВНА 1. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) –1 2) –2 3) –3 4) –4 5) –5

9. НАЙДИТЕ ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА 3^{104} НА 103

1) 9 2) 3 3) 8 3) 4 4) 2

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ СОДЕРЖИТ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5 5) 6

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 13

1. ЕСЛИ ВСЕ ЭЛЕМЕНТЫ СТОЛБЦА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n ЗАМЕНИТЬ НА НУЛИ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ГРУППА, В КОТОРОЙ НАЙДУТСЯ ЭЛЕМЕНТЫ ТАКИЕ, ЧТО $ab \neq ba$, НАЗЫВАЕТСЯ

1) аддитивной 2) абелевой 3) циклической 4) неабелевой 5) конечной

3. ЕСЛИ $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$, ТО ОТОБРАЖЕНИЕ f НАЗЫВАЕТСЯ

1) биективным 2) сюръективным 3) тождественным 4) инъективным 5) взаимно обратным

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, МОДУЛЬ КОТОРЫХ РАВЕН π, - ЭТО

1) прямая 2) интервал 3) луч 4) окружность 5) круг

5. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКИ РАВНА

1) числу векторов в ее линейно независимой системе образующих

2) рангу матрицы перехода от одного базиса к другому

3) количеству векторов в ортогональной системе

4) рангу линейного оператора 5) размерности образа линейного оператора

6. РАЗМЕРНОСТЬ ЯДРА ПЛЮС РАЗМЕРНОСТЬ ОБРАЗА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА РАВНА РАЗМЕРНОСТИ

1) линейного пространства 2) суммы этих подпространств 3) пересечения

4) разности 5) суммы подпространств минус пересечение

7. ЕСЛИ ИЗ ТОГО, ЧТО ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ n ВЕКТОРОВ РАВНА НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ, СЛЕДУЕТ, ЧТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ НУЛИ, ТО РАНГ ЭТОЙ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ РАВЕН

1) пустое 2) несобственное 3) собственное 4) корневое 5) ненулевое

1) n 2) ∞ 3) 0 4) 1 5) 2

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $2x^3 + x^2 - 7x + \lambda = 0$ РАВНА –1. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) –1 2) 0 3) 1 4) 2 5) 3

9. КАКОЕ ЧИСЛО ИЗ ЭТИХ ЧИСЕЛ ИРРАЦИОНАЛЬНО?

1) 0,1111111111111111... 2) 0,10100100010000100000... 3) 123123123123123123... 4) 101010101010101010... 5) 0,999999999999999999...

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

ЧЕМУ РАВНА РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНГО ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1 5) 0

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 14

1. ЕСЛИ ВСЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n УМНОЖИТЬ НА 2, ТО ОН

1) возведется в квадрат 2) умножится на 2 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) умножится на 2^n

2. ГРУППА, ДЛЯ ЛЮБЫХ ДВУХ ЭЛЕМЕНТОВ КОТОРОЙ ВЫПОЛНЯЕТСЯ РАВЕНСТВО $ab = ba$, НАЗЫВАЕТСЯ

1) аддитивной 2) коммутативной 3) циклической 4) мультипликативной

5) конечной.

3. ЕСЛИ $\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$ И f РАЗНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОТОБРАЖАЕТ В РАЗНЫЕ, ТО ОТОБРАЖЕНИЕ f НАЗЫВАЕТСЯ

1) биективным 2) сюръективным 3) тождественным 4) инъективным 5) взаимно обратным

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, АРГУМЕНТ КОТОРЫХ РАВЕН $\frac{\pi}{6}$, - ЭТО

1) прямая 2) интервал 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ЛИНЕЙНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЫЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ НА ЧИСЛО ЯВЛЯЮТСЯ ВСЕ ВЕКТОРЫ, КОНЦЫ КОТОРЫХ ЛЕЖАТ

1) на данной прямой, проходящей через начало координат

2) на данной прямой, не проходящей через начало координат

3) в первой четверти 4) в первой или третьей четверти

5) в первой или второй четверти

6. ДВЕ МАТРИЦЫ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В РАЗНЫХ БАЗИСАХ

1) эквивалентны 2) симметричны 3) подобны 4) ортогональны

5) кососимметричны

7. ЕСЛИ СИСТЕМА ВЕКТОРОВ СОДЕРЖИТ НУЛЕВОЙ ВЕКТОР, ТО ОНА

1) линейно зависима 2) линейно независима 3) ортогональна
4) нормированная 5) базис

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $2x^3 - x^2 - 7x - \lambda = 0$ РАВНА 1. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1 5) 0

9. КАКОЕ ЧИСЛО ИЗ ЭТИХ ЧИСЕЛ ИРРАЦИОНАЛЬНО?

1) 0,1111111111111111... 2) 0,999999999999999999... 3) 123123123123123123... 4) 101010101010101010... 5) 0,1234567891011121314151617...

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1 5) 0

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 15

1. ЕСЛИ ВСЕ ЭЛЕМЕНТЫ СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* УМНОЖИТЬ НА -1, ТО ОН

1) не изменится 2) умножится на $(-1)^n$ 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ГРУППА, В КОТОРОЙ НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ РАВЕНСТВО $ab = ba$, НАЗЫВАЕТСЯ

1) аддитивной 2) неабелевой 3) циклической 4) мультипликативной 5) конечной

3. ЕСЛИ $\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$ И РАЗНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОТОБРАЖАЕТ В РАЗНЫЕ, ТО ОТОБРАЖЕНИЕ f ЯВЛЯЕТСЯ

1) биективным 2) сюръективным 3) тождественным 4) инъективным

5) взаимно обратным

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, АРГУМЕНТ КОТОРЫХ РАВЕН $\frac{\pi}{3}$, – ЭТО

1) прямая 2) интервал 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ЛИНЕЙНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ НАД R ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) положительных действительных чисел относительно сложения $x \oplus y = xy$ (обычное умножение) и умножения на число $\alpha \cdot x = x^{\alpha}$ (обычное возведение в степень)

2) всех упорядоченных пар с операциями $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$,

$\lambda(\alpha_1,\alpha_2)=(\lambda\alpha_1,\alpha_2)$, где все числа действительные

3) всех многочленов одной степени относительно обычных операций сложения и умножения на число

4) всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(0)=1$

5) всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(0)=-1$

6. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМА СИСТЕМА

1) собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям, линейного оператора 2) ортогональных векторов 3) не содержащая нулевой вектор

4) содержащая нулевой вектор 5) собственных значений, принадлежащих одному собственному значению линейного оператора

7. КОРНЕВЫЕ ВЕКТОРЫ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ РАЗЛИЧНЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ,

1) линейно зависимы 2) коллинеарны 3) ортогональны 4) линейно независимы 5) образуют базис

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^3-x^2-17x+4\lambda=0$ РАВНА 2. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) –7 2) –6 3) –5 4) –4 5) –3

9. КАКОЕ ЧИСЛО ИЗ ЭТИХ ЧИСЕЛ ИРРАЦИОНАЛЬНО?

1) 0,149162536496481100121169... 2) 0,1111111111111111... 3) 123123123123123123... 4) 101010101010101010... 5) 0,999999999999999999...

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3= \quad 0, \\ \quad 3x_2+2x_3+x_4=0. \\ 3x_1-4x_2-3x_3-2x_4=0. \end{cases}$$

СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 16

1. ЕСЛИ ЗНАКИ ВСЕХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОГО СТОЛБЦА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ПОМЕНЯТЬ НА ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) умножится на $(-1)^n$ 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ГРУППА ОТНОСИТЕЛЬНО СЛОЖЕНИЯ НАЗЫВАЕТСЯ

1) аддитивной 2) абелевой 3) циклической 4) мультипликативной 5) конечной

3. ОТОБРАЖЕНИЕ A В B НАЗЫВАЕТСЯ ИНЪЕКТИВНЫМ, ЕСЛИ

1) $(\forall a \in A)(f(a) = a)$ 2) $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ 3) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$

4) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$ и $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

5) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$ или $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, АРГУМЕНТ КОТОРЫХ РАВЕН $\frac{\pi}{4}$, - ЭТО

1) прямая 2) интервал 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ЛИНЕЙНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ НАД R ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) всех упорядоченных пар с операциями $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$,

$\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\alpha_1, \alpha_2)$, где все числа действительные

2) всех упорядоченных пар с операциями $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$,

$\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$, где все числа действительные

3) всех многочленов одной степени относительно обычных операций сложения и умножения на число

4) всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(0) = 1$

5) всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(0) = -1$

6. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМА СИСТЕМА

1) собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям, линейного оператора 2) ортогональных векторов 3) не содержащая нулевой вектор

4) содержащая линейно зависимую подсистему 5) собственных значений, принадлежащих одному собственному значению линейного оператора

7. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ РАЗЛИЧНЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ,

1) линейно зависимы 2) коллинеарны 3) линейно независимы 4) ортогональны 5) образуют базис

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^3 - x^2 - 17x + \lambda = 0$ РАВНА 2. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) –12 2) –8 3) –6 4) –3 5) 4

9. КАКОЕ ИЗ ЭТИХ ЧИСЕЛ РАЦИОНАЛЬНО?

1) π 2) 0,999999999999999999... 3) 12345678910111213141516 17...
4) 149162536496481100121169... 5) 0,101001000100001000000...

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

НАЙДИТЕ РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГОПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ

1) 1 2) 5 3) 2 4) 3 5) 4

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 17

1. ЕСЛИ СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* СДЕЛАТЬ СТОЛБЦАМИ, СОХРАНИВ НУМЕРАЦИЮ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ГРУППА ОТНОСИТЕЛЬНО УМНОЖЕНИЯ НАЗЫВАЕТСЯ

1) аддитивной 2) абелевой 3) циклической 4) мультипликативной 5) конечной

3. ОТОБРАЖЕНИЕ *A* В *B* НАЗЫВАЕТСЯ СЮРЪЕКТИВНЫМ, ЕСЛИ

1) $(\forall a \in A)(f(a) = a)$ 2) $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ 3) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$

4) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$ и $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

5) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$ или $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, АРГУМЕНТ КОТОРЫХ РАВЕН ДВУМ, - ЭТО

1) прямая 2) интервал 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ЛИНЕЙНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ НАД *R* ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО ВСЕХ

1) упорядоченных пар с операциями $(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)$,

$\lambda(\alpha_1,\alpha_2)=(\lambda\alpha_1,\alpha_2)$, где все числа действительные

2) векторов, образующих с фиксированным ненулевым вектором угол φ

3) многочленов одной степени относительно обычных операций сложения и умножения на число

4) многочленов, удовлетворяющих условию $f(0)=0$

5) многочленов, удовлетворяющих условию $f(0)=-1$

6. ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМА СИСТЕМА

1) собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям, линейного оператора 2) содержащая линейно зависимую подсистему 3) содержащая линейно независимую подсистему 4) содержащая нулевой вектор 5) собственных значений, принадлежащих одному собственному значению линейного оператора

7. ЕСЛИ НИКАКАЯ НЕТРИВИАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ НЕ РАВНА НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ, ТО ЭТИ ВЕКТОРЫ

1) ортогональны 2) линейно зависимы 3) компланарны 4) коллинеарны 5) линейно независимы

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^3-x^2-17x-4\lambda=0$ РАВНА 2. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

9. КАКОЕ ИЗ ЭТИХ ЧИСЕЛ РАЦИОНАЛЬНО?

1) 0,909090909090909... 2) 1234567891011121314151617...
3) 149162536496481100121169... 4) 0,10100100010000100000... 5) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. ЧЕМУ РАВНА РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 18

1. ЕСЛИ СТОЛБЦЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n СДЕЛАТЬ СТРОКАМИ, СОХРАНИВ НУМЕРАЦИЮ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 1

2. ГРУППА, В КОТОРОЙ ЛЮБОЙ ЭЛЕМЕНТ МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ СТЕПЕНИ ОДНОГО ЭЛЕМЕНТА, НАЗЫВАЕТСЯ

1) аддитивной 2) абелевой <u>3)</u> циклической 4) мультипликативной 5) конечной

3. ОТОБРАЖЕНИЕ A В B НАЗЫВАЕТСЯ ТОЖДЕСТВЕННЫМ, ЕСЛИ

<u>1)</u> $(\forall a \in A)(f(a) = a)$ 2) $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ 3) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$

4) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$ и $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

5) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$ или $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $|z| < 2$, - ЭТО

<u>1)</u> внутренняя часть круга 2) внешняя часть круга 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ЛИНЕЙНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ НАД R ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО ВСЕХ

1) упорядоченных пар с операциями $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$,

$\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\alpha_1, \alpha_2)$, где все числа действительные

2) многочленов одной степени относительно обычных операций сложения и умножения на число

3) многочленов, удовлетворяющих условию $f(0) = 1$

4) многочленов, удовлетворяющих условию $f(0) = -1$

<u>5)</u> многочленов, удовлетворяющих условию $2f(0) - 3f(1) = 0$

6. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ РАЗЛИЧНЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА,

1) ортогональны <u>2)</u> линейно независимы 3) линейно зависимы 4) коллинеарны

5) компланарны

7. ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ НЕТРИВИАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ, РАВНАЯ НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ, ТО ЭТИ ВЕКТОРЫ

1) ортогональны 2) линейно независимы <u>3)</u> линейно зависимы 4) некомпланарны 5) неколлинеарны

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^3 - x^2 - 17x - \lambda = 0$ РАВНА 2. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) 10 2) 11 <u>3)</u> 12 4) 13 5) –14

9. КАКОЕ ИЗ ЭТИХ ЧИСЕЛ РАЦИОНАЛЬНО?

1) $log_5 7$ 2) 1234567891011121314151617... 3) 149162536496481100121169...
4) 0,999999999999000000... 5) 0,101001000100001000000...

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 3 2) 2 3) 1 4) 4 5) 5

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 19

1. ЕСЛИ ПОМЕНЯТЬ МЕСТАМИ ДВЕ СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n, ТО ОН

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) умножится на -1

2. ГРУППА, В КОТОРОЙ НЕТ ТАКОГО ЭЛЕМЕНТА, ЧТО ВСЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЯВЛЯЮТСЯ ЕГО СТЕПЕНЬЮ, НАЗЫВАЕТСЯ

1) аддитивной 2) неабелевой 3) циклической 4) мультипликативной 5) нециклической

3. ОТОБРАЖЕНИЕ A НА B НАЗЫВАЕТСЯ БИЕКТИВНЫМ, ЕСЛИ

1) $(\forall a \in A)(f(a) = a)$ 2) $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ 3) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$

4) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$ и $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

5) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$ или $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $|z| > 2$, - ЭТО

1) внутренняя часть круга 2) внешняя часть круга 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ЛИНЕЙНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ НАД R ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО ВСЕХ

1) упорядоченных пар с операциями $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$,

$\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\alpha_1, \alpha_2)$, где все числа действительные

2) многочленов одной степени относительно обычных операций сложения и умножения на число

3) многочленов, удовлетворяющих условию $f(0) = 1$

4) многочленов, удовлетворяющих условию $f(0) = -1$

5) многочленов, удовлетворяющих условию $f(1)+f(2)+...+f(k)=0$

6. ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА СВОЙСТВО ВЫПОЛНЯЕТСЯ

НЕ ДЛЯ ВСЕХ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

1) $A(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_{i)=}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Ax_i$ 2) $A(x)=\theta$ 3) $A(\lambda a+\mu b)=\lambda Aa+\mu Ab$

4) $A(\lambda x)=\lambda A(x)$ 5) $A(-x)=-A(x)$

7. ЕСЛИ НУЛЕВООЙ ВЕКТОР ОДНОЗНАЧНО ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ, ТО ЭТИ ВЕКТОРЫ

1) ортогональны 2) линейно зависимы 3) компланарны 4) линейно независимы 5) коллинеарны

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^3+x^2-17x-4\lambda=0$ РАВНА– 2. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) –1 2) –2 3) –3 4) –4 5) –5

9. КАКОЕ ИЗ ЭТИХ ЧИСЕЛ РАЦИОНАЛЬНО?

1) $cos 10^0$ 2) 0,10100100010000100000... 3) 1234567891011121314151617...
4) 149162536496481100121169... 5) 0,09909909909909909...

10. ЕСЛИ ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНО ЧИСЛУ ПЕРЕМЕННЫХ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ СИСТЕМЫ ОТЛИЧЕН ОТ НУЛЯ, ТО СИСТЕМА ЯВЛЯЕТСЯ

1) неопределённой 2) определённой 3) фундаментальной
4) однородной 5) несовместной

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 20

1. ЕСЛИ ПОМЕНЯТЬ МЕСТАМИ ДВА СТОЛБЦА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n, ТО ОН

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) умножится на -1

2. ГРУППА НАЗЫВАЕТСЯ ЦИКЛИЧЕСКОЙ, ЕСЛИ

1) это – группа относительно сложения

2) операция подчинена закону коммутативности

3) существует такой элемент, что все элементы группы есть его степени

4) это – группа относительно умножения

5) в ней конечное число элементов

3. ОТОБРАЖЕНИЕ A НА B НАЗЫВАЕТСЯ БИЕКТИВНЫМ, ЕСЛИ

1) $(\forall a \in A)(f(a) = a)$ 2) $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ 3) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$

4) $(\forall a, b \in A)(f(a,b) = f(a) f(b))$ 5) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$ или $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $|z - i| < 1$, - ЭТО

1) внутренняя часть круга 2) внешняя часть круга 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ЛИНЕЙНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ НАД R ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЫЧНЫХ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ НА ЧИСЛО ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО ВСЕХ МНОГОЧЛЕНОВ

1) одной степени 2) пополненное нулем 3) удовлетворяющих условию $f(0) = 1$

4) удовлетворяющих условию $f(0) = -1$

5) удовлетворяющих условию $2f(0) - 3f(1) = 1$

6. ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА A СВОЙСТВО ВЫПОЛНЯЕТСЯ

НЕ ДЛЯ ВСЕХ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

1) $A(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{i)=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A x_i$ 2) $A(\lambda x) = \lambda a(x)$ 3) $A(\lambda a + \mu b) = \lambda Aa + \mu Ab$

4) $A(x) = x$ 5) $A(-x) = -A(x)$

7. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО БАЗИСА: ЭТО – СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИХ И ЕГО ВЕКТОРЫ

1) ортогональны 2) линейно зависимы 3) компланарны 4) коллинеарны
5) линейно независимо

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^3 + x^2 - 17x + 4\lambda = 0$ РАВНА– 2. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

9. ВО СКОЛЬКО РАЗ УВЕЛИЧИТСЯ ДВУЗНАЧНОЕ ЧИСЛО, ЕСЛИ СПРАВА К НЕМУ ПРИПИСАТЬ ТАКОЕ ЖЕ ЧИСЛО?

1) 101 2) 100 3) 10 4) 11 5) 2

10. ЕСЛИ ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНО ЧИСЛУ ПЕРЕМЕННЫХ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ СИСТЕМЫ ОТЛИЧЕН ОТ НУЛЯ, ТО СИСТЕМА ЯВЛЯЕТСЯ

1) неопределённой 2) совместной 3) фундаментальной 4) однородной 5) несовместной

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 21

1. ЕСЛИ К ПЕРВОЙ СТРОКЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ПРИБАВИТЬ ТРЕТЬЮ, ДОМНОЖЕННУЮ НА 3, ТО ОН

1) не изменится 2) умножится на 3 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) обратится в 0

2. ГРУППА НАЗЫВАЕТСЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ, ЕСЛИ

1) это – группа относительно сложения;

2) операция подчинена закону коммутативности;

3) существует такой элемент, что все элементы группы есть его степени;

4) это – группа относительно умножения;

5) в ней конечное число элементов.

3. ЕСЛИ $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(f(a) = b)$, ТО f НАЗЫВАЕТСЯ

1) отображением A в B 2) сюръекцией A на B 3) инъекцией A в B

4) взаимно однозначным соответствием между элементами A и B

5) изоморфизмом между A и B

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $|z-i|>1$, - ЭТО

1) внутренняя часть круга 2) внешняя часть круга 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ЛИНЕЙНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ НАД R ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЫЧНЫХ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ НА ЧИСЛО ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО ВСЕХ МНОГОЧЛЕНОВ

1) одной степени

2) степени $\leq n$, пополненное нулем

3) удовлетворяющих условию $f(0) = 1$

4) удовлетворяющих условию $f(0)=-1$

5) удовлетворяющих условию $2f(0)-3f(1)=1$

6. ОПЕРАТОР ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНЫМ

1) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2+x_3)$ 2) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1, x_2+1, x_3+2)$

3) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2^2+x_3)$ 4) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2+x_3$

5) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$

7. МИНИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИХ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА - ЭТО ЕГО

1) ядро 2) образ 3) базис 4) канонический базис 5) линейная оболочка

4) $\begin{cases} x^2+y^2\le 9; \\ x\ge 0, y<0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2<16; \\ |x|>4 \end{cases}$

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^3+x^2-17x+4\lambda=0$ РАВНА– 2. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

9. ВО СКОЛЬКО РАЗ УВЕЛИЧИТСЯ ТРЁХЗНАЧНОЕ ЧИСЛО, ЕСЛИ СЛЕВА К НЕМУ ПРИПИСАТЬ ТАКОЕ ЖЕ ЧИСЛО?

1) 1000 3) 100 3) 1001 4) 101 5) 2

10. СИСТЕМА КРАМЕРОВСКОГО ТИПА ЯВЛЯЕТСЯ СИСТЕМОЙ

1) неопределённой 2) несовместной 3) фундаментальной 4) однородной 5) определённой

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 22

1. ЕСЛИ СТРОКИ И СТОЛБЦЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ПОМЕНЯТЬ РОЛЯМИ, ТО

1) он не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) умножится на -1

2. ГРУППА НАЗЫВАЕТСЯ КОНЕЧНОЙ, ЕСЛИ

1) в ней все элементы имеют конечный порядок

2) операция подчинена закону коммутативности

3) в ней конечное число элементов

4) это – группа относительно умножения

5) в ней конечное число подгрупп

3. ЕСЛИ $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(f(a) = b)$, ТО f НАЗЫВАЕТСЯ

1) функцией из A в B 2) сюръекцией A на B 3) инъекцией A в B

4) взаимно однозначным соответствием между элементами A и B

5) изоморфизмом между A и B

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $|z - i| < 1$, - ЭТО

1) внутренняя часть круга 2) внешняя часть круга 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ПРИ ИЗОМОРФИЗМЕ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМАЯ СИСТЕМА ВЕКТОРОВ ПЕРЕХОДИТ В

1) базис 2) систему образующих 3) линейно зависимую 4) линейно независимую

5) нулевой вектор

6. ОПЕРАТОР ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНЫМ

1) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$ 2) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$

3) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2^2 + x_3)$ 4) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 + x_3$

5) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$

7. ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМАЯ СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИХ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА - ЭТО ЕГО

1) ядро 2) базис 3) образ 4) канонический базис 5) линейная оболочка

8. СУММА ДВУХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^3 + x^2 - 17x - \lambda = 0$ РАВНА– 2. ЧЕМУ РАВНО λ?

1) -12 2) 10 3) –11 4) 12 5) – 15

9. ВО СКОЛЬКО РАЗ УВЕЛИЧИТСЯ ДВУЗНАЧНОЕ ЧИСЛО, ЕСЛИ СЛЕВА К НЕМУ ПРИПИСАТЬ ТАКОЕ ЖЕ ЧИСЛО?

1) 100 2) 101 3) 10 4) 11 5) 2

10. СИСТЕМА КРАМЕРОВСКОГО ТИПА ЯВЛЯЕТСЯ СИСТЕМОЙ

1) неопределённой 2) совместной 3) несовместной 4) фундаментальной 5) однородной

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 23

1. ЕСЛИ СТОЛБЦЫ И СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n ПОМЕНЯТЬ РОЛЯМИ, ТО

1) он не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) умножится на -1

2. ЕСЛИ ВЫПОЛНЯЕТСЯ ЗАКОН КОММУТАТИВНОСТИ, ТО ГРУППА НАЗЫВАЕТСЯ

1) аддитивной 2) конечной 3) абелевой 4) периодической 5) циклической

3. ЕСЛИ $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$, ТО f НАЗЫВАЕТСЯ

1) отображением A в B 2) сюръекцией A на B 3) инъекцией A в B

4) взаимно однозначным соответствием между элементами A и B

5) изоморфизмом между A и B

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $|z - i| < 2$, - ЭТО

1) внутренняя часть круга 2) внешняя часть круга 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ПРИ ИЗОМОРФИЗМЕ БАЗИС ПЕРЕХОДИТ В

1) базис 2) систему образующих 3) линейно зависимую 4) линейно независимую

5) ортогональную

6. ОПЕРАТОР ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНЫМ

1) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$ 2) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2^2 + x_3)$

3) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, 3x_1)$ 4) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 + x_3$

5) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$

7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛЮБОГО ЧИСЛА ЛИНЕЙНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ – ЭТО

1) линейное подпространство 2) базис 3) образ 4) канонический базис 5) линейная оболочка

8. МНОГОЧЛЕНЫ $ax^2 + bx + c$ И $bx^2 + cx + a$ ИМЕЮТ ОБЩИЙ КОРЕНЬ. НАЙДИТЕ ЕГО

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

9. ЕСЛИ $a_1 = 3, a_2 = 5, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, ТО ФОРМУЛА ОБЩЕГО ЧЛЕНА $a_n =$

1) $2^n - 1$ 2) $2^{n+2} + 1$ 3) $2^{n+1} + 1$ 4) $2^n + 1$ 5) $2^{n+1} - 1$

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5 5) 6

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 24

1. ЕСЛИ ПЕРВУЮ И ВТОРУЮ СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n УМНОЖИТЬ НА a, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) умножится на $2a$ 3) умножится на $2an$

4) умножится на $(2a)^{n-1}$ 5) умножится на a^2

2. ПРИМЕРОМ ГРУППЫ ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) целых чисел относительно вычитания

2) натуральных чисел относительно вычитания

3) рациональных чисел относительно сложения

4) рациональных чисел относительно умножения

5) рациональных чисел относительно деления

3. ЕСЛИ $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$, ТО f НАЗЫВАЕТСЯ

1) отображением A в B 2) сюръекцией A на B 3) инъекцией A в B

4) взаимно однозначным соответствием между элементами A и B

5) изоморфизмом между A и B

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $|z-i| < \sqrt{2}$, - ЭТО

1) внутренняя часть круга 2) внешняя часть круга 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ПРИ ИЗОМОРФИЗМЕ СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИХ ВЕКТОРОВ ПЕРЕХОДИТ В

1) базис 2) систему образующих 3) линейно зависимую 4) линейно независимую

5) ортонормированную

6. ОПЕРАТОР ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНЫМ

1) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$ 2) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2^2 + x_3)$

3) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 + x_3$ 4) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 + x_3)$

5) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$

7. МАКСИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМАЯ СИСТЕМА ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА – ЭТО ЕГО

1) базис 2) система образующих 3) линейная оболочка 4) размерность 5) ортонормированная система

8. ПРИ КАКИХ a МНОГОЧЛЕНЫ $x^2 + ax + 1$ И $x^2 + x + a$ ИМЕЮТ ОБЩИЙ КОРЕНЬ.?

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5 5) 1

9. ЕСЛИ $a_1 = 3, a_2 = 5, a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, ТО ФОРМУЛА ОБЩЕГО ЧЛЕНА $a_n =$

1) $2^n - 1$ 2) $2^{n+2} + 1$ 3) $2^{n+1} + 1$ 4) $2^{n+1} - 1$ 5) $2^n + 1$

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 25

1. ЕСЛИ ПЕРВЫЙ И ПОСЛЕДНИЙ СТОЛБЦЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n УМНОЖИТЬ НА $-c$, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) умножится на $2c$ 3) умножится на $(-c)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-c)^{n-1}$ 5) умножится на c^2

2. ПРИМЕРОМ ГРУППЫ ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) целых чисел относительно сложения

2) натуральных чисел относительно вычитания

3) положительных вещественных чисел относительно сложения

4) отрицательных рациональных чисел относительно умножения

5) рациональных чисел относительно деления

3. ЕСЛИ $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(f(a) = b)$ И f СОХРАНЯЕТ СТРУКТУРУ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ A, ТО f НАЗЫВАЕТСЯ

1) отображением A в B 2) сюръекцией A на B 3) инъекцией A в B

4) взаимно однозначным соответствием между элементами A и B

<u>5)</u> изоморфизмом между A и B

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $|z-i|<\alpha$, – ЭТО

<u>1)</u> внутренняя часть круга 2) внешняя часть круга 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ПРИ ИЗОМОРФИЗМЕ ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМАЯ СИСТЕМА ВЕКТОРОВ ПЕРЕХОДИТ В

1) базис 2) систему образующих <u>3)</u> линейно зависимую 4) линейно независимую

5) эквивалентную

6. ОПЕРАТОР ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНЫМ

1) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2+1,x_3+2)$ 2) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2^2+x_3)$

3) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2+x_3$ 4) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$

<u>5)</u> $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2, x_1+x_3, x_2+x_3)$

7. МНОЖЕСТВО С БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА НАЗЫВАЕТСЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ, ЕСЛИ БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ РЕФЛЕКСИВНО, ТРАНЗИТИВНО И

1) иррефлевсивно <u>2)</u> антисимметрично 3) несимметрично
4) неантисимметрично 5) инъективно

8. ПРИ КАКИХ a СУММА КВАДРАТОВ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^2-(a+1)x+(a-1)$ НАИМЕНЬШАЯ.?

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1 <u>5)</u> 0

9. ЕСЛИ $a_1=3, a_2=5, a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$, ТО ФОРМУЛА ОБЩЕГО ЧЛЕНА $a_n=$

1) 2^n-1 2) $2^{n+2}+1$ 3) $2^{n+1}+1$ <u>4)</u> 2^n+1 5) $2^{n+1}-1$

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1+x_2-x_3+x_4=0$. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 2 2) 1 3) 5 4) 4 <u>5)</u> 3

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 26

1. ЕСЛИ СТРОКУ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n УМНОЖИТЬ НА 5, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) умножится на $5n$ 3) умножится на $(-5)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-5)^{n-1}$ 5) умножится на 5

2. ПРИМЕРОМ ГРУППЫ ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) целых чисел относительно вычитания

2) натуральных чисел относительно вычитания

3) рациональных чисел без нуля относительно умножения

4) рациональных чисел относительно умножения

5) действительных чисел без нуля относительно деления

3. ЕСЛИ $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$, ТО f НАЗЫВАЕТСЯ

1) отображением A в B 2) сюръекцией A на B 3) гомоморфизмом A в B

3) взаимнооднозначным отображением A в B

4) взаимнооднозначным соответствием между элементами A и B

4. МНОЖЕСТВО ТОЧЕК, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ $|z-i| < \pi$, - ЭТО

1) внутренняя часть круга 2) внешняя часть круга 3) луч 4) окружность 5) круг

5. ВСЕ ЭТИ МНОЖЕСТВА ВСЕГДА ЯВЛЯЮТСЯ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА V/K ДЛЯ ПОДПРОСТРАНСТВ N_1 И N_2, КРОМЕ

1) V 2) $N_1 + N_2$ 3) $N_1 \cap N_2$ 4) $N_1 \cup N_2$ 5) $N_1 \oplus N_2$

6. В БАЗИСЕ ИЗ СВОИХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

1) ортогональная 2) не ортогональная 3) вырожденная 4) невырожденная

5) диагональная

7. МНОЖЕСТВО С БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА НАЗЫВАЕТСЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ, ЕСЛИ БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ ТРАНЗИТИВНО, АНТИСИММЕТРИЧНО И

1) иррефлевсивно 2) нерефлексивно 3) рефлексивно 4) биективно
5) сюръективно

1) $\begin{cases} x = 3t; \\ y = t+5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2t^2 - 1; \\ y = t+6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 5\sin t \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t \end{cases}$

8. ПРИ КАКИХ m СУММА КВАДРАТОВ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ $x^2 - (m+1)x + (m-1)$ НАИМЕНЬШАЯ.?

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1 5) 0

9. ДЛЯ НАТУРАЛЬНЫХ И КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧЁТНЫХ ЧИСЕЛ МОЖЕТ ОКАЗАТЬСЯ В ПЯТЁРКЕ ЧИСЕЛ

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) 4

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

ЧЕМУ РАВНА РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНГО ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 5 2) 1 3) 2 4) 3 5) 4

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 27

1. ЕСЛИ К ПЕРВОМУ СТОЛБЦУ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n ПРИБАВИТЬ ПОСЛЕДНИЙ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) умножится на -1

2. ПРИМЕРОМ ГРУППЫ ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) целых чисел относительно вычитания

2) натуральных чисел относительно вычитания

3) рациональных чисел относительно сложения

4) комплексных чисел без нуля относительно умножения

5) рациональных чисел без нуля относительно деления

3. ЕСЛИ $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$, ТО ОТОБРАЖЕНИЕ f A НА B НАЗЫВАЕТСЯ

1) гомоморфизмом 2) сюръекцией 3) инъекцией

4) взаимнооднозначным соответствием между элементами A и B

5) изоморфизмом между A и B

4. $\cos\pi + i\sin\pi$ - ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

1) 1+i 2) -1-i 3) i 4) -i 5) -1

5. РАЗМЕРНОСТЬ СУММЫ ДВУХ ПОДПРОСТРАНСТВ РАВНА

1) сумме размерностей этих подпространств

2) разности размерностей этих подпространств

3) произведению размерностей этих подпространств

4) сумме размерностей минус размерность пересечения этих подпространств

5) произведению размерностей без размерностей подпространств

6. СВОЙСТВО ИМЕЕТ МЕСТО НЕ ДЛЯ ВСЕХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ A, B и C

1) $AB = BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$ 3) $\lambda(BA) = (\lambda A)B$

4) $(A+B)C = AC+BC$ 5) $A(B+C) = AB+AC$

7. МНОЖЕСТВО С БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА НАЗЫВАЕТСЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ, ЕСЛИ БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ РЕФЛЕКСИВНО, АНТИСИММЕТРИЧНО И

1) сюръективно 2) нетранзитивно 3) биективно 4) транзитивно 5) инъективно

8. НАЙДИТЕ ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА $x^5 - 17x + 1$ НА $x + 2$

1) –1 2) 0 3) 1 4) 2 5) 3

9. НАЙДИТЕ ВСЕ ТАКИЕ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА p, ДЛЯ КОТОРЫХ $4p^2 + 1$ И $6p^2 + 1$ ТОЖЕ ПРОСТЫЕ

1) 5 2) 7 3) 11 4) 3 5) 2

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 3 2) 2 3) 1 4) 5 5) 4

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 28

1. ЕСЛИ ПЕРВЫЙ И ПОСЛЕДНИЙ СТОЛБЦЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n ПОМЕНЯТЬ МЕСТАМИ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) умножится на -1

2. ПРИМЕРОМ ГРУППЫ ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) целых чисел относительно вычитания

2) комплексных чисел относительно сложения

3) рациональных чисел относительно вычитания

4) рациональных чисел относительно умножения

5) рациональных чисел относительно деления

3. ЕСЛИ $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$, ТО ОТОБРАЖЕНИЕ f A НА B НАЗЫВАЕТСЯ

1) мономорфизмом 2) сюръекцией 3) инъекцией 4) биекцией 5) изоморфизмом

4. $\cos 0 + i \sin 0$ - ЭТО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

1) 1+*i* 2) -1-*i* 3) *i* 4) -*i* 5) 1

5. ВСЕ ЭТИ МНОЖЕСТВА ВСЕГДА ЯВЛЯЮТСЯ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА V/K, КРОМЕ

1) линейной оболочки 2) ядра линейного оператора 3) образа линейного оператора 4) объединения подпространств 5) суммы подпространств

6. СВОЙСТВО ИМЕЕТ МЕСТО НЕ ДЛЯ ВСЕХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ *A, B* и *C*

1) $A(BC) = (AB)C$ 2) $AB = BA$ 3) $A(\lambda B) = \lambda(AB)$

4) $(A+B)C = AC+BC$ 5) $A(B+C) = AB+AC$

7. МНОЖЕСТВО С БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА НАЗЫВАЕТСЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ, ЕСЛИ БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ РЕФЛЕКСИВНО,

1) транзитивно и антисимметрично 2) нетранзитивно и антисимметрично
3) транзитивно и несимметрично 4) транзитивно и неантисимметрично
5) транзитивно и инъективно

8. НАЙДИТЕ ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА $x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ НА $x - 1$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

9. ЕСЛИ $3^x + 4^x = 5^x$, ТО $x =$

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

ЧЕМУ РАВНА РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНГО ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 2   <u>2)</u> 1   3) 4   4) 3   5) 5

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 29

1. ЕСЛИ ВТОРУЮ И ТРЕТЬЮ СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ПОМЕНЯТЬ МЕСТАМИ, ТО

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ <u>5)</u> умножится на -1

2. ПРИМЕРОМ ГРУППЫ ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) многочленов относительно вычитания

2) натуральных чисел относительно вычитания

<u>3)</u> рациональных функций относительно сложения

4) комплексных чисел относительно умножения

5) рациональных чисел относительно деления

3. $f(A) =$

<u>1)</u> $\{b \in B \mid (\exists a \in A)(f(a) = b)\}$ 2) $\{a \in A \mid \exists f(a)\}$ 3) $\{a \in A \mid f(a) = 0\}$

4) $\{a \in A \mid f(a) = a\}$ 5) $\{a, b \in A \mid f(a) = f(b)\}$

4. $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ - ЭТО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

1) 1+*i* 2) -1-*i* <u>3)</u> *i* 4) -*i* 5) -1

5. ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА

1) из того, что их линейная комбинация равна нулевому вектору следует, что все коэффициенты линейной комбинации равны нулю

<u>2)</u> хотя бы один из них – линейная комбинация остальных

3) существует линейно зависимая подсистема

4) существует линейно независимая подсистема

5) любая подсистема линейно зависима

6. СВОЙСТВО ИМЕЕТ МЕСТО НЕ ДЛЯ ВСЕХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

<u>1)</u> $(\varphi\psi)^* = \varphi^*\psi^*$ 2) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$ 3) $(\varphi^*)^* = \varphi$

4) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$ 5) $((\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$

7. МНОЖЕСТВО С БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА НАЗЫВАЕТСЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ, ЕСЛИ БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ ТРАНЗИТИВНО,

<u>3)</u> рефлексивно и антисимметрично 2) нерефлексивно и антисимметрично
3) иррефлексивно и несимметрично 4) рефлексивно и неантисимметрично
5) иррефлексивно и инъективно

8. ПРИ КАКОМ ЗНАЧЕНИИ a МНОГОЧЛЕН $x^{1000} + ax^2 + 9$ ДЕЛИТСЯ НА $x + 1$?

1) –12 <u>2</u>) –10 3) –8 4) –6 5) –4

9. СКОЛЬКО СУЩКСТВУЕТ ШЕСТИЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ, ДЕЛЯЩИХСЯ НА 5?

1) $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4$ <u>2</u>) $2 \cdot 8 \cdot 10^4$ 3) 10^6 4) 5^{10} 5) $5 \cdot 10^6$

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

<u>1</u>) 3 2) 4 3) 5 4) 1 5) 2

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 30

1. ЕСЛИ НА МЕСТО ВТОРОЙ СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* ПОСТАВИТЬ ТРЕТЬЮ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится <u>2)</u> обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) умножится на -1

2. ПРИМЕРОМ ГРУППЫ ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) векторов относительно вычитания

2) натуральных чисел относительно вычитания

<u>3)</u> векторов относительно сложения

4) векторов относительно скалярного умножения

5) векторов относительно векторного произведения

3. $Ker\, f\ =$

1) $\{b \in B \mid (\exists a \in A)(f(a) = b)\}$ 2) $\{a \in A \mid \exists f(a)\}$ <u>3)</u> $\{a \in A \mid f(a) = 0\}$

4) $\{a \in A \mid f(a) = a\}$ 5) $\{a, b \in A \mid f(a) = f(b)\}$

4. $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ - ЭТО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

1) $1+i$ 2) $-1-i$ 3) i 4) $-i$ 5) -1

5. ЕСЛИ ПОДСИСТЕМА СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМА, ТО

1) система линейно независима 2) ортогональна 3) ортонормированная

4) система линейно зависима 5) тривиальная

6. МАТРИЦА САМОСОПРЯЖЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ОРТОНОРМИРОВАННОМ БАЗИСЕ

1) диагональная 2) треугольная 3) ортогональная 4) симметричная

5) кососимметричная

7. МНОЖЕСТВО С БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА НАЗЫВАЕТСЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ, ЕСЛИ БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ АНТИСИММЕТРИЧНО,

1) нерефлексивно и транзитивно 2) рефлексивно и нетранзитивно
3) иррефлексивно и транзитивно 4) иррефлексивно и нетранзитивно
5) рефлексивно и транзитивно

8. ПРИ КАКОМ ЗНАЧЕНИИ a МНОГОЧЛЕН $x^n + ax^{n-2}$ $(n \geq 2)$ ДЕЛИТСЯ НА $x-2$?

1) –6 2) –4 3) –2 4) 0 5) 2

9. СКОЛЬКО МОЖНО СОСТАВИТЬ ПЯТИЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ, В ДЕСТИЧНОЙ ЗАПИСИ КОТОРЫХ ХОТЯ БЫ ОДИН РАЗ ВСТРЕЧАЕСЯ ЦИФРА 5?

1) 5^{10} 2) 10^6 3) $9\cdot 10^4 - 8\cdot 9^4$ 4) $2\cdot 8\cdot 10^4$ 5) $5\cdot 10^6$

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

ЧЕМУ РАВНА РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНГО ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 2 2) 1 3) 3 4) 4 5) 5

ОБВЕДИТЕ КРУЖКОМ НОМЕР ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

Вариант 31

1. ЕСЛИ ВМЕСТО ТРЕТЬЕГО СТОЛБЦА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА *n* НАПИСАТЬ ПОСЛЕДНИЙ, ТО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

1) не изменится 2) обратится в нуль 3) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4) умножится на $(-1)^{n-1}$ 5) умножится на -1

2. ПРИМЕРОМ ГРУППЫ ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО

1) целых чисел относительно вычитания

2) натуральных чисел относительно вычитания

3) рациональных чисел относительно сложения

4) подстановок относительно умножения

5) рациональных чисел относительно деления

3. $Im\, f\ =$

1) $\{b \in B \mid (\exists a \in A)(f(a) = b)\}$ 2) $\{a \in A \mid \exists f(a)\}$ 3) $\{a \in A \mid f(a) = 0\}$

4) $\{a \in A \mid f(a) = a\}$ 5) $\{a, b \in A \mid f(a) = f(b)\}$

4. $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$ - ЭТО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

1) 1+i 2) -1-i 3) i 4) -i 5) -1

5. СИСТЕМА ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩАЯ НУЛЕВОЙ ВЕКТОР,

1) ортогональная 2) линейно независимая 3) ортонормированная

4) линейно зависимая 5) нулевая

6. МАТРИЦА ОРТОГОНАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ОРТОНОРМИРОВАННОМ БАЗИСЕ

1) диагональная 2) треугольная 3) ортогональная 4) симметричная

5) кососимметричная

7. МНОЖЕСТВО С БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА НАЗЫВАЕТСЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ, ЕСЛИ БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ АНТИСИММЕТРИЧНО,

1) рефлексивно и инъективно 2) рефлексивно и биективно
3) рефлексивно и нетранзитивно 4) рефлексивно и транзитивно
5) иррефлексивно и транзитивно

8. ПРИ КАКОМ ЗНАЧЕНИИ a МНОГОЧЛЕН $x^{1000} + ax^2 + 9$ ДЕЛИТСЯ НА $x - 1$?

1) –2 2) –4 3) –6 4) –8 5) –10

9. В ДВЕНАДЦАТЕРИЧНОЙ СИСТЕМЕ ИМЕЕТСЯ 12 ЦИФР. СКОЛЬКО В ЭТОЙ СИСТЕМЕ ИМЕЕТСЯ СЕМИЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ?

1) $2 \cdot 8 \cdot 10^4$ 2) 10^6 3) $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4$ 4) $11 \cdot 12^6$ 5) $5 \cdot 10^6$

10. ДАНА ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЭТОЙ СИСТЕМЫ?

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

Ключи правильных ответов ПТМ по дисциплине «Алгебра»

№ вопроса \ № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	1	3	1	2	4	2	3	1	3
2	4	2	1	1	3	3	3	2	2	5
3	4	3	3	3	4	4	1	4	3	2
4	3	3	2	2	5	4	4	4	4	5
5	1	3	5	4	1	1	5	5	1	3
6	1	4	4	5	1	2	1	1	5	5
7	1	4	4	1	2	2	5	5	5	3
8	2	1	5	1	2	1	2	5	5	2
9	2	5	4	1	2	1	4	5	5	1
10	5	3	5	1	2	1	1	5	5	4
11	5	4	4	4	3	3	2	4	5	1
12	2	2	5	4	2	4	2	3	1	1
13	2	4	2	4	1	1	1	5	2	4
14	5	2	1	3	1	3	1	2	5	4
15	2	2	5	3	1	4	4	5	1	4
16	2	1	2	3	2	4	3	1	2	3

17	1	4	3	3	4	1	5	3	1	3
18	1	3	1	1	5	2	3	3	4	1
19	5	5	4	2	5	2	4	3	5	2
20	5	3	2	1	2	4	5	3	1	2
21	1	4	1	2	2	1	3	2	3	5
22	1	3	1	1	4	2	2	4	2	2
23	1	3	2	1	1	3	1	1	4	2
24	5	3	3	1	2	4	1	1	5	3
25	5	1	5	1	3	5	2	5	4	5
26	5	3	3	1	4	5	3	5	5	2
27	1	4	4	5	4	1	4	5	1	1
28	5	2	4	5	4	2	1	5	4	2
29	5	3	1	3	2	1	3	2	2	1
30	2	3	3	1	4	4	5	5	3	2
31	2	4	1	4	4	3	4	5	4	3

Критерии оценки результатов тестирования по дисциплине

«Алгебра»

Результаты проверки знаний студентов проводятся по количеству правильных ответов. За правильный ответ ставится один балл. Общая оценка выставляется в соответствии со следующей шкалой:

Количество правильных ответов в варианте	Оценка
6-7	Отлично
4-5	Хорошо
3	Удовлетворительно
менее трех	Неудовлетворительно