МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

«СОГЛАСОВАНО»	«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель ОП	Заведующий кафедрой
«Прикладная механика»	Механики и математического моделирования (название кафедры)
Озерова Г.П. (подпись) (Ф.И.О. рук.ОП)	Бочарова А.А.. (подпись) (Ф.И.О. зав. каф.)
«25» июня 2016г.	«24» июня 2016г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (РПУД)
ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Направление подготовки: 15.03.03 Прикладная механика
Профиль подготовки:
«Математическое и компьютерное моделирование механических систем и процессов»
Форма подготовки (очная)

курс 2 семестр 4
лекции 18 час.
практические занятия 36 час.
лабораторные работы час.
в том числе с использованием МАО лек. 4 час. /пр. 12 час. /лаб. - час.
всего часов аудиторной нагрузки 54 час.
в том числе с использованием МАО 16 час.
самостоятельная работа 90 час.
в том числе на подготовку к экзамену 45 час.
контрольные работы -
курсовая работа / курсовой проект -
зачет - семестр
экзамен 4 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования Дальневосточного федерального университета, принятого решением Ученого совета ДВФУ, протокол от 25.02.2016 № 02-16, введенного в действие приказом ректора ДВФУ от 10.03.2016 № 12-13-391

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры механики и математического моделирования, протокол № 9 от «23» июня 2016 г.

Заведующий кафедрой:к.ф.-м.н., доцент Бочарова А.А.
Составитель: к.т.н., доцент Амосова Е.В.

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «23» _ июня 2017 г. № 11

Заведующий кафедрой ________________________ Бочарова А.А.
(подпись) (И.О. Фамилия)

В целях повышения качества знаний студентов в РПУД внесены следующие изменения:

- добавлены расчетно-графические задания (РГР)
- добавлены контрольные работы

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______

Заведующий кафедрой ________________________ __________________
(подпись) (И.О. Фамилия)

Аннотация дисциплины
«Основы вариационного исчисления»

Дисциплина «Основы вариационного исчисления» разработана для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.03.03 «Прикладная механика», профиль «Математическое и компьютерное моделирование механических систем и процессов» и является обязательной дисциплиной вариативной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана (Б1.В.ОД.5).

Трудоемкость дисциплины составляет 144 часа (4 зачетные единицы). Учебным планом предусмотрены лекционные занятия (18 часов), практические занятия (36 часов), и самостоятельная работа студентов (90 часов, из них 45 часов на экзамен). Дисциплина реализуется на 2 курсе в 4 семестре. Форма промежуточной аттестации – экзамен.

Дисциплина «Основы вариационного исчисления» логически связана с дисциплинами «Введение в математические модели механики», «Методы математической физики в механике».

Цель дисциплины: дать студентам знания и практические навыки в применении математических моделей в прикладных инженерных задачах, привить умения при помощи соответствующего математического аппарата находить решения в инженерных задачах и оценивать их эффективность выработать у студентов общий подход к построению математических моделей в решении оптимизационных инженерных задач.

Задачи дисциплины:

- Теоретическое освоение студентами современных концепций и моделей теории интегральных уравнений и вариационного исчисления.
- Приобретение практических навыков применения аппарата теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения задач математики, физики, естествознания.

Для успешного изучения дисциплины «Основы вариационного исчисления» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

- знать интегральное и дифференциальное исчисление функции одной переменной;
- знать теорию функций нескольких переменных;
- знать теорию поля;
- умение решать системы линейных алгебраических уравнений;
- умение решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений.

Планируемые результаты обучения по данной дисциплине (знания, умения, владения), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы, характеризуют этапы формирования следующих компетенций:

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**	
ОПК-3 способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат	Знает	– типовые задачи математической физики, приводящие к вариационным проблемам; – теоретические основы и практические приложения разделов курса вариационного исчисления;
	Умеет	– формулировать и доказывать основные результаты дисциплины; – применять методы вариационного исчисления к задачам техники, экономики и естествознания; – использовать пакеты прикладных программ при решении задач; – решать классические задачи вариационного исчисления;
	Владеет	– методами решения вариационных задач; – навыками использования средств вариационного исчисления для решения прикладных задач математической физики.
ПК-1 способность выявлять сущность научно-технических проблем, возникающих в ходе	Знает	– определение функционала и его первой вариации; – определение сильного и слабого экстремума функционала; – необходимое условие

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
профессиональной деятельности, и привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат		экстремума функционала; – основные леммы вариационного исчисления; – классические задачи вариационного исчисления; – уравнение Эйлера
	Умеет	– построить вариацию функционала и получить необходимое условие экстремума функционала для вариационной задачи с закрепленными концами и ее обобщений; – решать основные типы вариационных задач на условный экстремум; – исследовать функционал на экстремум, используя необходимые и достаточные условия; – классифицировать линейные интегральные уравнения; – сводить задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению
	Владеет	– методами решения простейшей вариационной задачи и ее обобщений; – методами исследования функционала на экстремум; – методами решения интегральных уравнений; – навыками использования математического аппарата для решения физических задач.
ПК-3 готовностью выполнять научно-исследовательские работы и решать научно-технические задачи в области прикладной механики на основе достижений техники и технологий, классических и технических теорий и методов, физико-механических, математических и компьютерных	Знает	постановку основных экстремальных задач, задач классического вариационного исчисления; методы их решения
	Умеет	классифицировать основные классы экстремальных задач и решать их, применяя изучаемые принципы и методы экстремальных задач классического вариационного исчисления

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
моделей, обладающих высокой степенью адекватности реальным процессам, машинам и конструкциям	Владеет	обшей теорией экстремальных задач вариационного исчисления и их применением в задачах механики

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Основы вариационного исчисления» применяются следующие методы активного/ интерактивного обучения: групповые консультации, проблемные лекции.

I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА (18 часов)

Раздел 1. Основные задачи вариационного исчисления (10 часов)

Тема 1. Постановка классической задачи вариационного исчисления. Классическая задача вариационного исчисления. (2 часа)

Определение минимума функционала. Допустимая функция. Слабая локальная минималь задачи. Лемма Лагранжа. Вариация Лагранжа.

Тема 2. (2 часа). Интегралы уравнения Эйлера.

Получение общего решения уравнения Эйлера. Задача о наименьшей площади поверхности вращения. Задача о брахистохроне.

Тема 3. Задача Больца (2 часа)

Необходимые условия минимума в задаче Больца. Использование метода вариаций. Задача со смешанными ограничениями.

Тема 4. Задача Больца со старшими производными. Изопериметрическая задача (2 часа)

Требования к допустимой функции. Рассмотрение различных случаев задания вариации. Получение условия трансверсальности. Задача Дидоны. Задачи о наибольшей площади и наибольшем объёме.

Тема 5. Изопериметрическая задача с функционалом Больца (2 часа)

Изопериметрическая задача с подвижными концами. Доказательство теорем. Применение метода множителей Лагранжа.

Раздел 2. Методы и средства вариационного исчисления (8 часов)

Тема 1. Метод Ритца (2 часа)

Иные методы решения вариационных задач. Рассмотрение функционала как функции бесконечного множества переменных. Метод Ритца. Доказательство теоремы.

Тема 2. Метод Галеркина.

Приближённое решение краевых задач для дифференциальных уравнений. Условия к допустимой функции при методе Галеркина. Подбор функций, удовлетворяющих граничным условиям. Связь между методом Галеркина и методом Ритца.

Тема 3. Достаточные условия экстремума (2 часа)

Условия доставления локального минимума в задаче для функции. Взаимосвязь между условиями сильного и слабого экстремумов. Лемма о скруглении углов. Функция Вейерштрасса. Условие Вейерштрасса – Эрдмана. Вторая вариация функционала.

Тема 4. Поле экстремалей. (2 часа)

Понятия наклона поля в точке. Пучок кривых. Понятие поля экстремалей. Функция наклона поля. Условие Якоби. Уравнение Якоби.

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Практические занятия (36 час.)

Занятия 1-2. Классическая задача вариационного исчисления (4 часа)

– Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

– Постановка задачи. Шаблон решения. Вычисление производных.

– Уравнение Эйлера-Лагранжа. Решение уравнения. Определение констант интегрирования.

Занятие 3-4. Задачи на частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера (4 часа)

– Постановка задачи. Шаблоны решения для частных случаев.

– Вычисление производных.

– Уравнение Эйлера-Лагранжа, соответствующее частному случаю. Решение уравнения.

– Решение задачи о обрахистохроне, задача о наименьшей площади поверхности вращения.

– Рассмотрение задач не имеющих вариаций.

Занятие 5-6. Решение задачи Больца. (4 часа)

– Постановка задачи. Шаблон решения. Вычисление производных. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Решение уравнения.

– Задача вариационного исчисления со свободным правым концом, со свободным левым концом.

– Рассмотрение трансверсальных условий.

Занятие 7-8. Решение изопериметрической задачи. (4 часа)

– Постановка задачи. Шаблон решения.

– Вычисление производных. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Решение уравнения.

– Определение констант интегрирования. Определение значения λ.

Занятие 9-10. Решение изопериметрической задачи с ограничениями типа неравенств. (4 часа)

Занятие 11-12. Решение задач вариационного исчисления методом Ритца. (4 часа)

– Постановка задачи. Шаблон решения.

– Построение минимизирующей последовательности.

– Составление системы линейных уравнений для определения значений параметров. Решение системы.

– Составление приближенного решения задачи вариационного исчисления.

Занятие 13-14. Методы коллокаций и Галеркина (4 часа)

– Постановка задачи. Шаблон решения. Вычисление производных. Уравнение Эйлера-Лагранжа.

– Построение минимизирующей последовательности. Выбор базисной функции в случае метода Галеркина. Составление системы линейных уравнений для определения значений параметров. Решение системы. Составление приближенного решения задачи вариационного исчисления.

– Постановка задачи. Шаблон решения. Вычисление производных. Уравнение Эйлера-Лагранжа.

– Построение минимизирующей последовательности. Выбор базисной функции в случае метода коллокаций. Составление системы линейных уравнений для определения значений параметров. Решение системы. Составление приближенного решения задачи вариационного исчисления.

Занятие 15-16. Задачи на проверку выполнения достаточного условия экстремума. (4 часа)

– Вторая вариация функционала.

– Формула для второй вариации в задаче с закрепленными концами.

– Необходимые условия Лежандра и Якоби

Занятие 17-18. Применение метода Якоби (4 часа)

– Постановка задачи. Шаблон решения.

– Вычисление производных.

– Уравнение Гамильтона-Якоби. Решение уравнения Якоби.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Основы вариационного исчисления» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

– план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

– характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

– требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

– критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

<table>
<tr><th rowspan="2">№ п/п</th><th rowspan="2">Контролируемые разделы / темы дисциплины</th><th rowspan="2" colspan="2">Коды и этапы формирования компетенций</th><th colspan="2">Оценочные средства</th></tr>
<tr><th>текущий контроль</th><th>промежуточная аттестация</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">Основные задачи вариационного исчисления</td><td rowspan="3">ОПК-3</td><td>Знает:
− типовые задачи математической физики, приводящие к вариационным проблемам;
− теоретические основы и практические приложения разделов курса вариационного исчисления;</td><td>Собеседование (УО-1)</td><td>Вопросы к экзамену</td></tr>
<tr><td>Умеет:
− формулировать и доказывать основные результаты дисциплины; − применять методы вариационного исчисления к задачам техники, экономики и естествознания;
− использовать пакеты прикладных программ при решении задач;
− решать классические задачи вариационного исчисления;</td><td>Расчетно-графическое задание (ПР-12)</td><td rowspan="2">Задачи к экзамену</td></tr>
<tr><td>Владеет:
− методами решения вариационных задач;
− навыками использования средств вариационного</td><td>Контрольная работа (ПР-2)</td></tr>
</table>

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
			исчисления для решения прикладных задач математической физики.		
2	**Методы и средства вариационного исчисления**	ПК-1 ПК-3	Знает: постановку основных экстремальных задач, задач классического вариационного исчисления; методы их решения	Собеседование (УО-1)	Вопросы к экзамену
			Умеет: классифицировать основные классы экстремальных задач и решать их, применяя изучаемые принципы и методы экстремальных задач классического вариационного исчисления	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	Задачи к экзамену
			Владеет: общей теорией экстремальных задач вариационного исчисления и их применением в задачах механики	Контрольная работа (ПР-2)	

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. И. Л. Елисеенко Вариационное исчисление : учебно-методический комплекс для вузов / И. Л. Елисеенко ; Дальневосточный государственный технический университет - Владивосток : Изд-во Дальневосточного

технического университета, 2008. – 102 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:385009&theme=FEFU

2. Гюнтер, Н.М. Курс вариационного исчисления [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.М. Гюнтер. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 320 с. https://e.lanbook.com/book/119

3. Абдрахманов, В.Г. Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Г. Абдрахманов, А.В. Рабчук. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2014. — 112 с. https://e.lanbook.com/book/45675

4. Тракимус, Ю. В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю. В. Тракимус. — Электрон. текстовые данные. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2011. — 72 с. — 978-5-7782-1671-6. http://www.iprbookshop.ru/45416.html

5. Авербух, Ю. В. Простейшие задачи вариационного исчисления [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Ю. В. Авербух, Т. И. Сережникова ; под ред. А. Н. Сесекин. — Электрон. текстовые данные. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 41 с. — 978-5-7996-1250-4. http://www.iprbookshop.ru/65975.html

Дополнительная литература

1. Васильева А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов.- СПб: Лань, 2010. – 429 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:298688&theme=FEFU

2. Ильин В.А. Высшая математика : учебник для вузов / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет. - [Москва] : Проспект : Изд-во Московского университета , 2014. – 592 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:726406&theme=FEFU

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный - Москва : Айрис-пресс, 2014 – 603 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:747767&theme=FEFU

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

На практических занятиях преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения. Если полученных в аудитории знаний окажется недостаточно, студент может самостоятельно повторно прочесть лекцию или соответствующее пособие, просмотреть практикум с разобранными примерами. После выполнения задания, студент защищает его преподавателю в назначенное время.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Основы вариационного исчисления» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

- план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;
- характеристика заданий для самостоятельной работы студентов и методические рекомендации по их выполнению;
- критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для проведения лекционных и практических занятий используется мультимедийная аудитория со следующим оборудованием:

Акустическая система для потолочного монтажа с низким профилем, Extron SI 3CT LP (пара)

Акустическая система для потолочного монтажа с низким профилем, Extron SI 3CT LP (пара)

Акустическая система для потолочного монтажа с низким профилем, Extron SI 3CT LP (пара)

Врезной интерфейс с системой автоматического втягивания кабелей TLS TAM 201 Standart III

Документ-камера Avervision CP355AF

ЖК-панель 47", Full HD, LG M4716CCBA

Комплект удлинителей DVI по витой паре (передатчик/приёмник), Extron DVI 201 Tx/Rx

Матричный коммутатор DVI 4x4. Extron DXP 44 DVI PRO

Микрофонная петличная радиосистема УВЧ диапазона Sennheiser EW 122 G3 в составе рэкового приёмника EM 100 G3, передатчика SK 100 G3, петличного микрофон ME 4 с ветрозащитой и антенн (2 шт.)

Расширение для контроллера управления Extron IPL T CR48

Стойка металлическая для ЖК-дисплея У SMS Flatscreen FH T1450

Усилитель мощности, Extron XPA 2001-100V

Усилитель-распределитель DVI сигнала, Extron DVI DA2

Шкаф настенный 19" 7U, Abacom VSP-W960SG60

Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

по дисциплине «Основы вариационного исчисления»

Направление подготовки: 15.03.03 Прикладная механика

Профиль подготовки: «Математическое и компьютерное моделирование механических систем и процессов»

Форма подготовки очная

Владивосток
2016

1. План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1-2 неделя семестра	Выполнение расчетно-графического задания «Классическая задача вариационного исчисления»	5 час.	ПР-12
2	3-4 неделя семестра	Подготовка к контрольной работе «Классическая задача вариационного исчисления».	5 час.	ПР-2
3	5-6 неделя семестра	Выполнение расчетно-графического задания «Задача Больца»	5 час.	ПР-12
4	7-8 неделя семестра	Подготовка к устному опросу по разделу «Основные задачи вариационного исчисления	5 час.	УО-1
5	9-10 неделя семестра	Выполнение расчетно-графического задания «Задачи на условный экстремум»	5 час.	ПР-12
6	11-14 неделя семестра	Выполнение расчетно-графического задания «Прямые методы вариационного исчисления».	10 час.	ПР-12
7	15-14 неделя семестра	Подготовка к контрольной работе «Вариационные задачи с подвижными границами и задачи на условный экстремум»	5 час.	ПР-2
8	17-18 неделя семестра	Подготовка к устному опросу по разделу «Методы и средства вариационного исчисления»	5 час.	УО-1
9	Экзаменационная сессия	Подготовка к экзамену	45 часов	экзамен
		Итого	**90 час.**	

2. Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению

Устные опросы

Устные опросы осуществляется преподавателем по завершению изучения ряда разделов дисциплины. Вопросы и задания приведены в приложении 2. Для подготовки используется основная и дополнительная литература по дисциплине «Основы вариационного исчисления». Вопросы, возникающие в процессе подготовки, студент может задать преподавателю любо на консультациях.

Расчетно-графические задания

При организации самостоятельной работы преподаватель должен учитывать уровень подготовки каждого студента и предвидеть трудности, которые могут возникнуть при выполнении самостоятельной работы. Преподаватель дает каждому студенту индивидуальные и дифференцированные задания.

По разделам дисциплины выполняются следующие расчетно-графические работы:

1. Классическая задача вариационного исчисления.
2. Задача Больца.
3. Задачи на условный экстремум.
4. Прямые методы вариационного исчисления.

Задачи ИДЗ выбираются из учебно-методического комплекса «Вариационное исчисление» авт. И.Л. Елисеенко (основная литература [1]).

Примерные варианты расчетно-графических заданий.

Расчетно-графическое задание «Классическая задача вариационного исчисления»

Задание 1. Найти экстремаль функционала.

$$J(y)=\int_0^1\left((y')^2+y'+1\right)dx \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y(1)=2.$$

Решение. Здесь $F(y')=(y')^2+y'+1$; производные $F'(y')=2y'+1$, $F''(y')=2$. Уравнение Эйлера имеет вид: $2\cdot y''=0$, откуда $y=c_1x+c_2$. Значения c_1 и c_2 найдём из условия прохождения экстремали через точки $M(0;1)$ и $N(1;2)$: $c_2=1$; $c_1+c_2=2$; то есть $c_1=c_2=1$. Таким образом, экстремалью является прямая $y=x+1$.

Функция F зависит только от x и y', т. е. $F = F(x, y')$, т. к. в этом случае $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, то уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$, откуда сразу находим $\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = c_1$. Выражая из этого уравнения y' и интегрируя, получим общее решение уравнения Эйлера.

Задание 2. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C^1([x_1, x_2])$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ при указанных граничных условиях.

$$J(\bar{y}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1 \cdot y_2 \right] dx,$$

$$y_1(0) = 0;\; y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;\; y_2(0) = 0;\; y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Решение. Поскольку $\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right) = 2y_2 - \frac{d}{dx}(2y_1') = 2y_2 - 2y_1'' = 0,$

и $\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right) = 2y_1 - \frac{d}{dx}(2y_2') = 2y_1 - 2y_2'' = 0.$

Система дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид:

$$\begin{cases} y_1'' - y_2 = 0, \\ y_2'' - y_1 = 0. \end{cases}$$

Исключая одну из функций, например, y_2, получаем $y_1^{IV} - y_1 = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 1 = 0$ имеет корни: $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$, поэтому решение уравнения представимо в виде:

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Из условия $y_2 = y_1''$ находим $y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$.

Используя граничные условия

$$y_1(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_4 = 1,$$

$$y_2(0) = c_1 + c_2 - c_3 = 0,$$

$$y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_4 = -1,$$

находим $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0,\ c_4 = 1.$

Следовательно, $y_1 = \sin x,\ y_2 = -\sin x.$

Задание 3. Найти допустимую экстремаль в задаче со старшими производными:

$$J(y) = \int_0^1 e^{-x}(y'')^2 dx,\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1;\ y(1) = e;\ y'(1) = 2e.$$

Решение. Уравнение Эйлера – Пуассона в данной задаче имеет вид: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0.$ Найдём производные $\frac{\partial F}{\partial y} = 0;$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0;$ $\frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''e^{-x};$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = -e^{-x}\cdot 2y'' + 2y'''\cdot e^{-x};$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = e^{-x}\cdot 2y'' - 4e^{-x}\cdot y''' + 2e^{-x}\cdot y^{IV}.$$

Уравнение Эйлера – Пуассона запишется в виде

$$2e^{-x}\cdot\left(y^{IV} - 2y''' + y''\right) = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_{3,4} = 1,$ поэтому общее решение можно записать в виде $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x.$

Найдём его производную $y'(x) = c_2 + (c_3 + c_4)e^x + c_4 x e^x$. Используя граничные условия

$y(0) = c_1 + c_3 = 0,$

$y'(0) = c_2 + c_3 + c_4 = 1,$

$y(1) = c_2 + (c_3 + c_4) \cdot e = e,$

$y'(1) = (c_3 + 2c_4) \cdot e = 2e,$

найдём константы $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0,\ c_4 = 1.$

Допустимая экстремаль $\tilde{y}(x) = x \cdot e^x$.

Расчетно-графическое задание «Задача Больца»

Задание 1. Найти экстремум функционала

$$J(x) = \int_0^T \left[(y')^2 - y^2 \right] dx + y(0) + y^2(T) \to \inf .$$

Решение. В этой задаче

$$F(x, y, y') = (y')^2 - y^2,\ L\big(y(x_1), y(x_2)\big) = y_1 + y_2^2.$$

Поскольку $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y,\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$, запишем уравнение Эйлера – Лагранжа: $y + y'' = 0$.

Общее решение этого уравнения имеет вид: $y(x) = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$. Учитывая, что $\dfrac{\partial L\big(y(x_1), y(x_2)\big)}{\partial y_1} = 1$ и $\dfrac{\partial L\big(y(x_1), y(x_2)\big)}{\partial y_2} = 2y_2$, запишем условия трансверсальности: $\begin{cases} 2y'(T) = -2y(T), \\ 2y'(0) = 1. \end{cases}$

Вычисляя производную функции $y(x)$ в точках $x = 0$ и $x = T$ и используя условия трансверсальности, получим уравнения для определения постоянных A и B:

$$y'(0) = A = \frac{1}{2},$$
$$y'(T) = A\cos T - B\sin T = -(A\sin T + B\cos T).$$

Решая эту систему, найдём $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{2} \cdot \frac{tgT + 1}{tgT - 1}$.

Таким образом, необходимым условиям слабого локального минимума задачи удовлетворяет функция $\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin t + \frac{1}{2} \cdot \frac{tgT + 1}{tgT - 1} \cdot \cos t.$

Задание 2. Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int_{-1}^{2} \left(y_1' \cdot y_2' + y_1 \cdot y_2 + (y_1')^2 + (y_2')^2 \right) dx + y_1(-1) \cdot y_2(2) \to \inf,$$
$$y_1(2) = 2.$$

Решение. Вычислим производные

$$\begin{matrix} F'_{y_1} = y_2 \\ F'_{y_2} = y_1 \end{matrix}; \qquad \begin{matrix} F'_{y_1'} = y_2' + 2y_1' \\ F'_{y_2'} = y_1' + 2y_2' \end{matrix}$$

Запишем систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases} y_2 - y_2'' - 2y_1'' = 0, \\ y_1 - y_1'' - 2y_2'' = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему.

1. Сложим уравнения системы $(y_1 + y_2) - (y_1'' + y_2'') - 2(y_1'' + y_2'') = 0.$ Обозначив $z = y_1 + y_2$, получим уравнение $z - 3z'' = 0$. Его характеристическое уравнение $3\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, поэтому $z = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} = y_1 + y_2$.

2. Вычтем из первого уравнения системы уравнений Эйлера второе уравнение: $(y_2 - y_1) - (y_2'' - y_1'') + 2(y_2'' - y_1'') = 0$. Обозначив $\omega = y_2 - y_1$, перепишем уравнение в виде $\omega'' + \omega = 0$. Его характеристическое уравнение

$\lambda^2+1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm i$, поэтому решением является функция $\omega=c_3\sin x+c_4\cos x=y_2-y_1$.

Решая систему $\begin{cases} y_1+y_2=c_1e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} \\ y_2-y_1=c_3\sin x+c_4\cos x \end{cases}$ относительно y_1 и y_2, получаем:

$$y_1=\frac{1}{2}\left(c_1e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}-c_3\sin x-c_4\cos x\right)$$

$$y_2=\frac{1}{2}\left(c_1e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_3\sin x+c_4\cos x\right),$$

Или, включая числовой множитель $\frac{1}{2}$ в константы,

$$y_1=c_1e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}-c_3\sin x-c_4\cos x,$$
$$y_2=c_1e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_3\sin x+c_4\cos x.$$

Вычислим производные полученных функций:

$$y_1'=\frac{1}{\sqrt{3}}c_1e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x}-\frac{1}{\sqrt{3}}c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}-c_3\cos x+c_4\sin x,$$

$$y_2'=\frac{1}{\sqrt{3}}c_1e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x}-\frac{1}{\sqrt{3}}c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_3\cos x-c_4\sin x.$$

В этой задаче дано лишь одно граничное условие, следовательно, только один конец закреплён (правый конец функции $y_1(x)$). Для трёх других концов необходимо использовать условия трансверсальности.

Используя обозначения $y_{11}=y_1(-1)$, $y_{12}=y_2(-1)$, $y_{21}=y_1(2)$, $y_{22}=y_2(2)$, $L(y_{11},y_{22})=y_{11}\cdot y_{22}$, запишем систему граничных условий:

1) для левого конца $x_1=-1$ для функции y_1: $\dfrac{\partial F}{\partial y_1'}(-1)=\dfrac{\partial L(y_{11},y_{22})}{\partial y_{11}}$;

2) для правого конца $x_2=2$ для функции y_1: $y_1(2)=2$ - задано;

3) для левого конца $x_1=-1$ для функции y_2: $\dfrac{\partial F}{\partial y_2'}(-1)=\dfrac{\partial L(y_{11},y_{22})}{\partial y_{12}}$;

4) для правого конца $x_2=2$ для функции y_2: $\dfrac{\partial F}{\partial y_2'}(2)=-\dfrac{\partial L(y_{11},y_{22})}{\partial y_{22}}$.

Перепишем систему в обозначениях задачи:

$$
\begin{aligned}
&y_2'(-1)+2y_1'(-1)=y_2(2),\\
&y_1(2)=2,\\
&y_1'(-1)+2y_2'(-1)=0,\\
&y_1'(2)+2y_2'(2)=-y_1(-1).
\end{aligned}
$$

Вычисляя значения функций и их производных, получим систему уравнений для определения коэффициентов:

1) $$\frac{1}{\sqrt{3}}c_1e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{3}}c_2e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+c_3\cos(-1)-c_4\sin(-1)+\frac{2}{\sqrt{3}}c_1e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}-$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}c_2e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}-2c_3\cos(-1)+2c_4\sin(-1)=c_1e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}+c_2e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}+$$
$$+c_3\sin 2+c_4\cos 2;$$

2) $$c_1e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}+c_2e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}-c_3\sin 2-c_4\cos 2=2;$$

3) $\frac{1}{\sqrt{3}}c_1e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{3}}c_2e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}-c_3\cos(-1)+c_4\sin(-1)+\frac{2}{\sqrt{3}}c_1e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}-$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}c_2e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+2c_3\cos(-1)-2c_4\sin(-1)=0;$

4) $\frac{1}{\sqrt{3}}c_1e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{3}}c_2e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}-c_3\cos 2+c_4\sin 2+\frac{2}{\sqrt{3}}c_1e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}-$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}c_2e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}+2c_3\cos 2-2c_4\sin 2=-c_1e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}-c_2e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+$

$+c_3\sin(-1)+c_4\cos(-1).$

Решая систему, находим коэффициенты $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$. Подставляя их в уравнение экстремали, получаем допустимую экстремаль.

Расчетно-графическое задание «Задачи на условный экстремум»

Задание 1. Требуется найти минимум функционала

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((y')^2-y^2\right)dx \tag{22}$$

при ограничениях

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\cdot\sin x\,dx=1 \tag{23}$$

$$y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{24}$$

Решение. В этой задаче функция $L(x,y,y',\lambda_0,\lambda)$ имеет вид $L=\lambda_0\left((y')^2-y^2\right)+\lambda y\cdot\sin x.$

Вычисляя производные $L'_y(x,y,y',\lambda_0,\lambda)=-2\lambda_0y+\lambda\sin x$, $L'_{y'}=2\lambda_0y'$, запишем уравнение Эйлера – Лагранжа:

$$-2\lambda_0 y + \lambda \sin x - 2\lambda_0 y'' = 0. \tag{25}$$

1. Рассмотрим нерегулярный случай, когда $\lambda_0 = 0$.

Уравнение (25) имеет вид $\lambda \cdot \sin x = 0$, откуда следует, что $\lambda = 0$, и, таким образом, λ и λ_0 одновременно равны нулю, что противоречит условию согласования знаков, поэтому нерегулярных решений в задаче нет.

2. Пусть $\lambda_0 \neq 0$. Поделим уравнение (25) на λ_0:

$$-2(y + y'') + \frac{\lambda}{\lambda_0} \sin x = 0.$$

Обозначим $\frac{\lambda}{2\lambda_0} = \upsilon$ и перепишем дифференциальное уравнение (25) в виде

$$y + y'' = \upsilon \cdot \sin x. \tag{26}$$

Решение однородного уравнения $y(x) = A\sin x + B\cos x.$ Частное решение ищем в виде $y_ч(x) = Cx\sin x + Dx\cos x.$

Вычисляя вторую производную $y''_ч(x)$ и подставляя её в уравнение (26), найдём величины $C = 0,\ D = -\frac{\upsilon}{2}$. Таким образом, частное решение имеет вид $y_ч = -\frac{\upsilon}{2} x\cos x.$

Общее решение уравнения (26) представлено в виде

$$y(x) = A\sin x + B\cos x - \frac{\upsilon}{2} x\cos x.$$

Используя граничные условия (24), найдём $y(0) = B = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = A = 0.$ Таким образом, $y(x) = -\frac{\upsilon}{2} x\cos x$.

Для определения множителя υ используем интегральное условие (23): $-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\upsilon}{2} x\cos x\sin\, x dx = -\frac{\upsilon\pi}{16} = 1,$ откуда $\upsilon = -\frac{16}{\pi}$. Таким образом, необходимому условию минимума удовлетворяет функция $\tilde{y}(x) = \frac{8}{\pi} x \cdot \cos x.$

Расчетно-графическое задание «Прямые методы вариационного исчисления»

Пример 1. Рассмотрим вариационную задачу вида

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left((y')^2 - y^2 - 2xy \right) dx \to \inf, \qquad (1)$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0. \qquad (2)$$

Решим её с помощью теоремы о достаточных условиях экстремума и метода Ритца.

Решение.

1. Найдём допустимую экстремаль. Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y + x = 0$.

Решение однородного уравнения: $y_0(x) = c_1 \cdot \sin\, x + c_2 \cdot \cos x$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_ч = ax + b$, тогда $y_ч = -x$. Общее решение уравнения Эйлера запишется в виде $\tilde{y}(x) = c_1 \cdot \sin\, x + c_2 \cdot \cos x - x$.

Используем граничные условия $\tilde{y}(0) = c_2 = 0,\ \tilde{y}(1) = c_1 \cdot \sin 1 - 1 = 0,$ откуда $c_1 = (\sin 1)^{-1}$.

Допустимая экстремаль:

$$\tilde{y}(x) = (\sin 1)^{-1} \cdot \sin\, x - 1. \qquad (3)$$

Для задачи выполнено усиленное условие Лежандра: $F''_{y'y'} = 2 > 0.$ Сопряжённый функционал

$$K(h) = \int_0^1 \left[\left(F''_{y'y'} \cdot h', h' \right) + 2\left(F''_{y'y} \cdot h', h \right) + \left(F''_{yy} \cdot h, h \right) \right] dx$$

имеет вид

$$K(h) = \int_0^1 \left(2(h')^2 - 2h^2 \right) dx, \; h(0) = 0, \; h(1) = 0.$$

Уравнение Эйлера для сопряжённого функционала является уравнением Якоби для исходной задачи и имеет вид $h'' + h = 0.$

Решение h, удовлетворяющее условию $h(0) = 0$, равно $c \cdot \sin x$. Очевидно, что не существует нетривиального решения $h(x)$ такого, что $h(\tau) = 0, \; \tau \in [0;1]$. Точки, сопряжённые к точке 0, на интервале $[0;1]$ отсутствуют, поэтому выполнены достаточные условия оптимальности и допустимая экстремаль (3) является точкой абсолютного минимума функционала.

2. Будем строить последовательность Ритца, используя систему $\left\{ x^n \right\}_{n=1}^{\infty}$, тогда каждый элемент последовательности Ритца, удовлетворяющий граничным условиям, будет содержать множителем функцию $x \cdot (1 - x)$. Положим, что $\varphi_n(x) = (1 - x) \cdot x^n, \; n \ge 1.$

Пусть $n = 1$. Ищем решение задачи (14) – (15) в виде

$$y_1(x) = a_1 \cdot \varphi_1(x) = a_1 \cdot (1 - x) \cdot x.$$

Подстановка в интеграл даёт

$$J_1(a_1) = \int_0^1 \left(a_1^2 \cdot (1 - 2x)^2 - a_1^2 \cdot (1 - x)^2 \cdot x^2 - a_1^2 \cdot (1 - x) \cdot x^2 \right) dx =$$

$$= a_1^2 \cdot \frac{3}{10} - a_1 \cdot \frac{1}{6}.$$

Из условия стационарности $\dfrac{dJ_1}{da_1}=0$ найдём точку абсолютного минимума $a_1=\dfrac{5}{18}$, откуда $y_1^*(x)=\dfrac{5}{18}(1-x)\cdot x$.

Пусть $n=2$. Ищем решение задачи (14) – (15) в виде

$$y_2(x)=a_1\cdot\varphi_1(x)+a_2\cdot\varphi_2(x)=a_1\cdot(1-x)\cdot x+a_2\cdot(1-x)\cdot x^2.$$

Подстановка в функционал даёт

$$J_2(a_1,a_2)=\int_0^1\Big[\Big(a_1\cdot(1-2x)+a_2\cdot\big(2x-3x^2\big)\Big)^2-$$
$$-\Big(a_1(1-x)x+a_2(1-x)x^2\Big)^2-2x\Big(a_1(1-x)x+a_2(1-x)x^2\Big)\Big]dx=$$
$$=\frac{3}{10}a_1^2+\frac{13}{105}a_2^2+\frac{3}{10}a_1\cdot a_2-\frac{1}{6}a_1-\frac{1}{10}a_2.$$

Из условий стационарности $\dfrac{\partial J_2}{\partial a_i}=0,\ i=1,2$ находим точку абсолютного минимума $a_2=\dfrac{7}{41},\ a_1=\dfrac{71}{369}$, откуда

$$y_2^*(x)=\frac{71}{369}\cdot(1-x)x+\frac{7}{41}\cdot(1-x)\cdot x^2.$$

Приведём таблицу, которая иллюстрирует сходимость последовательности y_n^* к решению:

x	$\tilde{y}\ (x)$	$y_1^*(x)$	$y_2^*(x)$
0,25	0,044013654	0,052083333	0,044080284
0,5	0,069746963	0,069444444	0,069444444
0,75	0,060056166	0,052083333	0,060086382

Из таблицы видно, что значения уже второй из функций минимизирующей последовательности отличаются от значений точного решения в выбранных точках отрезка не более чем на $3{,}1 \cdot 10^{-4}$.

Контрольные работы

Для определения уровня освоения программы дисциплины проводятся контрольные работы. Темы контрольных работ, типовой вариант, а также критерии оценки приведены в приложении 2.

Критерии оценки выполнения самостоятельной работы

Самостоятельная работа студентов расчетно-графические задания, подготовку к выполнению контрольных работ и к устным опросам. Критерии оценки каждого вида работы приведены в приложении 2.

Приложение 2 к рабочей программе учебной дисциплины

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине «Основы вариационного исчисления»
Направление подготовки – 15.03.03 «Прикладная механика»
профиль «Математическое и компьютерное моделирование механических систем и процессов»
Форма подготовки (очная)

Владивосток
2016

Паспорт ФОС

<table>
<tr><th>Код и формулировка компетенции</th><th colspan="2">Этапы формирования компетенции</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ОПК-3
способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат</td><td>Знает</td><td>– типовые задачи математической физики, приводящие к вариационным проблемам;
– теоретические основы и практические приложения разделов курса вариационного исчисления;</td></tr>
<tr><td>Умеет</td><td>– формулировать и доказывать основные результаты дисциплины;
– применять методы вариационного исчисления к задачам техники, экономики и естествознания;
– использовать пакеты прикладных программ при решении задач;
– решать классические задачи вариационного исчисления;</td></tr>
<tr><td>Владеет</td><td>– методами решения вариационных задач;
– навыками использования средств вариационного исчисления для решения прикладных задач математической физики.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ПК-1
способность выявлять сущность научно-технических проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат</td><td>Знает</td><td>– определение функционала и его первой вариации;
– определение сильного и слабого экстремума функционала;
– необходимое условие экстремума функционала;
– основные леммы вариационного исчисления;
– классические задачи вариационного исчисления;
– уравнение Эйлера</td></tr>
<tr><td>Умеет</td><td>– построить вариацию функционала и получить необходимое условие экстремума функционала для вариационной задачи с закрепленными концами и ее обобщений;
– решать основные типы вариационных задач на условный экстремум;
– исследовать функционал на экстремум, используя необходимые и достаточные условия;
– классифицировать линейные интегральные уравнения;
– сводить задачу Штурма-Лиувилля к интегральному</td></tr>
</table>

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
		уравнению
	Владеет	– методами решения простейшей вариационной задачи и ее обобщений; – методами исследования функционала на экстремум; – методами решения интегральных уравнений; – навыками использования математического аппарата для решения физических задач.
ПК-3 готовностью выполнять научно-исследовательские работы и решать научно-технические задачи в области прикладной механики на основе достижений техники и технологий, классических и технических теорий и методов, физико-механических, математических и компьютерных моделей, обладающих высокой степенью адекватности реальным процессам, машинам и конструкциям	Знает	постановку основных экстремальных задач, задач классического вариационного исчисления; методы их решения
	Умеет	классифицировать основные классы экстремальных задач и решать их, применяя изучаемые принципы и методы экстремальных задач классического вариационного исчисления
	Владеет	обшей теорией экстремальных задач вариационного исчисления и их применением в задачах механики

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	**промежуточная аттестация**
1	**Основные задачи вариационного исчисления**	ОПК-3	Знает: – типовые задачи математической физики, приводящие к вариационным проблемам; – теоретические основы и практические приложения разделов курса вариационного исчисления;	Собеседование (УО-1)	Вопросы к экзамену
			Умеет: – формулировать и доказывать основные результаты	Расчетно-графическое	Задачи к экзамену

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
			дисциплины; − применять методы вариационного исчисления к задачам техники, экономики и естествознания; − использовать пакеты прикладных программ при решении задач; − решать классические задачи вариационного исчисления;	задание (ПР-12)	
			Владеет: − методами решения вариационных задач; − навыками использования средств вариационного исчисления для решения прикладных задач математической физики.	Контрольная работа (ПР-2)	
2	**Методы и средства вариационного исчисления**	ПК-1 ПК-3	Знает: постановку основных экстремальных задач, задач классического вариационного исчисления; методы их решения	Собеседование (УО-1)	Вопросы к экзамену
			Умеет: классифицировать основные классы экстремальных задач и решать их, применяя изучаемые принципы и методы экстремальных задач классического вариационного исчисления	Расчетно-графическое задание (ПР-12)	Задачи к экзамену
			Владеет: обшей теорией экстремальных задач вариационного исчисления и их применением в задачах механики	Контрольная работа (ПР-2)	

Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	критерии	показатели

ОПК-3 способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат	Знает	– типовые задачи математической физики, приводящие к вариационным проблемам; – теоретические основы и практические приложения разделов курса вариационного исчисления;	- знание определений и основных понятий вариационного исчисления - знание базовых методов вариационного исчисления	способность дать определения основных понятий вариационного исчисления; - способность перечислить и раскрыть суть базовых методов вариационного исчисления;
	Умеет	– формулировать и доказывать основные результаты дисциплины; – применять методы вариационного исчисления к задачам техники, экономики и естествознания; – использовать пакеты прикладных программ при решении задач; – решать классические задачи вариационного исчисления;	- умение формулировать задачи вариационного исчисления -умение находить экстремали и исследовать их характер;	- способность формулировать задачи вариационного исчисления - способность находить экстремали и исследовать их характер;
	Владеет	– методами решения вариационных задач; – навыками использования средств вариационного исчисления для решения прикладных задач математической физики.	- владение прямыми методами вариационного исчисления: метод Ритца и др. - владение методологией использования прямых методов для решения задач механики	- способность сформулировать и описать суть прямых методов вариационного исчисления: метода Ритца и др. - способность использовать прямые методы вариационного исчисления при решении задач механики
ПК-1 способность выявлять сущность научно-технических проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и привлекать для их решения соответствующ	Знает	– определение функционала и его первой вариации; – определение сильного и слабого экстремума функционала; – необходимое условие экстремума функционала; – основные леммы вариационного исчисления; – классические задачи вариационного исчисления; – уравнение	- знание основных определений и понятий вариационных принципов механики и физики	- способность дать определения основных понятий вариационных принципов механики и физики; - способность раскрыть основные положения вариационных принципов механики и физики

ий физико-математический аппарат		Эйлера		
	Умеет	– построить вариацию функционала и получить необходимое условие экстремума функционала для вариационной задачи с закрепленными концами и ее обобщений; – решать основные типы вариационных задач на условный экстремум; – исследовать функционал на экстремум, используя необходимые и достаточные условия; – классифицировать линейные интегральные уравнения; сводить задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению	- умение получить общее решения уравнения Эйлера, - умение получить необходимые условия минимума в задаче Больца - умение использовать метод вариаций -умение применить численные методы вариационного исчисления: Ритца, метод Галеркина к решению задач различной природы	- способность получить общее решения уравнения Эйлера, - способность получить необходимые условия минимума в задаче Больца - способность использовать метод вариаций -способность применить численные методы вариационного исчисления: Ритца, метод Галеркина к решению задач различной природы
	Владеет	– методами решения простейшей вариационной задачи и ее обобщений; – методами исследования функционала на экстремум; – методами решения интегральных уравнений; навыками использования математического аппарата для решения физических задач.	- владение методологией применения методов вариационного исчисления и математической физики к постановке различных задач, имеющих естественнонаучное содержание - владение методами решения и исследования задач прикладной механики, используя положения вариационного исчисления и математической физики	- способность применить методы вариационного исчисления и математической физики к постановке различных задач, имеющих естественнонаучное содержание - способность применить методы вариационного исчисления и математической физики к решению и исследованию задач прикладной механики
ПК-3 готовностью выполнять научно-исследовательские работы и решать научно-технические	Знает	постановку основных экстремальных задач, задач классического вариационного исчисления; методы их решения	- знание постановки задач вариационного исчисления как задач на отыскание наибольшего и наименьшего значения заданного функционала; - знание общих	- способность выполнить постановку задач вариационного исчисления как задач на отыскание наибольшего и наименьшего значения заданного функционала; - способность дать определения основных

задачи в области прикладной механики на основе достижений техники и технологий, классических и технических теорий и методов, физико-механических, математических и компьютерных моделей, обладающих высокой степенью адекватности реальным процессам, машинам и конструкциям			математических принципов, лежащих в основе методов решения вариационных задач	понятий и раскрыть суть общих математических принципов, лежащих в основе методов решения вариационных задач
	Умеет	классифицировать основные классы экстремальных задач и решать их, применяя изучаемые принципы и методы экстремальных задач классического вариационного исчисления	- умение строить математические модели прикладных задач на экстремум; - умение сводить вариационные задачи к решению вспомогательных дифференциальных уравнений и систем; - умение проводить количественный и качественный анализ полученных решений; - умение интерпретировать полученное решение в терминах параметров исходной задачи;	- способность строить математические модели прикладных задач на экстремум; - способность сводить вариационные задачи к решению вспомогательных дифференциальных уравнений и систем; - способность проводить количественный и качественный анализ полученных решений; - способность интерпретировать полученное решение в терминах параметров исходной задачи;
	Владеет	обшей теорией экстремальных задач вариационного исчисления и их применением в задачах механики	- владение принципами построения математических моделей задач на экстремум; - владение математическим аппаратом решения вариационных задач посредством вычисления вариации функционала, - владение методами сведения вариационных задач к дифференциальному уравнению или системе; - владение навыками аналитического решения интегрируемых случаев дифференциальных уравнений - владение навыками качественного анализа решений интегрируемых случаев дифференциальных уравнений	- способность построить математическую модель задач на экстремум; - способность решить вариационную задачу посредством вычисления вариации функционала, - способность свести вариационную задачу к дифференциальному уравнению или системе; - способность аналитически решить интегрируемые случаи дифференциальных уравнений; - способность провести качественный анализ решения интегрируемых случаев дифференциальных уравнений

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

Оценочные средства для промежуточной аттестации

Перечень типовых экзаменационных вопросов

1. Классическая задача вариационного исчисления, задача о брахистохроне, о наименьшей площади поверхности вращения. Понятие вариации кривой и функционала.

2. Основная лемма вариационного исчисления; необходимые условия экстремума интегрального функционала; необходимые условия минимума второго порядка.

3. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от y' или зависит от y' линейно.

4. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от x и y или не зависит от y.

5. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Подынтегральная функция не зависит от x; подынтегральная функция зависит только от y; подынтегральная функция имеет вид:

$$F(x, y, y') = p(x) \cdot (y')^2 + q(x) \cdot y^2 + 2f(x) \cdot y.$$

6. Классическая задача вариационного исчисления: решение задачи о минимальной площади поверхности вращения.

7. Классическая задача вариационного исчисления: решение задачи о брахистохроне.

8. Задача вариационного исчисления для случая подынтегральной функции, зависящей от производных высших порядков.

9. Задача Больца. Необходимые условия минимума в задаче Больца. Многомерный случай задачи Больца. Задача со смешанными ограничениями.

10. Задача Больца со старшими производными.

11. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума в изопериметрической задаче.

12. Задача Дидоны.

13. Изопериметрическая задача с ограничениями типа неравенств; с функционалом типа Больца; с подвижными концами.

14. Необходимые условия сильного минимума в классической задаче вариационного исчисления.

15. Сопряженные точки, условие Якоби, поле экстремалей.

16. Достаточные условия минимума в классической задаче вариационного исчисления.

17. Метод Ритца решения задачи вариационного исчисления.

18. Метод Галеркина решения задачи вариационного исчисления.

Примеры типовых экзаменационных задач

В задачах 1 – 6 найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

1. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+xy\right)dx;\quad y(0)=y(1)=0.$

2. $J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left(4y\cos x+(y')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=y(\pi)=0.$

3. $J(y)=\int\limits_1^{e}\left(2y-x^2\cdot(y')^2\right)dx;\quad y(1)=e;\ y(e)=0.$

4. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+yy'+12xy\right)dx;\quad y(0)=y(1)=0.$

5. $J(y)=\int\limits_0^1\left(e^y+xy'\right)dx;\quad y(0)=0;\ y(1)=1.$

6. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+y^2+xy\right)dx;\quad y(0)=y(1)=0.$

В задачах 7 – 10 найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C^1([x_1, x_2])$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ при указанных граничных условиях.

$$7.\ J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi} \left((y_1')^2 - (y_2')^2 + 2y_1' \cdot y_2' + 2y_1 \cos x + 2y_2^2\right) dx;$$

$$y_1(0) = -1;\ y_2(0) = y_2(\pi) = 0;\ y_1(\pi) = 1 + \pi.$$

$$8.\ J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1\right) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 1;\ y_1(1) = \frac{3}{2};\ y_2(1) = 1.$$

$$9.\ J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left(\frac{(y_1')^2 + (y_2')^2}{2} + 4y_1 \cdot y_2\right) dx;$$

$$y_1(0) = 0;\ y_2(0) = y_1(1) = 1;\ y_2(1) = \frac{1}{2}.$$

$$10.\ J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left(\frac{(y_1')^2 + (y_2')^2}{2} - y_1 \cdot y_2\right) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0;\ y_1(1) = y_2(1) = 1.$$

В задачах 11-14 найти экстремали следующих функционалов в задачах Больца.

$$11.\ J(y) = \int_0^1 (y')^2\, dx + 4y^2(0) - 5y^2(1).$$

$$12.\ J(y) = \int_1^2 \left(x \cdot (y')^2 + y\right) dx; \quad y(1) = 0; \quad y(2)$$

– свободный конец.

13. $J(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2(y')^2+y\cdot y'-8y^2\right)dx+y(0)+y^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$

14. $J(y)=\int\limits_1^2\left((y')^2+12xy\right)dx+12y(1)+y^2(2).$

В задачах 15-17 найти допустимые экстремали в изопериметрических задачах.

15. $J(y)=\int\limits_0^1(y')^2dx;\ \ y(0)=0;\ \ y(1)=1;\ \ \int\limits_0^1 xydx=0.$

16. $J(y)=\int\limits_0^1(y')^2dx;\ \ y(0)=y(1)=0;\ \ \int\limits_0^1 ydx=1.=0.$

17. $J(y)=\int\limits_0^{\pi}(y')^2dx;\ \ y(0)=0;\ \ y(\pi)=1;\ \ \int\limits_0^{\pi} y\sin xdx=0.$

18. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$J(y)=\int\limits_0^1\left(x^3(y'')^2+100xy^2-20xy\right)dx\to\inf;\qquad y(1)=y'(1)=0.$$

Решение можно искать в виде: $y_n(x)=(x-1)^2\cdot(a_0+a_1x+...+a_nx^n)$. Провести вычисления при $n=1$ и $n=2$.

19. Найти методом Ритца приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$J(y)=\int\limits_0^2\left((y')^2+y^2-2xy\right)dx\to\inf,\qquad y(0)=y(2)=0$$

и сравнить его с точным решением. Приближенное решение можно искать в виде $y_n(x)=x\cdot(1-x)\cdot(a_0+a_1x+...+a_nx^n)$.

Провести вычисления при $n=0$ и $n=1$.

20. При изучении колебаний заделанного клина постоянной толщины приходится исследовать на экстремум функционал

$$J(y)=\int\limits_0^1\left(a\cdot x^3\cdot(y'')^2-b\cdot x\cdot y^2\right)dx\to\inf\,,\quad y(1)=y'(1)=0,$$

где a и b - положительные постоянные. За координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям, можно взять $(x-1)^2$; $(x-1)^2\cdot x$; $(x-1)^2\cdot x^2$; …; $(x-1)^2\cdot x^{k-1}$; …, следовательно,

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x-1)^2x^{k-1}.$$

Вычисления провести при $n=2$.

Принцип составления экзаменационного билета

Первые два вопроса являются теоретическими и предназначены для оценивания порогового уровня освоения дисциплины. Третий вопрос, в котором необходимо решить задачу, предназначен для оценки продвинутого и высокого уровня освоения.

Пример экзаменационного билета

1. Основная лемма вариационного исчисления; необходимые условия экстремума интегрального функционала; необходимые условия минимума второго порядка.

2. Метод Ритца решения задачи вариационного исчисления.

3. Найти все экстремали функционала $J(y)$ удовлетворяющие заданным граничным условиям.

$$J(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left((y'')^2-(y')^2\right)dx;\quad y(0)=y'(0)=0;$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2};\; y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Критерии выставления оценки студенту на экзамене по дисциплине «Основы вариационного исчисления»

Баллы (рейтинговой оценки)	**Оценка экзамена** (стандартная)	**Требования к сформированным компетенциям**
86-100	«отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту: обнаружившему всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умение применять его и владение изученным материалом; излагающему ответы полно, последовательно и логически стройно; усвоившему взаимосвязь основных и производных понятий; проявившему творческие способности в знании, умении и владении изученным материалом; знающему, умеющему и владеющему навыками приемами выполнения практических заданий и профессиональных задач; показывающему знакомство с основной и дополнительной учебной литературой; способному самостоятельно пополнять и развивать знания, умения и навыки в профессиональной деятельности
76-85	*«хорошо»*	Оценка «хорошо» выставляется студенту: обнаружившему системное знание, хорошее умение и владение учебным материалом; излагающему ответы грамотно и по существу заданных вопросов; не допускающему грубых неточностей; умеющему применять основные методики решения стандартных задач; способному самостоятельно пополнять умения и навыки в учебной деятельности
61-75	*«удовлетворительно»*	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту: обнаружившему знание учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и профессиональной деятельности; усвоившему взаимосвязь основных понятий; допускающему в ответах неточности, испытывающему затруднения при решении практических задач, способному ликвидировать пробелы в знаниях и умениях под руководством преподавателя
0-60	*«неудовлетворительно»*	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту: обнаружившему большие пробелы в знание основного учебного материала; допускающему принципиальные ошибки в изложении материала или в ответах на вопросы; не умеющему применять имеющиеся знания в решении практических и профессиональных задач; не владеющему основными методиками решения задач или испытывающему значительные затруднения в этом; изучившим материал в объеме, недостаточном для дальнейшей учебы и профессиональной деятельности; не могущему продолжить обучение без дополнительных занятий дисциплине

Оценочные средства для текущей аттестации

Текущая аттестация по дисциплине «Основы вариационного исчисления» проводится в форме контрольных мероприятий (устного опроса, расчетно-графического задания, контрольных работ) по оцениванию фактических результатов обучения студентов и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

– учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);

– степень усвоения теоретических знаний;

– уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;

– результаты самостоятельной работы.

Вопросы для устных опросов по дисциплине «Основы вариационного исчисления»

1. Введение: задачи о поиске экстремума в теории управления, пример задачи оптимального управления, общее представление о вариационном исчислении.
2. Примеры содержательных задач о поиске экстремума интегрального функционала (о минимуме определенного интеграла, брахистохроне, о минимальной поверхности вращения и др.).
3. Понятие функционала. Функционалы в метрических и линейных пространствах.
4. Формализованные задачи вариационного исчисления. Пространство $C^1[a,b]$: норма, метрика, близость элементов. Классификация экстремумов.
5. Условия локального экстремума функционалов.
6. Простейшая основная задача вариационного исчисления. Необходимое условие экстремума.
7. Основные леммы классического вариационного исчисления (Лагранжа, Дюбуа-Реймона).

8. Уравнение Эйлера (в двух формах).

9. Экстремали в регулярном и сингулярном случаях. Теорема Гильберта.

10. Случаи упрощения уравнений Эйлера.

11. Простейшая вариационная задача с подвижными границами. Выражение для дифференциала по параметру.

12. Простейшая задача с подвижными границами. Необходимые условия экстремума для случая свободных границ и условия трансверсальности.

13. Экстремали с изломами. Условия Вейерштрасса - Эрдмана.

14. Вторая вариация функционала. Основные леммы.

15. Вторая вариация функционала. Необходимое условие Лежандра.

16. Достаточные условия слабого и сильного относительного экстремума.

17. Необходимые условия Вейерштрасса сильного относительного экстремума. Принцип минимума в задачах на сильный экстремум.

18. Простейшая вариационная задача с несколькими неизвестными. Необходимое условие экстремума. Регулярные экстремали.

19. Каноническая форма системы дифференциальных уравнений Эйлера.

20. Вариационная задача Лагранжа на условный экстремум.

21. Задача Лагранжа со связями в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений $x' = f(t, x)$, в том числе в частной ситуации с функционалом $\int_a^b F[t, x(t)]dt$.

22. Метод (правило) множителей Лагранжа в изопериметрических задачах.

Критерии оценки устного опроса

✓ 100-85 баллов выставляется студенту, обнаружившему всестороннее, систематическое и глубокое знание программного материала, умение применять его и владение изученным материалом; излагающему ответы полно, последовательно и логически стройно; усвоившему взаимосвязь основных и производных понятий; проявившему творческие способности в знании, умении и владении изученным материалом; знающему, умеющему и владеющему навыками приемами выполнения практических заданий и профессиональных задач; показывающему знакомство с основной и дополнительной учебной литературой; способному самостоятельно пополнять и развивать знания, умения и навыки в профессиональной деятельности

- ✓ 85-76 баллов выставляется студенту, обнаружившему системное знание, хорошее умение и владение учебным материалом; излагающему ответы грамотно и по существу заданных вопросов; не допускающему грубых неточностей; умеющему применять основные методики решения стандартных задач; способному самостоятельно пополнять умения и навыки в учебной деятельности
- ✓ 75-61 балл выставляется студенту, обнаружившему знание учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и профессиональной деятельности; усвоившему взаимосвязь основных понятий; допускающему в ответах неточности, испытывающему затруднения при решении практических задач, способному ликвидировать пробелы в знаниях и умениях под руководством преподавателя
- ✓ 60-50 баллов выставляется студенту, обнаружившему большие пробелы в знание основного учебного материала; допускающему принципиальные ошибки в изложении материала или в ответах на вопросы; не умеющему применять имеющиеся знания в решении практических и профессиональных задач; не владеющему основными методиками решения задач или испытывающему значительные затруднения в этом.

Контрольные работы

Типовой вариант контрольной работы

«Классическая задача вариационного исчисления»

1. Найти экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

$$J(y)=\int_0^1\left((y')^2+x^2\cdot y'\right)dx;\quad y(0)=0;\ y(1)=a.$$

2. Найти все экстремали функционала $J(y)$ удовлетворяющие заданным граничным условиям.

$$J(y)=\int_0^{\pi}\left((y''')^2-(y'')^2\right)dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0;$$

$$y(\pi)=\pi;\ y'(\pi)=2;\ y''(\pi)=0.$$

Типовой вариант контрольной работы

«Вариационные задачи с подвижными границами и задачи на условный экстремум».

1. Найти допустимые экстремали в изопериметрических задачах.

a)

$$J(y_1,y_2)=\int_0^1 y_1'\cdot y_2'dx;\ y_1(0)=y_2(0)=y_1(1)=0;$$

$$y_2(1)=1;\ \int_0^1 y_1dx=1;\ \int_0^1 y_2dx=0.$$

b)

$$J(y_1,y_2)=\int_0^1 (y_1+y_2)dx;\ y_1(0)=y_2(0)=0;\ y_1(1)=1;$$

$$y_2(1)=-3;\ \int_0^1 y_1'\cdot y_2'dx=0.$$

Критерии оценки выполнения контрольной работы

- ✓ 10-9 баллов выставляется студенту, если студент выполнил все задания контрольной работы. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет; ошибок в формулах нет, работа оформлена правильно. При защите студент отвечает на все вопросы преподавателя.
- ✓ 8-7 - баллов – работа выполнена полностью. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет; допущено не более 1 ошибки при

решении заданий контрольной работы, или одна-две ошибки в оформлении работы. При защите студент отвечает на все вопросы преподавателя.

✓ 7-6 балл – работа выполнена полностью. Есть ошибки, связанные с пониманием проблемы; допущено 2-3 ошибки при решении заданий контрольной работы, или грубые ошибки в оформлении работы.. При защите студент не отвечает на 1-2 вопроса преподавателя.

✓ 6-5 баллов - работа выполнена не полностью. Допущено три или более трех ошибок в расчётах, в оформлении работы. При защите студент не отвечает на 2-3 вопроса преподавателя.

Варианты заданий для расчетно-графических заданий

РГЗ «Классическая задача вариационного исчисления».

В задачах 1 – 30 найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

1. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+xy\right)dx;\quad y(0)=y(1)=0.$

2. $J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left(4y\cos x+(y')^2-y^2\right)dx;\ \ y(0)=y(\pi)=0.$

3. $J(y)=\int\limits_1^{e}\left(2y-x^2\cdot(y')^2\right)dx;\quad y(1)=e;\ \ y(e)=0.$

4. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+yy'+12xy\right)dx;\quad y(0)=y(1)=0.$

5. $J(y)=\int\limits_0^1\left(e^y+xy'\right)dx;\quad y(0)=0;\ \ y(1)=1.$

6. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+y^2+xy\right)dx;\quad y(0)=y(1)=0.$

7. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+y^2+6y\cdot sh2x\right)dx;\quad y(0)=0;\ y(1)=1.$

8. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+y^2+2y\cdot e^x\right)dx;\quad y(0)=0;\ y(1)=\dfrac{1}{2e}.$

9. $J(y)=\int\limits_0^{\ln 2}\left((y')^2+3y^2\right)\cdot e^{2x}dx;\quad y(0)=0;\ y(\ln 2)=\dfrac{15}{8}.$

10. $J(y)=\int\limits_0^b\left((y')^2+y^2-4y\cdot\sin x\right)dx;\quad y(0)=0;\ y(b)=y_1.$

11. $J(y)=\int\limits_0^1\left(2e^y-y^2\right)dx;\quad y(0)=1;\ y(1)=e.$

12. $J(y)=\int\limits_0^1\left(e^{x+y}-y-\sin x\right)dx;\quad y(0)=0;\ y(1)=-1.$

13. $J(y)=\int\limits_0^1(y')^2dx;\quad y(0)=0;\ y(1)=1.$

14. $J(y)=\int\limits_{-1}^1\dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{y'}dx;\quad y(-1)=0;\ y(1)=1.$

15. $J(y)=\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\left((y')^3+2x\right)dx;\quad y(0)=0;\ y\left(\dfrac{3}{2}\right)=1.$

16. $J(y)=\int\limits_{-1}^1\left(xy'+(y')^2\right)dx;\quad y(-1)=1;\ y(1)=0.$

17. $J(y)=\int\limits_1^2 x^n\cdot(y')^2dx;\ n\in N;\ n\neq 1;\ y(1)=\dfrac{1}{1-n};\ y(2)=\dfrac{2^{1-n}}{1-n}.$

18. $J(y)=\int_0^1\left(y-(y')^2\right)dx;\quad y(0)=0; y(1)=-\frac{1}{2}.$

19. $J(y)=\int_0^1\left((y')^2+y^2\right)dx;\quad y(0)=1;\; y(1)=3.$

20. $J(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2y+y^2-(y')^2\right)dx;\quad y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

21. $J(y)=\int_0^1\left((y')^2-4xy\right)dx;\quad y(0)=y(1)=10.$

22. $J(y)=\int_0^1\left(2(y')^2-xy\right)dx;\quad y(0)=y(1)=0.$

23. $J(y)=\int_0^1\frac{(y')^2}{x^3}dx;\quad y(0)=y(1)=10.$

24. $J(y)=\int_0^1\left((y')^2-6xy\right)dx;\quad y(0)=0;\; y(1)=0.$

25. $J(y)=\int_0^1\left((y')^3\right)dx;\quad y(0)=0;\; y(1)=1.$

26. $J(y)=\int_0^a\frac{1}{y}\cdot\sqrt{1-(y')^2}dx;\quad y(0)=0;\; y(a)=a-5.$

27. $J(y)=\int_3^5\frac{1}{x}\cdot\sqrt{1+(y')^2}dx;\quad y(3)=0{,}2;\; y(5)=1.$

28. $J(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((y')^2-y\right)dx;\quad y(0)=0,\; y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

29. $J(y)=\int\limits_0^{2\pi}\left((y')^2-y^2\right)dx;\quad y(0)=y(2\pi)=1.$

30. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+12xy\right)dx;\quad y(0)=0;\ y(1)=1.$

В задачах 41 – 50 найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)\in C^1([x_1,x_2])$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1,y_2)$ при указанных граничных условиях.

41. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left((y_1')^2+(y_2')^2+2y_1\cdot y_2\right)dx;$

$y_1(0)=y_2(0)=0;\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$

42. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1\left((y_1')^2+(y_2')^2-2y_1\cdot y_2\right)dx;$

$y_1(0)=y_2(0)=0;\ y_1(1)=sh1;\ y_2(1)=-sh1.$

43. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y_1'\cdot y_2'-y_1\cdot y_2\right)dx;$

$y_1(0)=y_2(0)=0;\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$

44. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1\left(y_1'\cdot y_2'+y_1\cdot y_2\right)dx;$

$y_1(0)=y_2(0)=0;\ y_1(1)=e;\ y_2(1)=\frac{1}{e}.$

45. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1\left(y_1'\cdot y_2'+6x\cdot y_1+12x^2\cdot y_2\right)dx;$

$y_1(0)=y_2(0)=0;\ y_1(1)=y_2(1)=1.$

46. $J(y_1, y_2) = \int\limits_1^2 \left((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1 \cdot y_2' + 2y_1' \cdot y_2 \right) dx;$

$y_1(1) = 2;\ y_2(1) = 4;\ y_1(2) = 5,\ y_2(2) = 10.$

47. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^\pi \left((y_1')^2 - (y_2')^2 + 2y_1' \cdot y_2' + 2y_1 \cos x + 2y_2^2 \right) dx;$

$y_1(0) = -1;\ y_2(0) = y_2(\pi) = 0;\ y_1(\pi) = 1 + \pi.$

48. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 \left((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1 \right) dx;$

$y_1(0) = y_2(0) = 1;\ y_1(1) = \frac{3}{2};\ y_2(1) = 1.$

49. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 \left(\frac{(y_1')^2 + (y_2')^2}{2} + 4y_1 \cdot y_2 \right) dx;$

$y_1(0) = 0;\ y_2(0) = y_1(1) = 1;\ y_2(1) = \frac{1}{2}.$

50. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 \left(\frac{(y_1')^2 + (y_2')^2}{2} - y_1 \cdot y_2 \right) dx;$

$y_1(0) = y_2(0) = 0;\ y_1(1) = y_2(1) = 1.$

В задачах 51 – 60 найти все экстремали функционала $J(y)$ удовлетворяющие заданным граничным условиям.

51. $J(y) = \int\limits_0^\pi \left((y'')^2 - y^2 \right) dx; \quad y(0) = 1;\ y(\pi) = e^{-\pi};$

$y'(0) = 0;\ y'(\pi) = -1 - e^{-\pi}.$

52. $J(y) = \int\limits_0^1 \left(48y - (y'')^2 \right) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0;$

$y(1) = 1;\ y'(1) = 4.$

53. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y'')^2-24xy\right)dx;\quad y(0)=y'(0)=0;$

$y(1)=\dfrac{1}{5};\ y'(1)=1.$

54. $J(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left((y'')^2-(y')^2\right)dx;\quad y(0)=y'(0)=0;$

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2};\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0.$

55. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y'')^2+(y')^2\right)dx;\quad y(0)=y'(0)=0;$

$y(1)=\dfrac{e-2}{e-1};\quad y'(1)=1.$

56. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y'')^2+y'\right)dx;\quad y(0)=1;\ y'(0)=2;$

$y(1)=\dfrac{145}{48};\quad y'(1)=\dfrac{25}{12}.$

57. $J(y)=\int\limits_0^1(x+1)^3\cdot(y'')^2\,dx;\quad y(0)=1;\ y'(0)=-1;$

$y(1)=\dfrac{1}{2};\ y'(1)=-\dfrac{1}{4}.$

58. $J(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left((y'')^2-y^2+x^2\right)dx;\quad y(0)=1;$

$y'(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0;\qquad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1.$

59. $J(y)=\int\limits_0^1(y''')^2\,dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0;$

$y(1)=1;\ y'(1)=4;\ y''(1)=12.$

60. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y''')^2-(y'')^2\right)dx;\quad y(0)=y''(0)=0;$

$y'(0)=1;\ y(1)=y''(1)=sh1;\ y'(1)=ch1.$

РГЗ «Задача Больца».

Найти экстремали следующих функционалов в задачах Больца.

71. $J(y)=\int\limits_0^1 (y')^2dx+4y^2(0)-5y^2(1).$

72. $J(y)=\int\limits_1^2\left(x\cdot(y')^2+y\right)dx;\quad y(1)=0;\quad y(2)$ – свободный конец.

73. $J(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2(y')^2+y\cdot y'-8y^2\right)dx+y(0)+y^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$

74. $J(y)=\int\limits_1^2\left((y')^2+12xy\right)dx+12y(1)+y^2(2).$

75. $J(y)=\int\limits_1^{\pi}\left((y')^2+y^2-4y\sin x\right)dx+2y^2(0)+2y(\pi)-y^2(\pi).$

76. $J(y)=\int\limits_0^2\left((y')^2-y\right)dx+y^2(0);\ y(2)=4.$

77. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2-y\right)dx-\frac{1}{2}y^2(1).$

78. $J(y)=\int\limits_0^1\left((y')^2+y\right)dx+3y^2(0)+6y(1).$

79. $J(y)=\int\limits_0^a\left((y')^2+y\right)dx;\ y(0)=0.$

80. $J(y)=\int_0^1\left((y')^2+y^2\right)dx-2sh1\cdot y(1).$

РГЗ «Задачи на условный экстремум».

Найти допустимые экстремали в изопериметрических задачах.

81. $J(y)=\int_0^1 (y')^2dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1;\ \int_0^1 xydx=0.$

82. $J(y)=\int_0^1 (y')^2dx;\ y(0)=y(1)=0;\ \int_0^1 ydx=1.$

83. $J(y)=\int_0^\pi (y')^2dx;\ y(0)=0;\ y(\pi)=1;\ \int_0^\pi y\sin xdx=0.$

84. $J(y)=\int_0^\pi y\cdot\sin xdx;\ y(0)=0;\ y(\pi)=\pi;\ \int_0^\pi (y')^2dx=\frac{3}{2}\pi.$

85. $J(y)=\int_0^1\left((y')^2+y^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y(1)=e^{-1};$

$\int_0^1 e^{-x}\cdot ydx=\frac{1}{4}\left(1-3e^{-2}\right).$

86. $J(y)=\int_0^1 (y')^2dx;\ y(0)=y(1)=0;\ \int_0^1 ydx=1.$

87. $J(y)=\int_0^1 (y')^2dx;\ y(0)=-4;\ \int_0^1 xydx=A.$

88. $J(y)=\int_0^1 (y')^2dx;\ y(0)=1;\ y(1)=6;\ \int_0^1 xydx=3.$

89. $J(y)=\int_0^1 (y')^2dx;\ y(0)=0;\ y(1)=\frac{1}{4};\ \int_0^1 (y-y')dx=\frac{1}{12}.$

90. $J(y)=\int\limits_0^1 (y')^2 dx;\ \ y(1)=2;\ \int\limits_0^1 y\cdot e^{-x}dx=A.$

РГЗ «Прямые методы вариационного исчисления».

В задачах 101 – 103 методом Ритца найти приближенное решение задачи об экстремуме указанных функционалов. В качестве координатных функций выбрать $\varphi_k(x)=x^{k+1}-x^k$.

101. $J(y)=\int\limits_0^2 \left((y')^2+y^2+2xy\right)dx;\quad y(0)=y(2)=0,.n=2.$

102. $J(y)=\int\limits_1^2 \left(x(y')^2-\dfrac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\right)dx;\quad y(1)=y(2)=0,.n=2.$

103. $J(y)=\int\limits_0^1 \left((y')^2-y^2-2xy\right)dx;\quad y(0)=y(1)=0,.n=2.$

104. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала $J(y)=\int\limits_1^2 \left((y')^2-\dfrac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\right)dx\to \inf$ и сравнить с точным решением. Решение задачи можно искать в виде $y(x)=a\cdot(x-1)\cdot(x-2)$.

105. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$J(y)=\int\limits_0^1 \left(x^3(y'')^2+100xy^2-20xy\right)dx\to \inf;\quad y(1)=y'(1)=0.$$

Решение можно искать в виде: $y_n(x)=(x-1)^2\cdot(a_0+a_1x+...+a_nx^n)$. Провести вычисления при $n=1$ и $n=2$.

106. Найти методом Ритца приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$J(y)=\int\limits_0^2 \left((y')^2+y^2-2xy\right)dx\to \inf,\quad y(0)=y(2)=0$$

и сравнить его с точным решением. Приближенное решение можно искать в виде $y_n(x) = x \cdot (1-x) \cdot (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n)$.

Провести вычисления при $n = 0$ и $n = 1$.

107. При изучении колебаний заделанного клина постоянной толщины приходится исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_0^1 \left(a \cdot x^3 \cdot (y'')^2 - b \cdot x \cdot y^2\right) dx \to \inf\,, \quad y(1) = y'(1) = 0,$$

где a и b - положительные постоянные. За координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям, можно взять $(x-1)^2$; $(x-1)^2 \cdot x$; $(x-1)^2 \cdot x^2$; …; $(x-1)^2 \cdot x^{k-1}$; …, следовательно,

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k (x-1)^2 x^{k-1}.$$

Вычисления провести при $n = 2$.

Критерии оценки выполнения расчетно-графического задания

✓ 10-9 баллов выставляется студенту, если студент выполнил все задания РГЗ. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет; ошибок в формулах нет, работа оформлена правильно. При защите студент отвечает на все вопросы преподавателя.

✓ 8-7 - баллов – работа выполнена полностью. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет; допущено не более 1 ошибки при решении заданий РГЗ, или одна-две ошибки в оформлении работы. При защите студент отвечает на все вопросы преподавателя.

✓ 7-6 балл – работа выполнена полностью. Есть ошибки, связанные с пониманием проблемы; допущено 2-3 ошибки при решении заданий контрольной работы, или грубые ошибки в оформлении работы. При защите студент не отвечает на 1-2 вопроса преподавателя.

- ✓ 6-5 баллов - работа выполнена не полностью. Допущено три или более трех ошибок в расчётах, в оформлении работы. При защите студент не отвечает на 2-3 вопроса преподавателя.