МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА РЕГИОНАЛЬНЫХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

«СОГЛАСОВАНО»
Руководитель ОП

Гунько Ю.А.
(подпись)

«10 » июля 2019 г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Заведующий (ая) кафедрой
Алгебры, геометрии и анализа
(название кафедры)

(подпись) Шепелева Р.П

« 10 » июля 2019 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Математика
Направление подготовки 45.03.02 «Лингвистика»
«Бакалавр»
Форма подготовки очная

курс 1 семестр 2
лекции 18 час.
практические занятия 18 час.
лабораторные работы ____ час.
в том числе с использованием МАО лек. ____/ пр. ____/ лаб. ____час.
всего часов аудиторной нагрузки 36 час.
в том числе с использованием МАО ____час.
самостоятельная работа 36 час.
в том числе на подготовку к экзамену ____час.
контрольные работы (количество)____
курсовая работа / курсовой проект ____семестр
зачет 1 Семестр
экзамен - Семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта по направлению 45.03.02 Лингвистика, самостоятельно устанавливаемого ДВФУ, утвержденного приказом ректора от 07.07.15 № 12-13-1282

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры ____
протокол № 15 от « 10 » июля 2019 г

Заведующий (ая) кафедрой ____ Шепелева Р.П.

Составитель (ли): ____ Дымченко Ю.В.

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:
Протокол от«_____»________________201   г.   № _____

Заведующий (ая) кафедрой_______________ ______________________
(подпись) (И.О. Фамилия)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:
Протокол от«_____»________________201   г.   № _____

Заведующий (ая) кафедрой_______________ ______________________
(подпись) (И.О. Фамилия)

АННОТАЦИЯ
Аннотация рабочей программы дисциплины
«Математика

Дисциплина «Математика» относится к разделу базовой части ООП 45.03.02 «Лингвистика»

Для успешного усвоения дисциплины «Математика» необходимы устойчивые теоретические знания практические навыки по всем разделам обязательного минимума содержания среднего (полного) образования по математике.

Цель – воспитание высокой математической культуры, привитие навыков современных видов мышления, привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования. Изучение курса способствует расширению научного кругозора и повышению общей культуры будущего специалиста, развитию его мышления и становлению его мировоззрения.

Задачи дисциплины «Математика» продемонстрировать на примерах сущность научного подхода; научить понимать и пользоваться основными методами математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры. Овладение аппаратом высшей математики: линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа. Приобретение базы, необходимой для изучения прикладных, информационных, специальных дисциплин.

Для успешного изучения дисциплины «Математика» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**	
ОК-5 способность использовать современные методы и технологии (в том числе информационные) в профессиональной деятельности	Знает	Основные понятия математики, числа и функции, самое широкое понятие числа: комплексные числа, основные свойства функций, построение их графиков, формулы теории вероятностей, используемые в расчетах математической статистики.
	Умеет	Производить действия над числами и функциями.
	Владеет	Инструментом для решения математических задач в своей предметной области.
ОПК-20 Способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и	Знает	основные методы, способы и средства получения, хранения, переработки информации; понимание сущности и значения информации в развитии современного общества;
	Умеет	Использовать базовые знания в области информационных технологий в профессиональной деятельности;

библиографической культуры с применением информационно-лингвистических технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	Владеет	Навыками работы с компьютером как средством управления информацией; навыками работы с информацией в глобальных компьютерных сетях.

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Математика» применяются следующие методы активного обучения:

Проблемная лекция - опирается на логику последовательно моделируемых проблемных ситуаций путем постановки проблемных **вопросов** или предъявления проблемных задач

Уровень сложности, характер проблем зависят от подготовленности обучающихся, изучаемой темы и других обстоятельств.

Лекция-беседа. Она предполагает максимальное включение обучающихся в интенсивную беседу с лектором. Преимущество этой формы перед обычной лекцией состоит в том, что она привлекает внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определяет содержание, методы и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории.

Различают несколько ее разновидностей:

лекция-диалог

лекция-дискуссия,

лекция-диспут.

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Лекции (18 часов)

МОДУЛЬ 1
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА (6 ЧАСОВ)

РАЗДЕЛ 1 Определители 2-го и 3-го порядка. (2 **часа**)

Тема 1. Определители второго и третьего порядков, действия над определителями**,** их основные свойства. Миноры и их алгебраические дополнения, разложение определителя по строке.

РАЗДЕЛ 2 Системы линейных уравнений. (2 **часа**)

Тема 1. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Тема 2 **Правило** Крамера.

РАЗДЕЛ 3 Матрицы. (2 **часа)**

Тема 1. Матрицы. Операции над матрицами, их свойства. Обратная матрица, ее вычисление. Матричная запись системы линейных уравнений.

Тема 2. Решение матричных уравнений и линейных систем с помощью обратной матрицы.

МОДУЛЬ 2
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. (2 часа)

РАЗДЕЛ 4. Вектор **(2 часа)**

Тема 1**.** Векторы. Действия над векторами Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Декартовы координаты векторов и точек.

Тема 2. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное произведение, смешанное произведение и их приложения к решению задач.

МОДУЛЬ 3
ФУНКЦИЯ. ПРЕДЕЛЫ. (2 часа)

РАЗДЕЛ 5. Основные понятия о множествах, логическая символика. Теория последовательностей. Понятие числовой последовательности. (**2 часа**)

Тема 1. Предел переменной, арифметические свойства предела. Предельный переход в неравенствах. Предел монотонной ограниченной последовательности.

Тема 2. Предел функции. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.

МОДУЛЬ 4
Производная (4 часа)

РАЗДЕЛ 6. Производная функции. (**4 часов**)
Тема 1. Геометрический и механический смысл производной. Основные правила дифференцирования. Производные некоторых функций. Производная сложной и обратной функций**.**

Тема 2. Производная функции, заданной параметрически. Производные различных порядков Дифференциал функции, его геометрический смысл. Линеаризация функции.
Логарифмическое дифференцирование.
Исследования функций с помощью первой производной.

МОДУЛЬ 5
Интеграл. (4 часа)

РАЗДЕЛ 12. Первообразная функции. Неопределенный интеграл **(2 часа)**
Тема 1 Свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования
Тема 2 Некоторые сведения об алгебраических многочленах. Интегрирование тригонометрических функций.
РАЗДЕЛ 13. Определенный интеграл. (**2 часа**)
Тема 1 Определенный интеграл.
Тема 2 Приложения определенного интеграла

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Практические занятия (18 часов)

РАЗДЕЛ 1

Занятия 1-2 (4 часа)
Определители 2-го и 3-го порядка. Действия над определителями. Системы линейных неоднородных уравнений. Матрицы. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Структура общего решения однородной системы линейных уравнений

РАЗДЕЛ 2

Занятие 3 (2 часа)
Векторная алгебра. Действия над векторами. Векторное, скалярное и смешанное произведение векторов.

РАЗДЕЛ 3

Занятие 4 (2 часа)

Предел функции. Предел переменной. Способы вычисления пределов. Замечательные пределы. Производные некоторых функций. Производная сложной и обратной функций.

Занятия 5-6 (4 часа)
Производная функции. Механическое значение второй производной. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Логарифмическое дифференцирование.
Исследования функций с помощью первой и второй производной.

РАЗДЕЛ 4

Занятия 7-8(4 часа)
Первообразная функции. Неопределенный интеграл. Свойства, методы интегрирования

РАЗДЕЛ 5.

Занятие 9 (2 часа)
Определенный интеграл. Свойства, методы интегрирования
Приложения определенного интеграла.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Название дисциплины» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

Проверка знаний студентов осуществляется путем проведения контрольных работ, сдачи индивидуальных заданий, семестровыми зачетами и экзаменами. Темы контрольных работ и индивидуальных заданий отражены в программах семестровых экзаменов

Темы контрольных работ и индивидуальных заданий и сроки их проведения указаны ниже:

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства - наименование	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Определители 2-го и 3-го порядка. Действия над определителями. Системы линейных неоднородных уравнений. Матрицы.	ОК-5, ОПК-20	1 неделя	Проверка домашних заданий	Опрос знания теории
			2-3 недели	Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях	Опрос знания теории
			4 неделя	Опрос знания теории	Выполнение к/р на 4 неделе
2	Векторная алгебра. Действия над векторами. Прямая на плоскости	ПК-20	5 неделя	Проверка домашних заданий	Опрос знания теории
			6 неделя	Проверка домашних заданий	Опрос знания теории
				. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях	Сдача индивидуальных домашних заданий на 5 неделе. Срок сдачи 6 неделя
3	Кривые второго порядка	ОК-5, ОПК-20	7 неделя	Проверка домашних заданий	Опрос знания теории
			7 неделя	Проверка домашних заданий	Опрос знания теории.5 мин на формулы
			8 неделя	Опрос знания теории. Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях	Сдача индивидуальных домашних заданий на 7 неделе. Срок сдачи 8 неделя.
4	Предел функции. Предел переменной	ОПК-20	8 неделя	Опрос знания теории	. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому

					материалу
			9 неделя	Проверка домашних заданий	Опрос знания теории. Зачет за 1 семечстр по результатам рейтинга
			10 неделя	Опрос знания теории	Выполнение к/р на 10 неделе.
5	Производная функции	ОК-5, ОПК-20	11 неделя	Проверка домашних заданий	Опрос знания теории
			12-13 неделя	Разбор домашних заданий	Опрос знания теории
			14 неделя	Проверка домашних заданий	Сдача индивидуальных домашних заданий на 12 неделе. Срок сдачи 13 неделя.
6	Первообразная функции. Неопределенный интеграл	ОПК-20	15 неделя	Проверка домашних заданий	. Летучий устный или письменный опрос студентов во время лекции по изучаемому материалу
			16 неделя	Опрос знания теории	Опрос знания теории
			17 неделя	Разбор домашних заданий	Сдача индивидуальных домашних заданий на 14 неделе. Срок сдачи 16 неделя
7		ОПК-20	**18 неделя**		**зачет за 2 семестр по результатам рейтинга**

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Д.К. Фаддеев. Лекции по алгебре. – Санкт-Петербург, «Лань», 2012, – 416 с.
2. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры. – Санкт-Петербург, «Лань», 2011, - 462 с.
3. А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. – Санкт-Петербург, «Лань», 2012, – 304 с.
4. А.И. Мальцев. Линейная алгебра. – Санкт-Петербург, «Лань», 2010, - 384 с.
5. М.М. Постников. Линейная алгебра. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, - 400 с.
6. Д. В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 2005,
7. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Задачи по высшей алгебре. – Санкт-Петербург, «Лань», 2008, - 288 с.
8. З.И. Боревич. Определители и матрицы. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, - 192 с.
9. П.С. Александров. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, - 512 с.
10. В.В. Воеводин. Линейная алгебра. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, – 416 с
11. В. С. Шипачев. Высшая математика. – Санкт-Петербург, «Лань», 2006.- 479 с.

13.Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч 1.: учебное пособие. –Минск «Вышейшая школа», 2013. – 304 с. Ссылка: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65409

2. Дополнительная литература

1. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики т.1,2. М.: Высшая школа. 1973
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления т.1,2. М.: Наука. 1990.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.1980
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов под ред. Б.П. Демидовича.1998
5. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре М.: Наука. 1984
6. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей. М.: Высшая школа. 1992
7. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука. 1995
8. Матвеев О.В., Мантуров Н.М. Курс высшей математики. М.1986

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет

1. Калинин В.В., Петрова И.В., Харин В.Т. Неопределенные и определенные интегралы. М.: МГУНГ им. И.М. Губкина, 2005 (pdf), 153с. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/KalininPetrovaXarin2005ru.pdf
2. Любарский М.Г. Векторная алгебра и ее приложение. Web, 2010 (pdf), 166 с. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lyubarskij2010ru.pdf

1) Шипачев. Высшая математика. – Санкт-Петербург, «Лань», 2006.-479 с., http://sferaznaniy.ru/vysshaya-matematika/vysshaya-matematika-shipachev-v-s.html

2) Данко П.Е Высшая математика в упражнениях и задачах : В 2-х ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 5-е изд., испр. - М. : Высш. шк., 1996, 1999. - 416с. ww.mgpu.ru/materials/13/13374.doc
3) Баврин, И. И. Высшая математика : Учеб. для студ. естественнонаучных специальностей педагогических вузов / И. И. Баврин. – М. : «Академия», Высш. шк., 2008. – 616 с. www.mgpu.ru/materials/13/13373.doc
4) Щипачев В.С. Высшая математика. : Учеб. пособие для вузов / В. С. Щипачев. – М. : Высш. шк., 2005. – 479 с. library.izhgsha.ru/.../cgiirbis_64.dll

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного достижения учебных целей занятий должны выполняться следующие основные требования:

-соответствие действий обучающихся ранее изученным на лекционных и семинарских занятиях методикам и методам.

-максимальное приближение действий студентов к реальным, соответствующим будущим функциональным обязанностям.

-поэтапное формирование умений и навыков, т.е. движение от знаний к умениям и навыкам, от простого к сложному и т.д.

-использование при работе на тренажерах или действующей технике фактических документов, технологических карт, бланков и т.п.

-выработка индивидуальных и коллективных умений и навыков.

- распределение времени, отведенного на занятие, на решение каждой задачи;

-подбор иллюстративного материала (графиков, таблиц, схем), необходимого для решения задач, продумывание расположения рисунков и записей на доске.

Студент должен:

- научиться работать с книгой, документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой.

-формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

. На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства. Формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Необходимо поддерживать непрерывный контакт с аудиторией, отвечать на возникающие у студентов вопросы. На практических занятиях преподаватель разбирает примеры по пройденной теме. Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения. Если знаний, полученных в аудитории, оказалось недостаточно, студент может самостоятельно повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами.

В преподавании данного курса было использовано методическое пособие:

Г. И. Батурин

МАТЕМАТИКА

для студентов нематематических специальностей

высших учебных заведений

(издание второе, переработанное и дополненное)

Учебное пособие

Рекомендовано Дальневосточным региональным

учебно-методическим центром (УМО)»

Владивосток

Издательство Дальневосточного университета

ББК 22.11

Б 28

Рецензенты: Г.К. Пак – заведующий кафедрой алгебры и логики ДВГУ, к.ф.-м.н.;

А.А. Степанова – профессор кафедры алгебры и логики ДВГУ, д.ф.-м.н.

Содержание пособия

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина может быть реализована в следующих аудиториях, расположенных по адресу Приморский край, г. Владивосток, Фрунзенский р-н г. , Русский Остров, ул. Аякс, п, д. 10, кор. D:

- D208/347, D303, D313а, D401, D453, D461, D518, D708, D709, D758, D761, D762, D765, D766, D771, D917, D918, D920, D925, D576, D807 (Лекционная аудитория оборудована маркерной доской, аудиопроигрывателем);
- D229, D304, D306, D349, D350, D351, D352, D353, D403, D404, D405, D414, D434, D435, D453, D503, D504, D517, D522, D577, D578, D579, D580, D602, D603, D657, D658, D702, D704, D705, D707, D721, D722, D723, D735, D736, D764, D769, D770, D773, D810, D811, D906, D914, D921, D922, D923, D924, D926 (Мультимедийная аудитория: Проектор Mitsubishi EW330U , Экран проекционный ScreenLine Trim White Ice, профессиональная ЖК-панель 47", 500 Кд/м2, Full HD M4716CCBA LG, подсистема видеоисточников документ-камера CP355AF Avervision; подсистема видеокоммутации; подсистема аудиокоммутации и звукоусиления; подсистема интерактивного управления);
- D207/346 (Мультимедийная аудитория: Проектор 3-chip DLP, 10 600 ANSI-лм, WUXGA 1 920х1 200 (16:10) PT-DZ110XE Panasonic; экран 316х500 см, 16:10 с эл. приводом; крепление настенно-потолочное Elpro Large Electrol Projecta; профессиональная ЖК-панель 47", 500 Кд/м2, Full HD M4716CCBA LG; подсистема видеоисточников документ-камера CP355AF Avervision; подсистема видеокоммутации; подсистема аудиокоммутации и звукоусиления; подсистема интерактивного управления), D226 (Мультимедийная аудитория: Проектор Mitsubishi EW330U , Экран проекционный ScreenLine Trim White Ice, профессиональная ЖК-панель 47", 500 Кд/м2, Full HD M4716CCBA LG, подсистема видеокоммутации; подсистема аудиокоммутации и звукоусиления; подсистема интерактивного управления), D362 (профессиональная ЖК-панель 47", 500 Кд/м2, Full HD M4716CCBA LG, подсистема аудиокоммутации и звукоусиления; Компьютерный класс на 15 посадочных мест);
- D447, D448, D449, D450, D451, D452, D502, D575 (Мультимедийная аудитория: Проектор Mitsubishi EW330U , Экран проекционный ScreenLine

Trim White Ice, подсистема видеоисточников документ-камера CP355AF Avervision; подсистема видеокоммутации; подсистема аудиокоммутации и звукоусиления; подсистема интерактивного управления);

- D446, D604, D656, D659, D737, D808, D809, D812 (Мультимедийная аудитория: Проектор Mitsubishi EW330U , Экран проекционный ScreenLine Trim White Ice, профессиональная ЖК-панель 47", 500 Кд/м2, Full HD M4716CCBA LG, подсистема видеоисточников документ-камера CP355AF Avervision; подсистема видеокоммутации; подсистема аудиокоммутации и звукоусиления; подсистема интерактивного управления; Компьютерный класс; Рабочее место: Компьютеры (Твердотельный диск - объемом 128 ГБ; Жесткий диск - объем 1000 ГБ; Форм-фактор – Tower); комплектуется клавиатурой, мышью. Монитором AOC i2757Fm; комплектом шнуров эл. питания) Модель - M93p 1; Лингафонный класс, компьютеры оснащены программным комплексом Sanako study 1200);
- D501, D601 (Мультимедийная аудитория: Проектор Mitsubishi EW330U , Экран проекционный ScreenLine Trim White Ice, профессиональная ЖК-панель 47", 500 Кд/м2, Full HD M4716CCBA LG, подсистема видеоисточников документ-камера CP355AF Avervision; подсистема видеокоммутации; подсистема аудиокоммутации и звукоусиления; подсистема интерактивного управления; Компьютерный класс на 26 рабочих мест. Рабочее место: Моноблок Lenovo C360G-i34164G500UDK).

В целях обеспечения специальных условий обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в ДВФУ все здания оборудованы пандусами, лифтами, подъемниками, специализированными местами, оснащенными туалетными комнатами, табличками информационно-навигационной поддержки.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

математика
Направление подготовки 45.03.02 «Лингвистика»
«Бакалавр»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1-4 недели	Контрольная работа	1 пара	Зачет по заданию
2	5-6 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Зачет по заданию
3	9-10 недели	Контрольная работа	1 пара	Зачет по заданию
4	11-14 недели	Индивидуальное задание	2 недели	Зачет по заданию

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий и контрольных работ по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены ниже).. Критерии оценки: студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя.

Индивидуальное задание № 1 (системы)

Вариант № 1

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

Вариант № 2

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант № 3

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 14, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант № 4

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$$

Вариант № 5

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 6

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 8, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 7

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -11, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 8

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 18. \end{cases}$$

Вариант № 9

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант № 10

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант № 11

Исследовать и решить систему

по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Вариант № 12

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 13

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Вариант № 14

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = -11. \end{cases}$$

Вариант № 15

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,

методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 7, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Вариант № 16

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 15, \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант № 17

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -14, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 18

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -7, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Вариант № 19

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 16, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -13, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$$

Вариант № 20

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант № 21

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант № 22

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$$

Вариант № 23

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Вариант № 24

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 25

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -8. \end{cases}$$

Вариант № 26

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Вариант № 27

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Вариант № 28

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 29

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Вариант № 30

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Вариант № 31

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Вариант № 32

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

Индивидуальное задание № 2 (производные)

Вариант № 1

найти производные y'_x :

1. $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$,
2. $y = 5tg\,\frac{x}{5} + tg\,\frac{\pi}{8}$,
3. $y = \frac{2}{3}arctg\,x + \frac{1}{3}arctg\,\frac{x}{1 - x^2}$,
4. $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$,
5. $y = e^{ax}(a \sin x - \cos x)$,
6. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$,
7. $\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$
8. $y = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(в 8 применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 2

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt{1+\sqrt{2px}}$,

2. $y=\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x$,

3. $y=arctg(x^2-3x+2)$,

4. $y=x\cdot e^{1-\cos x}$,

5. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

7. $\begin{cases} x=2t+3t^2, \\ y=t^2+2t^3; \end{cases}$

8. $y=\frac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 3

найти производные y'_x:

1. $y=\sqrt[3]{x^6-8}$,

2. $y=\sin^2\frac{x}{3}\cdot ctg\frac{x}{3}$,

3. $y=\arccos\sqrt{1-3x}$,

4. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$,

5. $y=e^x\cdot(\sin 3x-3\cos 3x)$,

6. $\sin(xy)+\cos(xy)=tg(x+y)$,

7. $\begin{cases} x=\frac{1}{t+1}, \\ y=\left(\frac{t}{t+1}\right)^2; \end{cases}$

8. $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 4

найти производные y'_x:

1. $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\cdot\arccos\frac{x}{a}$,

2. $y=\cos 2x\cdot\ln x$,

3. $y=\arcsin\left(\sqrt{\sin x}\right)$,

4. $y=\ln\frac{1-e^x}{e^x}$,

5. $y=10^{xtgx}$,

6. $x^4+y^4=x^2y^2$,

7. $\begin{cases} x=a\left(\ln tg\frac{t}{2}+\cos t-\sin t\right), \\ y=a(\sin t+\cos t); \end{cases}$

8. $y=\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 5

найти производные y'_x:

1. $y = x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x,$

2. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x,$

3. $y = x \cdot \arcsin(\ln x),$

4. $y = \ln\left(e^x \cos x + e^{-x} \sin x\right),$

5. $y = \sin x \cdot e^{\cos x},$

6. $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y},$

7. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$

8. $y = \cdot\sqrt[3]{x^2} \cdot \dfrac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 6

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4},$

2. $y = \dfrac{1}{18}\sin^6 3x - \dfrac{1}{24}\sin^8 3x,$

3. $y = arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}},$

4. $y = e^x \sin x \cos^3 x,$

5. $y = a^{\sin^3 x},$

6. $xy = arctg\,\dfrac{x}{y},$

7. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$

8. $y = (\cos x)^{tgx}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 7

найти производные y'_x :

1. $y = 3^{\sin x},$

2. $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10},$

3. $y = \dfrac{\arcsin 4x}{1-4x},$

4. $y = \cos x\sqrt{1+\sin^2 x},$

5. $y = \ln arctg\,\dfrac{1}{1+x},$

6. $e^y = x + y,$

7. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{(1+t)^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$

8. $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 8

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$,

2. $y = \dfrac{\sin 3x}{2\sin^2 x \cdot \cos x}$,

3. $y = \arcsin(n \sin x)$,

4. $y = \ln \dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$,

5. $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$,

6. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$,

7. $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = b \cdot \sin^3 t; \end{cases}$

8. $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 9

найти производные y'_x :

1. $y = \sqrt{1 + tg^2 x + tg^4 x}$,

2. $y = \sin^2 \dfrac{x}{3} \cdot ctg \dfrac{x}{2}$,

3. $y = \arccos\sqrt{1-3x}$,

4. $y = \log_3\left(x^2 - \sin x\right)$,

5. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$,

6. $\ln y + \dfrac{x}{y} = c$,

7. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}; \end{cases}$

8. $y = (arctgx)^x$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 10

найти производные y'_x :

1. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

2. $y = \sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$,

3. $y = \dfrac{2}{3} arctgx + \dfrac{1}{3} arctg \dfrac{x}{1-x^2}$,

4. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$,

5. $y = 10^{2x-3}$,

6. $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$,

7. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}; \end{cases}$

8. $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 11

найти производные y'_x :

1. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$,

2. $y = \frac{\sin^2 x}{1+ctgx} + \frac{\cos^2 x}{1+tgx}$,

3. $y = arctg\frac{x+1}{x-1}$,

4. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,

5. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$,

6. $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$,

7. $\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2}, \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t}; \end{cases}$

8. $y = (\cos x)^{\sin x}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 12

найти производные y'_x :

1. $y = \sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$,

2. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$,

3. $y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$,

4. $y = \ln tgx$,

5. $y = \sqrt{1+e^x}$,

6. $y^2 = 2px$,

7. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t); \end{cases}$

8. $y = x^{\ln x}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 13

найти производные y'_x :

1. $y = \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$,

2. $y = \sin\sqrt{1+x^2}$,

3. $y = arctg\, x^2$,

4. $y = xe^x$,

5. $y = e^{\arcsin 2x}$,

6. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,

7. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t; \end{cases}$

8. $y = x^{\ln x}$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 14

найти производные y'_x :

1. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,

2. $y = \frac{1}{4} tg^4 x$,

3. $y = \sqrt{1 + tg\left(x + \frac{1}{x}\right)}$,

4. $y = \frac{x^2}{arctgx}$,

5. $y = e^x \cos x$,

6. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$,

7. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}; \end{cases}$

8. $y = (arctg\, x)^x$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 15

найти производные y'_x:

1. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$,

2. $y = \sqrt{x}\, arctg\, x$,

3. $y = x \ln x$,

4. $y = \frac{\cos x}{e^x}$,

5. $y = e^x (\sin 3x - 3\cos 3x)$,

6. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$,

7. $\begin{cases} x = a(\phi - \sin\phi), \\ y = a(1 - \cos\phi); \end{cases}$

8. $y = (\sin x)^{\cos x}$ (применив логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 16

найти производные y'_x :

1. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$,

2. $y = \sin(\sin x)$,

3. $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$,

4. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$,

5. $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$,

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

7. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$

8. $y = x^{\frac{1}{x}}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 17

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$,

2. $y = arctgx + \arcsin x$,

3. $y = e^x \arcsin x$,

4. $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$,

5. $y = \sqrt{1 + e^x}$,

6. $xy = arctg\,\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3; \end{cases}$

8. $y = x\sqrt{x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 18

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$,

2. $y = xctgx$,

3. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$,

4. $y = \dfrac{1}{2}\ln tg\,\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$,

5. $y = \ln(\arcsin 5x)$,

6. $xy = arctg\,\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$

8. $y = \sqrt[x]{x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 19

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$,

2. $y = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$,

3. $y = \dfrac{e^x}{x^{\frac{2}{3}}}$,

4. $y = 2x + 5\cos^3\dfrac{1}{x}$,

5. $y = arctg\ln\dfrac{1}{x}$,

6. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$,

7. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t + 1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t + 1}\right)^2; \end{cases}$

8. $y = x^{\sin x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 20

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$,

2. $y = arctgx + \arcsin x$,

3. $y = e^x \arcsin x$,

4. $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$,

5. $y = \sqrt{1 + e^x}$,

6. $xy = arctg\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3; \end{cases}$

8. $y = x\sqrt{x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 21

найти производные y'_x :

1. $y = arctg\left(x^2 - 3x + 2\right)$,

2. $y = x^2 \cdot arctgx^3$,

3. $y = \dfrac{2\cos x^3}{\sqrt{\cos^2 x}}$,

4. $y = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{1}{2}arctgx$,

5. $y = \ln\left(e^x \cos x + e^{-x} \sin x\right)$,

6. $\begin{cases} x = 3\cos x, \\ y = 4\sin x; \end{cases}$ $\dfrac{dy}{dx} = ?$,

7. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$,

8. $x^y = y^x$. *(применить логарифмическое диф-ние)*

Вариант № 22

найти производные y'_x :

1. $y = \sin(3x + 5)$,

2. $y = \sin(\sin x)$,

3. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$, .

4. $y = \dfrac{x}{e^x}$,

5. $y = \ln tg\dfrac{1}{1+x}$,

6. $y = \cos(x + y)$,

7. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t}{t^2} - 1, \end{cases}$

8. $y = x^{\sin x}$. (применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 23

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt{1-2x^3}$,

2. $y=\cos^3 4x$,

3. $y=10^{x\cdot tgx}$,

4. $y=\ln^2 x$,

5. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$,

6. $y^2-2xy+b^2=0$,

7. $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=t^3; \end{cases}$

8. $y=x^x$.

(в 8-м примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 24

найти производные y'_x :

1. $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$,

2. $y=\cos^2 x$,

3. $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$,

4. $y=x\cdot 10^x$,

5. $y=tg\,\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$,

6. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$,

7. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}$

8. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

(в 8-м примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 25

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt[3]{2+x^2}$,

2. $y=\sin^2(\cos 3x)$,

3. $y=a^x x^a$,

4. $y=\dfrac{1}{3^x}$,

5. $y=\dfrac{1}{\ln x}$,

6. $y=1+xe^y$,

7. $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases} \quad \dfrac{dy}{dx}=?$

8. $y=x\cdot e^x$.

(в 8-м примере применить логарифмическое дифференцирование)

Индивидуальное задание № 3(Интегралы)

Вариант №1

1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \ln\left(1+x^2\right)dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin x \cdot \sin 3x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Вариант №2

1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \ln\left(1+x^2\right)dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin x \cdot \sin 3x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Вариант №3

1. Найти интеграл

$$\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x^2 e^x \sin x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^6 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{2x dx}{x^2+3x-4}$$

Вариант №4

1. Найти интеграл

$$\int \cos(1-2x)dx$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin 7x \cdot \sin 3x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2)(x+1)}$$

Вариант №5

1. Найти интеграл

$$\int \left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^6 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx$$

Вариант №6

1. Найти интеграл

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int arctgx\,dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2-1)}$$

Вариант №7

1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^4 x\,dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+x-6}dx$$

Вариант №8

1. Найти интеграл

$$\int tg^2 xdx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x\cdot 3^x\,dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^2 3x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1} dx$$

Вариант №9

1. Найти интеграл

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}} dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int arctg \sqrt{x} dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^4 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$$

Вариант №10

1. Найти интеграл

$$\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \arcsin x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^5 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+3x} dx$$

Вариант №11

1. Найти интеграл

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cdot arctgx\,dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^2 5xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{x^3+x}$$

Вариант №12

1. Найти интеграл

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \arccos x\,dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-\sqrt[4]{x}}}\,dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$$

Вариант №13

1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{2x-1}.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int xe^{-x}dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^5 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{x^2 - x}$$

Вариант №14

1. Найти интеграл

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int 3x \cos 3x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$$

Вариант №15

1. Найти интеграл

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + a^2} dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cos x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx$$

Вариант №16

1. Найти интеграл

$$\int tg\, 3x\, dx$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cdot \sin 2x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$$

Вариант №17

1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cdot arctgx\, dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{2x}{x^4 + 3} dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin 4x \cdot \cos^2 x\, dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Математика»
Направление подготовки 45.03.02 «Лингвистика»
«Бакалавр»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

Общие положения

Фонд оценочных средств образовательного учреждения (ФОС ОУ) является центральным элементом системы оценивания уровня сформированности компетенций обучающихся и выпускников на соответствие требованиям ФГОС ВПО

. ФОС ОУ систематизирует и обобщает различные аспекты, связанные с оценкой качества образования, уровня сформированности компетенций обучающихся и выпускников на соответствие требованиям ФГОС ВПО

В соответствии с требованиями ФГОС НПО и ФГОС СПО для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным требованиям соответствующей ОПОП создает настоящие фонды оценочных средств для проведения **текущего** контроля успеваемости и **промежуточной аттестации** обучающихся.

Текущий контроль успеваемости осуществляется в ходе повседневной учебной работы по курсу дисциплины, МДК, учебной практики по индивидуальной инициативе преподавателя, мастера производственного обучения. Данный вид контроля стимулирует у обучающихся стремление к систематической самостоятельной работе по изучению учебной дисциплины, МДК, овладению профессиональными и общими компетенциями.

Промежуточная аттестация обучающихся по учебной дисциплине, междисциплинарному курсу осуществляется в рамках завершения изучения данной дисциплины, междисциплинарного курса и позволяет определить качество и уровень ее (его) освоения. Предметом оценки освоения МДК являются умения и знания.

Промежуточная аттестация обучающихся по профессиональному модулю в целом осуществляется в форме экзамена (квалификационного) и позволяет определить готовность к выполнению соответствующего вида профессиональной деятельности и обеспечивающих его профессиональных компетенций, а также развитие общих компетенций, предусмотренных для ОПОП в целом. Условием допуска к экзамену (квалификационному) является успешное освоение обучающимися всех элементов программы профессионального модуля: теоретической части модуля (МДК) и практик.

При помощи фонда оценочных средств осуществляется контроль и управление процессом приобретения обучающимися необходимых знаний, умений, практического опыта и компетенций, определенных ФГОС НПО / СПО по соответствующему направлению подготовки в качестве результатов освоения профессиональных модулей, либо отдельных учебных дисциплин.

Фонд оценочных средств должен формироваться на основе ключевых принципов оценивания:

валидность: объекты оценки должны соответствовать поставленным целям обучения;

надежность: использование единообразных показателей и критериев для оценивания достижений;

объективность: получение объективных и достоверных результатов при проведении контроля с различными целями.

Фонд оценочных средств по отдельной профессии НПО/специальности СПО состоит из комплектов контрольно-оценочных средств (КОС) по каждой учебной дисциплине, профессиональному модулю.
.Непосредственным исполнителем разработки комплекта контрольно-оценочных средств по учебной дисциплине, профессиональному модулю является преподаватель, по соответствующей профессии / специальности. Комплект контрольно-оценочных средств может разрабатываться коллективом авторов по поручению председателя предметно-цикловой комиссии.

Работы, связанные с разработкой комплекта контрольно-оценочных средств, вносятся в индивидуальные планы преподавателей,

Вопросы к зачету

Векторы: определение, равенство, единичные вектора, сложение векторов, умножение вектора на число.

Координаты вектора. Свойства координат. Коллинеарность и компланарность векторов.

Определители 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей.

Скалярное произведение векторов: определение, свойства, угол между векторами.

Векторное произведение. Свойства векторного произведения.

Правило Крамера. Метод Гаусса.

Миноры и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки (столбца).

Перемножение матриц. Свойства умножения матриц.

Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения.

Ранг матрицы. Способы вычисления ранга матрицы.

Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матрицы на число.

Обратная матрица. Решения системы уравнений в матричной форме.

Вырожденная матрица, левая и правая обратная матрица, присоединенная или взаимная матрица.

Линейные операции над матрицами.

Свойства ранга матрицы .Элементарные преобразования над матрицами.

Базис, свойства базиса (линейная зависимость и независимость)

Методы решения систем линейных неоднородных уравнений (общий обзор)

Расстояние от точки до прямой в пространстве

Вектор, определение, модуль, равенство, свойства отношения «равно» векторов.

Векторное произведение векторов. Свойства, выражение векторного произведения через координаты сомножителей.

Коллинеарные и компланарные векторы. Необходимые и достаточные условия. Угол между векторами.

Структура общего решения линейной неоднородной системы (случай $r<n$.).

Вектора. Действие над векторами. Разложение вектора по базису.

Линейные операции над матрицами.

Решение системы линейных неоднородных уравнений в матричной форме.

Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Свойства векторного и смешанного произведения векторов.

Понятия числа. Числовая ось.

Величины постоянные и переменные. Понятие числовой последовательности. Монотонные величины.

Определение предела последовательности. Геометрическая интерпретация.

Предел последовательности (на примере).

Величины бесконечно малые и бесконечно большие. Теорема о сжатой переменной.

Предел функции.

Основные теоремы о пределах.

Ограниченные функции. Теоремы.

Функции, стремящиеся к бесконечности.

Теоремы о бесконечно малых функциях.

Сравнение бесконечно малых функций.

Непрерывность функции.

Теоремы о непрерывных функциях.

Тригонометрические неопределенности. Первый замечательный предел.

Раскрытие некоторых типов неопределенностей.

Понятие производной функции. Геометрический и физический смысл производной.

Производная сложной функции. Производные различных порядков.

Дифференциал функции. Дифференциалы различных порядков.

Первообразная и неопределенный интеграл: общее определение, основные свойства. Таблица интегралов.

Неопределенный интеграл: интегрирование по частям, замена переменной (метод подстановки, теорема).

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

Некоторые сведения об алгебраических многочленах.

Интегрирование рациональных функций (в зависимости от корней знаменателя дроби).

Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера.

Интегрирование тригонометрических функций (все случаи).

Определенный интеграл: задача о вычислении площади криволинейной трапеции, общее определение.

Свойства определенного интеграла.

Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о существовании производной у непрерывной функции по переменному верхнему пределу (с доказательством).

Формула Ньютона-Лейбница и ее доказательство для случая непрерывной на отрезке функции.

Замена переменных в определенном интеграле (теорема с доказательством), интегрирование по частям для определенного интеграла.

Приложения определенного интеграла: вычисление площади если кривая задана параметрически. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах, вывод формулы.

Приложения определенного интеграла :длина дуги кривой в прямоугольной системе координат ,если функция задана параметрически , в полярной системе координат. Приложения определенного интеграла: объем тела вращения, площадь поверхности тела вращения.

Приложения определенного интеграла: вычисление объема тел по площади параллельных сечений.

Задания для итогового тестирования

Тема. Матрицы.

1. A=$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда матрица 2A-3B равна

1)$\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$ 2)* $\begin{pmatrix} -11 & -29 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ 3)$\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ 4)$\begin{pmatrix} -11 & -29 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

2. A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда произведение матриц A·B равно

1)*$\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ 2)$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ 3)$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ 4)$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

3. A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, тогда A^2 равна

1)* $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$

4. A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, тогда $A^т$ равна

1) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 4)* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

5. Матрица $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{...............} \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ называется

1)вырожденной 2)невырожденной 3)*нулевой 4)пустой

6. A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда произведение матриц B·A равно

1)* $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

7. A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, тогда A^2 равна

1)* $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$

8. A= $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда матрица 2A-3B равна

1) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$ 2)* $\begin{pmatrix} -11 & -23 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$

Тема. Определители.

1. Определитель $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ равен

1)49 2)40 3)59 4)*58

2. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ равен

1)*-17 2)17 3)-13 4)13

3. Для определителей не справедливо свойство:

1)при транспонировании матрицы ее определитель не изменяется

2)определитель квадратной матрицы равен нулю, если у нее есть две одинаковые строки

если все элементы определителя умножить на число m, то определитель умножится на число m

4)определитель равен нулю, если у него есть нулевой столбец

4. Минор M_{23} элемента a_{23} матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ равен

1)*- 4 2)4 3)0 4)5

5. Разложением определителя третьего порядка по первой строке является выражение

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{21}(-1)^{1+2}A_{21} + a_{31}(-1)^{1+3}A_{31}$

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

3)* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13}$

4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}A_{11} + (-1)^{1+2}A_{12} + (-1)^{1+3}A_{13}$

6. Определитель $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен

1)0 2)21 3)*-15 4)15

.7. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1)2 2)3 3)4 4)*5

8. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1)2 2)*0 3)1 4)4

9. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1)2 2)*0 3)1 4)4

Тема. Система линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

1. Сумма корней системы $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$ равна

1)9 2)3 3)*17 4)-17

2). Система $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

1)имеет единственное решение

2)*имеет множество решений

3)не имеет решений

4)несовместна

3. Система $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

1)не имеет решений

2)имеет единственное решение

3)несовместна

4)*имеет множество решений

4. Система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ является

1)определенной 2)неопределенной 3)совместной 4)*несовместной

5. Сумма корней системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ равна

1)3 2)*0 3)бесконечность 4)6

6. Базисными переменными системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ могут быть

1)x_1 2)* x_1, x_2 3)x_1, x_2, x_3 4)x_1, x_2, x_3, x_4

7. Сумма корней системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ равна

1)*6 2)4 3)7 4)3

8. Систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ можно решать

1)методом Крамера

2)матричным методом

3)*методом Гаусса

4)методом обратной матрицы

9. Система $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

1)имеет единственное решение

2)имеет множество решений

3)*не имеет решений

4)несовместна

10. Базисными переменными системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ могут быть

1)x_1 2) x_1, x_2 3)*x_1, x_2, x_3 4)x_1, x_2, x_3, x_4

Тема. Системы координат на плоскости и в пространстве. Векторная алгебра.

1. Точка М задана полярными координатами

2. Векторы *a*=(1; 2; 0), *b*=(3;-1;1), *c*=(0;1;1) являются

1)линейно зависимыми

2)*линейно независимыми

3)коллинеарными

4)компланарными

3. Линейно зависимыми являются векторы

1) $\bar{a}(1,3), \bar{b}(3,1)$

2) $\bar{a}(1,3), \bar{b}(3,2)$

3)* $\bar{a}(-6,4), \bar{b}(3,-2)$

4) $\bar{a}(6,4), \bar{b}(3,-2)$

4. Даны векторы $\vec{a}$ = (2; -1; - 2) и $\vec{b}$ = (8; - 4; 0), вектор $\vec{c} = 2\vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$, тогда угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ равен

1)*58^0 2)56^0 3)52^0 4)50^0

5. Векторы $\bar{a}_1$=(l, 3, 1, 3), $\bar{a}_2$ =(2, 1, 1, 2) и $\bar{a}_3$ =(3,-1, 1, 1) являются

1)базисными

2)*зависимыми

3)независимыми

4)равными

6. $\vec{a}$ = (5; -1; 6) и $\vec{b}$ = (6; 3; -3), тогда проекция вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ равна

1) $\frac{\sqrt{54}}{9}$ 2)* $\frac{9}{\sqrt{54}}$ 3) $\frac{9}{6}$ 4) $\frac{6}{\sqrt{54}}$

7. Вершины пирамиды находятся в точках A(2,3,4), B(4,7,3), C(1,2,2), D(-2,0,-1), тогда площадь грани ABC равна

1) $\sqrt{110}$ 2)10 3) $\frac{2}{\sqrt{110}}$ 4)* $\frac{\sqrt{110}}{2}$

8. Вершины пирамиды находятся в точках A(2,3,4), B(4,7,3), C(1,2,2), D(-2,0,-1), тогда объем пирамиды равен

1)10 2)*11 3)12 4)13

Тема.Пределы

1. Значение предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{6x}$ равно:

а) 0; б) 3; в) $\frac{1}{3}$; г) 1.

2.Значение предела $\lim\limits_{x \to 8} \frac{x(x-8)}{x^2-64}$ равно:

а) -0,5; б) 0,5; в) ∞; г) 0.

3.Значение предела $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1-2x^2+3x}{4-3x+x^2}$ равно:

а) -2; б) $\frac{1}{4}$; в) 0; г) ∞.

Тема.Производная функции

1 Производная функции y= ln(sinx) равна:
1) 1/sinx. 2) 1/cosx. 3) ctgx. 4) tgx. 5) cosx. 6) ln(cosx)

2. Как называется главная, линейная часть приращения функции?
1.производная;
2.дифференциал (dy);
3.функция;
4.бесконечно малая;
5.бесконечно большая.
.
3. Какие виды неопределенностей можно раскрыть при помощи правила Лопиталя?
1.{0};
2.
3. c·0;
4. c·∞;
5. ∞·∞.

4. Является ли условие y′=0 в т. x=a достаточным условием существования экстремума?
1.да;
2.нет;
3.не всегда;
4.иногда;
5.нет правильного ответа.

5.Производная функции $y = x^2 tgx$ имеет вид:

а) $y' = 2x\frac{1}{\cos^2 x}$;

б) $y' = 2xtgx + x^2\frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $y' = 2x + \frac{1}{\cos^2 x}$;

г) $y' = 2xtgx - x^2\frac{1}{\cos^2 x}$.

6. Вторая производная функции $y = 1 - 2x + 4x^2$ имеет вид:

а) $y'' = -2x + 8$;

б) $y'' = 3$;

в) $y'' = 8$;

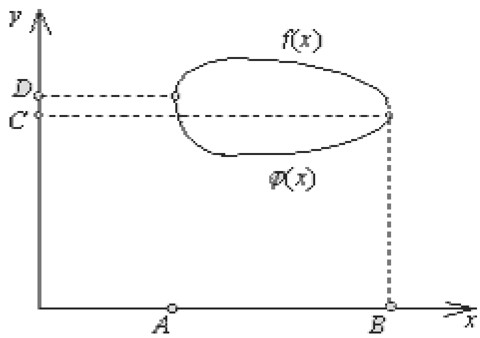
г) $y'' = 0$.

7.Абсциссой точки перегиба графика функции $y = 6x^2 - 2x^3 - 3$ является:

а) -1; б) 0; в) $\frac{3}{2}$; г) 1.

Тема. Интегралы

1. Чему равна площадь фигуры на рисунке?



1. $\int_{A}^{B} f(x)\,dx$

2. $\int_{C}^{D} \left(f(x) - \varphi(x)\right)dx$

3. $\int_{A}^{B} f(x)\,dx - \int_{A}^{B} \varphi(x)\,dx$

4. $\int_{C}^{D} f(x)\,dx - \int_{A}^{B} \varphi(x)\,dx$

5. $\int_{A}^{B} f(x)\,dx - \int_{B}^{A} \varphi(x)\,dx$

2. Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям $\int_{0}^{\frac{\pi}{2\alpha}} (x+3)\sin \alpha x\,dx$ и выбрать правильный ответ:

1. $\frac{1+3}{\alpha^2}$

2. $\frac{3}{x^2}$

3. $\frac{1+3x}{x^2}$

4. $\frac{1+3x}{x}$

5. $\frac{1+3}{x^2}$

3. Вычислить интеграл, используя правило замены переменных $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

1. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

4. $\frac{\pi}{3}$

5. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

4. Не производя вычислений, укажите интеграл, равный нулю.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$

2. $\int_{-a}^{a} x^4 e^{x^2} dx$

5. Чему равен интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^3}$?

1. 1/8

2. интеграл расходится

3. 0

4. 2

5. 1/4

6. Определённый интеграл $\int_1^2 4x^3 dx$ равен:

а) x^4; б) 15; в) 36; г) 17.

7.Используя свойства определённого интеграла, интеграл $\int_0^{2\pi} (\cos(5x-1)+2x^3)dx$ можно привести к виду:

а) $2\int_0^{2\pi} (\cos(5x-1)+x^3)dx$;

б) $\int_0^{\pi} \cos(5x-1)dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2x^3 dx$;

в) $\int_{2\pi}^{0} (\cos(5x-1)+2x^3)dx$;

г) $\int_0^{2\pi} \cos(5x-1)dx + 2\int_0^{2\pi} x^3 dx$.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине «Математика»
Направление подготовки 45.03.02 «Лингвистика»
«Бакалавр»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

ПРОГРАММА КУРСА

1. Элементы векторной алгебры

Векторная алгебра. Свойства скалярного, векторного и смешанного произведений. Действия над матрицами. Свойства определителей. Определитель произведения матриц. Алгоритм вычисления обратной матрицы. Правило Крамера. Метод Гаусса.

Введение в анализ. Дифференциальное исчисление

Числовые последовательности. Сходящиеся последовательности. Монотонные последовательности. Предел функции. Свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Раскрытие неопределённостей. Замечательные пределы. Основные свойства непрерывных функций. Свойства производной. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференциал. Основные теоремы дифференциального исчисления. Теорема Лопиталя. Полное исследование функции. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел.

Первообразная и неопределенный интеграл: общее определение, основные свойства. Таблица интегралов Неопределенный интеграл: интегрирование по частям, замена переменной (метод подстановки, теорема) Интегрирование рациональных функций (в зависимости от корней знаменателя дроби). Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера. Интегрирование рациональных функций (в зависимости от корней знаменателя дроби). Формула Ньютона-Лейбница и ее доказательство для случая непрерывной на отрезке функции. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о существовании производной у непрерывной функции по переменному верхнему пределу, (с доказательством Приложения определенного интеграла : длина дуги кривой в прямоугольной системе координат ,если функция задана параметрически , в полярной системе координат. Приложения определенного интеграла: объем тела вращения, площадь поверхности тела вращения

Введение в анализ. Интегральное исчисление

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Непосредст-венное интегрирование, интегрированиезаменой переменной, интегрирование по частям. Специальные приемы интегрирования некоторых триго-нометрических выражений и функций, содержащих квадратный трехчлен.

Интегрирование простейших видов иррациональностей. Понятие о «небе-рущихся» интегралах и неэлементарных функциях.

Определение и основные свойства определенного интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы от непрерывной функции по бесконечному промежутку. Интеграл Пауссона.

.Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Вычисление площадей плоских фигур, объемов тел вращения и длин дуг плоских кривых.

Методические указания к решению задач по теории матриц и определителей

Прямоугольной матрицей называется совокупность m· n чисел, расположенных в таблице из m строк и n столбцов

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Числа a_{ji} *, i=1,m, j=1,n,* входящие в данную таблицу, называются матричными элементами, а индексы i и j элемента a_{ji} указывают (соответственно) номера строки и столбца, в которых расположен элемент. Если m=n, то матрица называется квадратной. Квадратная матрица из n строк и n столбцов, называется матрицей n-го порядка. Каждой матрице порядка n ставится в соответствие число, которое называется определителем или детерминантом этой матрицы и обозначается одним из следующих символов

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = |A_n| = \det A_n = \Delta_n \qquad (1.1.1)$$

Числа a_{ij} **(*i*, *j*=*1*,*n*)** называются элементами определителя.
Если определитель матрицы равен 0, то матрица называется особенной (вырожденной), а если определитель отличен от 0 - то матрица неособенная (невырожденная).
Квадратная матрица называется <u>симметрической,</u> если $a_{ij} = a_{ji}$,
т.е. равны элементы, симметричные относительно главной диагонали (главная диагональ образована элементами a_{ji} , $i=1,n$

<u>Диагональной</u> называется матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали равны 0.

<u>Единичная матрица</u> - это диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1. Обозначается единичная матрица буквами E или I.
Пример 1.1.1.

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ - симметрическая матрица третьего порядка

б) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка

в) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - единичнаяматрица третьего порядка

Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковые размерности и равные соответствующие элементы.
Матрица A^T , полученная из данной матрицы A заменой
каждой её строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной относительно A . Если матрица A имеет размеры m· n, то
матрица A^T имеет размеры n·m.
Пример

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}, \qquad A^T=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 3 & 5 & 2\end{bmatrix};$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}, \qquad A^T=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}.$$

Линейными операциями над матрицами называются операции сложения (вычитания)
и умножения на число. Сложение и вычитание определяется только для матриц одинаковых размеров.

Суммой (разностью) двух матриц $A=\{a_{ij}\}_{mn}$ и $B=\{b_{ij}\}_{mn}$ называется матрица $C=\{c_{ij}\}_{mn}$, для которой $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Произведением матрицы $A=\{a_{ij}\}_{mn}$ на число **α** называется матрица $B= \alpha \{a_{ij}\}_{mn}$ для которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Пример

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 7 & 0\end{bmatrix}$$

Даны матрицы
и число **α** = 4. Вычислить матрицы: C=A+B, *D=A-B, M = a4*

$$а) \qquad C=A+B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 7 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 7 & 1 & 11\end{bmatrix};$$

$$б) \qquad D=A-B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 7 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 3\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix};$$

$$в) \qquad M=4\cdot A=4\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 8\\ 12 & 16 & 4\end{bmatrix}$$

Умножение матриц A и B, т.е. получение произведения этих матриц C = AB
, возможно лишь в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Такие матрицы называются согласованными.

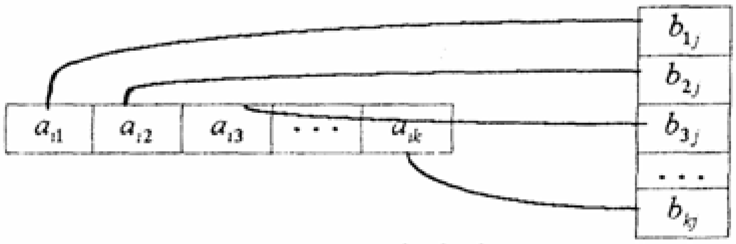


Рис. 1.1.1.

Произведением двух согласованных матриц $A_{mk}=\{a_{ij}\}_{mk}$ и $B_{kn}=\{b_{ij}\}_{kn}$

называется такая третья матрица $C_{mn}=\{c_{ij}$
$\}_{mn}$ для которой каждый элемент c_{ij}
, $i=1,m$, $j=1,n$.вычисляется по формуле (рис. 1.1.1.)

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} dpj = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Пример 1.1.4. Вычислить произведение матриц

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B_{34} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Можно ли получить произведение *BA* ?
Число столбцов матрицы A(3) равно числу строк матрицы *B(3).*
Поэтому произведение *AB*= C определено. Матрица C имеет размерность 2x4, а её элементы вычисляются по формуле (1.1.2)

$$C_{23} = A_{23} \cdot B_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 10 & 8 & 20 \end{bmatrix},$$

$$\text{где} \quad c_{11} = \sum_{p=1}^{3} a_{1p} b_{p1} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = -3;$$

$$c_{12} = \sum_{p=1}^{3} a_{1p} b_{p2} = 1 \cdot (1) + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 3;$$

$$c_{13} = \sum_{p=1}^{3} a_{1p} b_{p3} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 3 \text{ и т.д.}$$

Произведение B·A не определено, т.к. число столбцов матрицы B(4) не равно числу строк матрицы A(2).

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

<u>Определителем</u> (1.1.1) матрицы второго порядка называется число

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число
Студенту следует обратить внимание на правила треугольника и Сильвестра вычисления определителей третьего порядка. Пример 1.1.5. Вычислить определитель

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot3 + 3\cdot4\cdot(-1) + 0\cdot2\cdot1 - (-1)\cdot1\cdot1 - 0\cdot3\cdot3 - 2\cdot4\cdot2 =$$
$$= 6 - 12 + 1 - 16 = -21$$

Минором M_{ij} $(i, j=1,n)$ элемента a_{ij} определителя называется определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} $(i, j=1,n)$ элемента a_{ij} определителя называется его минор взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (1.1.3)$$

Пример 1.1.6. Записать миноры и алгебраические дополнения элементов определителя примера 1.1.5.

$$a_{11} = 2;\ M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5; \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -5;$$
$$a2 = 3;\ M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - (-4) = -4; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -4;$$
$$a_{13} = 1;\ M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1; \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1;$$
$$a_{21} = 0;\ M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -7;$$

и т.д. Всего можно записать 9 миноров и 9 алгебраических дополнений элементов и определителя матрицы третьего порядка.

Замечание Определители матриц n-го порядка (n =1,2...) короче называют определителями n-го порядка.

Свойства определителей:

1) определитель не изменится, если транспонировать матрицу определителя;
2) при перестановке двух соседних строк (столбцов) определитель меняет знак;
3) определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен 0;
4) общий множитель для элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя;
5) определитель равен 0 , если все элементы строки (столбца) равны нулю;
6) определитель не изменится, если к элементам строки (столбца), прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель;
7) определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$
$$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Например:

Пример 1.1.7. Вычислить определитель примера 1.1.5., используя свойство 7 определителей (разложение произвести по элементам первого столбца)

По аналогии с формулой (1.1.4) вводятся определители n-го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{ki}, \quad i = \overline{1,n} \qquad (1.1.5)$$

Пример 1.1.8. Используя свойства 1-7 определителей, вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{l} \text{используя свойство 2} \\ \text{переставим местами} \\ \text{первую и вторую} \\ \text{строки} \end{array}\right| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{l} \text{используя свойство 6} \\ \text{в 1-ом столбце элементы} \\ a_{21}, a_{31}, a_{41} \\ \text{сделаем нулевыми} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{используя формулу 1.1.5} \\ \text{(свойство 7) разложим} \\ \text{определитель по} \\ \text{элементам столбца} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} -1 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{l} \text{дальнейшие преобра-} \\ \text{зования аналогичны} \\ \text{вышеуказанным} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} -1 & 8 & -1 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -15 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\|\begin{matrix} -7 & -6 \\ -15 & -2 \end{matrix}\right\| = 14 - 90 = 76$$

Матрицей, <u>обратной к матрице</u> *A,* называется квадратная матрица A^{-1}, такая что $A^{-1} A = E$

Если матрица *A* невырожденная **(det A¹O)**, то обратная матрица A^{-1} находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

где A_{ij} ($i, j =$ $\overline{1,n}$

1,n) $\overline{1,n}$

$\overline{1,n}$

- алгебраические дополнения элементов a_{ij} (1.1.3)

Пример 1.1.9. Найти матрицу, обратную к данной матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы *A*

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

По формуле (1.1.6) находим (вычисление алгебраических дополнений элементов матрицы *A* рассмотрено в примере 1.1.6) :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Проверка :

$$A^{-1}A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 4 & -5\\ -3 & 4 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E$$

Студентам рекомендуется провести вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований.

Рангом матрицы *A* размерности *mxn* называется наибольший из порядков её миноров, отличных от нуля. Если ранг матрицы *A* равен *r*, то это означает, что в матрице *A* имеется отличный от нуля минор порядка *r* , но всякий минор порядка большего, чем ***r*,** равен 0.

Ранг матрицы обозначается *r(A)* .

Свойства ранга матрицы *A* размерности *m´ n*

1) $0 \le r \le \min(m,n)$;

2) r =0 тогда и только тогда, когда матрица нулевая;

3) для квадратной матрицы n-го порядка r=n тогда и только тогда, когда матрица невырожденная;

4) ранг транспонированной матрицы равен рангу исходной матрицы;

5) ранг матрицы не изменится, если вычеркнуть (дописать) нулевую строку (столбец);

6) ранг матрицы не изменится, если к элементам строки матрицы прибавить элементы другой строки матрицы, предварительно умноженные на некоторое число;

7) ранг матрицы не изменится, если переставить любые строки (столбцы) матрицы.

Пример 1.1.9. Найти ранг матрицы *A*

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ -3 & 9 & -4 & -7\\ 3 & 0 & 7 & 1\end{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 15 & 5 & -10\\ 0 & -6 & -2 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\text{разделим элементы}\\ \text{3-й 4-й строк на их}\\ \text{общий множитель}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1 & -2\\ 0 & -3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

RgA=2 т.к. имеется отличный от нуля определитель второго порядка,

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-3$$

например

Студент должен уметь решать системы линейных алгебраических уравнений (в дальнейшем СЛАУ)

1) по формулам Крамера и матричным методом (в случае, когда матрица *A* системы невырожденная) ;

2) произвольные СЛАУ с использованием теоремы Кронекера-Капелли методом Гаусса.

Рассмотрим примеры на применение этих методов.

1) Предположим СЛАУ имеет невырожденную матрицу порядка *n.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \det A \neq 0, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{1,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{1,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Правило Крамера. Если главный определитель СЛАУ отличен от нуля ($\Delta \neq O$), то СЛАУ имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \ i = \overline{1,n} \qquad (1.1.7)$$

Матричный метод. Если матрица СЛАУ невырожденная, то решение СЛАУ может
быть найдено по формуле

$$X = A^{-1}B \qquad (1.1.8)$$

где матрица A^{-1} вычисляется по формуле (1.1.6), либо методом элементарных преобразований.

Пример 1.1.10. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

а) по формулам Крамера;

б) методом обратной матрицы

Запишем матрицу системы *A,* матрицу-столбец неизвестных X и матрицу-столбец свободных членов *X :*

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&0&1\\2&-1&1\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$a)\Delta=\det A=\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&0&1\\2&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&0&1\\4&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&1\\4&0\end{vmatrix}=4;$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\3&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\4&0&0\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=4;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&2&1\\2&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-1\\5&3&0\\4&4&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&3\\4&4\end{vmatrix}=-(20-12)=-8;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&0&2\\2&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&0&2\\4&0&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&2\\4&4\end{vmatrix}=-(12-8)=-4;$$

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=4/4=1;\qquad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=-8/4=-2\qquad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=-4/4=-1$$

б)Воспользуемся формулой $X=A^{-1}B$, где матрица A^{-1} вычислена в примере 1.1.9.

$$X=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&4&-5\\-3&4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1+0+3\\-1+8-15\\-3+8-9\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\\-8\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

$$T.o.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}\qquad \text{или}\qquad \begin{bmatrix}x_1=1\\x_2=-2\\x_3=-1\end{bmatrix}$$

2) Предположим, что матрица СЛАУ имеет размерность mxn. В этом случае СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ ...\quad ...\quad ...\quad ...\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы $\overline{A}$.

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix}$$

<u>Теорема Кронекера-Капелли.</u> Система линейных .алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы.

Для решения произвольных СЛАУ применяется метод Гаусса. Сущность метода состоит в том, что расширенная матрица СЛАУ приводится к ступенчатому виду.

Пример 1.1.11. Решить систему

$$\begin{cases} x_1+7x_2+3x_3+2x_4=6 \end{cases}$$

$2x_1+5x_2+2x_3+3x_4=4$

$7x_1+4x_2+x_3+9x_4=2$

В этой системе **m=3** - количество уравнений; **n=4 -** количество неизвестных. Запишем расширенную матрицу системы A и преобразуем ее к ступенчатому виду

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&7&3&2&6\\2&5&2&3&4\\7&4&1&9&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&7&3&2&6\\0&-9&-4&-1&-8\\0&-45&-20&-5&40\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&7&3&2&6\\0&9&4&1&8\\0&9&4&1&8\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&7&3&2&6\\0&9&4&1&8\end{array}\right]$$

_

RgA=2, *rgA=2.* По теореме Кронекера-Капелли СЛАУ совместна. Укороченная СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1+7x_2+3x_3+2x_4=6 \end{cases}$$

$9x_2+4x_3+x_4=8$

В качестве базисных неизвестных выберем неизвестные x_1 и x

$_2$, а неизвестные, x_3, x_4 примем за

свободные, полагая $x_3=C_1$, $x_4=C_2$.

Тогда СЛАУ может быть записана в виде

$$\begin{cases} x_1+7x_2=6-3C_1-2C_2 \end{cases}$$

$9x_2=8-4C_1-C_2$

$x_3=C_1$

$x_4=C_2$

Откуда находим

$$x_2=\frac{8-4C_1-C_2}{9}$$

$$x_1=6-3C_1-2C_2-\frac{7}{9}(8-4C_1-C_2)=\frac{54-27C_1-18C_2-56+28C_1+7C_2}{9}=\frac{-2+C_1-11C_2}{9}$$

или окончательно получим

$$\begin{cases} x_1=-\frac{2}{9}+\frac{C_1}{9}-\frac{11C_2}{9} \\ x_2=\frac{8}{9}+\frac{4C_1}{9}-\frac{C_2}{9}, \qquad C_1,C_2\in R \\ x_3=C_1 \\ x_4=C_2 \end{cases}$$

Пример 1.1.12. Решить систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=-4 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=2 \\ -x_1+3x_2-x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+2x_4=3 \end{cases}$$

Система линейных алгебраических уравнений несовместна.

Замечание. Однородные СЛАУ всегда совместны, т.к. ранги расширенной матрицы системы и матрицы системы совпадают.

Вопросы для самопроверки

1. Какие матрицы называются равными?
2. В каких случаях возможно перемножение двух матриц ?
3. В каких случаях существуют произведения как АВ так и ВА?
4. Что называется минором и алгебраическим дополнением элементов матрицы ? В чем отличие между ними ?
5. Сформулируйте правило Крамера.
6. Как осуществляется транспонирование матрицы ?
7. В чем суть метода элементарных преобразований получения обратной матрицы ?
8. Что такое ранг матрицы ?
9. Что такое основная и расширенная матрицы системы ?
10. Сформулируйте и поясните на примерах теорему Кронекера-Капелли

. Методические указания к решению задач векторной алгебре

Для отвлеченного изображения конкретных векторных величин используются векторы. Вектором (геометрическим) называется направленный отрезок прямой. Два вектора называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину

. Положение начальной точки таких векторов не играет никакой роли. Поэтому геометрические векторы называются свободными.

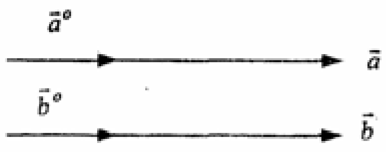
При изучении темы «Векторная алгебра» студенту следует обратить внимание на ниже рассмотренные вопросы.

1. <u>Линейные операции над векторами</u> (сложение, вычитание, умножение на число). Векторы необходимо уметь складывать как по правилу треугольника, так и по правилу параллелограмма.

2. <u>Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Базисные векторы. Декартов базис.</u>

Пример 1.2.1. Указать при каких значениях α и β возможно равенство

$\boldsymbol{\alpha a + \beta b = 0}$, где a° и b° единичные векторы ($a^0=a\,/\,|a|$, $b^0=b\,/\,|b|$). Для решения приведенной задачи необходимо рассмотреть возможное расположение векторов a и b :



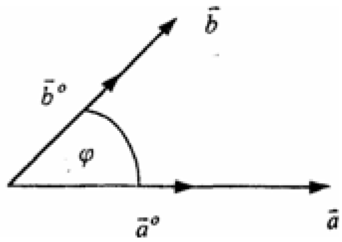


Рис .1.2.1 Рис .1.2.2

Рис .1.2.3

a) векторы *a* и *b* **сонаправлены (Рис. 1.2.1), тогда α=-β**;

b) векторы *a* и *b* имеют противоположное направление (рис.1.2.2).
В этом случае **α=β** ;

c) векторы *a* и *b* образуют между собой угол φ. При этом угол φ отличен от 0 и π радиан (рис.1.2.3). Приведенное в условии равенство возможно лишь при α=β=0.

Рассмотренный пример дает представление о линейной зависимости и независимости векторов (важнейшее положение темы «Векторная алгебра»).

Линейной комбинацией *n* векторов x_i (i=1,n) называется сумма произведений этих векторов на действительные числа a_i (i=1,n), а именно

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

(В рассмотренном примере записана линейная комбинация 2^x единичных векторов *a*° и b°) .

Векторы x_i (i=l,n) называются линейно-зависимыми, если их линейная комбинация (1.2.1) равна нулю, а среди коэффициентов a_i (i=l,n) имеется хотя бы один отличный от нуля. На рис. 1. 2 .1-1. 2 . 2 изображены два линейно зависимых вектора. Они могут быть расположены на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Два вектора, расположенные на одной либо на двух параллельных прямых, называются <u>коллинеарными</u>.

Условие коллинеарности векторов *a = λb , где λÎR.*

Если три вектора расположены в одной либо в параллельных плоскостях, то они называются <u>компланарными</u>.

Компланарные векторы линейно зависимы. Необходимое и достаточное условие - компланарности векторов:

c = *αa+βb* .

Векторы x_i (i=l,n) называются линейно-независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации (1.2.1) возможно лишь в том случае, когда коэффициенты a_i(i=l,n) одновременно равны 0.

Случай двух линейно-независимых векторов представлен на рис. 1.2.3 (линейная комбинация *αa+βb* равна нулю лишь при одновременном обращении в ноль *α* и *β*) .

Пример 1.2.2. Векторы *a,b,c* некомпланарны (линейно независимы). Доказать, что векторы *m=a+2b-c,* *n=3a-b+c* и *p=a+5b-3c* компланарны и найти их линейную зависимость.

Приравняем к нулю линейную комбинацию векторов *m,n,p* (*αm+βn+γk* = 0) и подставим в равенство разложения векторов *m,n,p* по векторам *a, b,c* .

α(a+ 2b- c)+β(3a- b+ c)+γ(-a+5b-3c)=(α+3β - γ)a+(2 α - β+5 γ)b+(- α+ β-3 γ)c=0

Равенство нулю линейной комбинации векторов *a,b,c* возможно лишь в том случае, когда коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Из этого условия получаем систему линейных алгебраических уравнений, которую решим методом Гауса

(пример 1.1.11)

$$\begin{cases} \alpha+3\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha-\beta+5\gamma=0 \\ -\alpha+\beta-3\gamma=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$rgA=2; \begin{cases} \alpha=3\beta=\gamma \\ -\beta=-\gamma \\ \gamma=C \end{cases}; \begin{cases} \alpha=-2C \\ \beta=C \\ \gamma=C \end{cases}, C\in R$$

Коэффициенты равной нулю линейной комбинации векторов *m,n,p* могут быть отличны от нуля, следовательно векторы *m,n,p* линейно зависимы (компланарны). Подставляя *α, β, γ* в равенство *αm+βn+γp=0* и сокращая на С, получим -*2m+ n+k* = 0 .

С понятием линейной независимости векторов тесно связано такое фундаментальное понятие как базис.

Базисом на плоскости Q называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов, параллельных плоскости Q. Любой вектор с, параллельный плоскости Q, можно представить в виде *c= αa+ βb.*

Базисом в трехмерном пространстве называется любая упорядоченная тройка некомпланарных (линейно-независимых) векторов. Если *a,b,c*- базис в пространстве, то любой вектор *d* пространства можно единственным образом разложить по этому базису по формуле:

d= αa+ βb+γc

Декартовым базисом на плоскости (рмс 1.2.4) называются два единичных, взаимно-перпендикулярных вектора *i* и *j* (| *i*| = |*j*| =1, *i^j),* совпадающих с положительным направлением осей ОХ и ОУ соответственно.

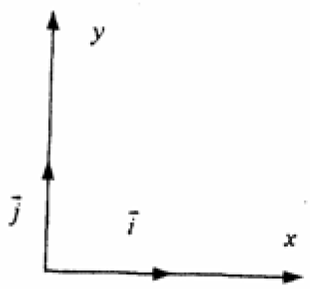


рис.1.2.4

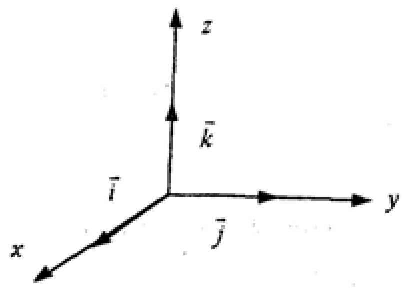


рис.1.2.5

Любой вектор плоскости a может быть единственным образом представлен в виде $a=a_x i+a_y j$, где числа a_x и a_y называются координатами вектора a .

Декартовым базисом в пространстве (рис.1.2.5.) называются три единичных взаимноперпендикулярных вектора i,j,k, совпадающих с положительным направлением осей OX,OY и OZ соответственно. Любой вектор a может быть единственным образом представлен в виде

$a=a_x i+a_y+a_z k$, где числа a_x , a_y , a_z называются координатами вектора a.

Если вектор $a=AB$ задается координатами начальной точки $A(x_a , y_a, z_a)$ и конечной $B(x_b, y_b, z_b)$, то его координаты имеют вид:

$a=(x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a)$.

Два вектора a и b равны в том и только в том случае, когда координаты их равны, т.е. $a_x=b_x$, $a_y=b_y$, $a_z=b_z$.

3.<u>Скалярное произведение векторов</u>. Скалярным произведением векторов a и b называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$a\ b=|a||b|\cos(a,b)$ (1.2.2)

Из формулы (1.2.2) для ненулевых векторов можно вычислить косинус угла между векторами

$$\cos(a,b)=\frac{ab}{|a||b|} \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

Длина вектора $|a|$ определяется по формуле

$|a| = \sqrt{aa}$ (1.2.4)

Из свойств скалярного произведения следует обратить внимание на коммутативный (перестановочный) закон $ab=ba$.

Пример 1.2.3. Вычислить угол между векторами a и b , если $a =2m+ 3n$, $b = m- 2n$, $|m|=2$, $|n|=3$, $(m,n)= \pi/3$. Угол между векторами вычисляется по формуле (1.2.3).

$(2m+3n)(m-2n)=2mm-4mn+3nm-6nn=2mm-mn-6nn=2\cdot2\cdot3\cdot\cos0-2\cdot3\cdot\cos(\pi/3)--6\cdot3\cdot3\cdot\cos0=12-3-54=-45;$

$$|a| = \sqrt{aa} = \sqrt{(2m+3n)^2} = \sqrt{4m^2 + 12mn + 9n^2} = \sqrt{4\cdot 4 + 12\cdot 6\cdot {}^1\!/_2 + 9\cdot 9} = \sqrt{133};$$
$$|b| = \sqrt{bb} = \sqrt{(m-2n)^2} = \sqrt{m^2 - 4mn + 4n^2} = \sqrt{4 - 4\cdot 6\cdot {}^1\!/_2 + 4\cdot 9} = \sqrt{28};$$
Таким образом, $\cos(ab) = \dfrac{-45}{\sqrt{28\cdot 133}} = \dfrac{-45}{\sqrt{4724}}$; $(ab) = \pi - \arccos({}^{45}\!/_{\sqrt{4724}})$.

Предположим в пространстве задан декартов базис $\{ i, j, k \}$ и два вектора
$a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$.
В декартовом базисе скалярное произведение векторов и длина вектора вычисляются по формулам:
$a\, b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b$

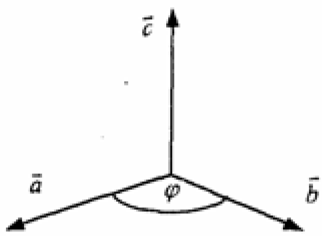
$_z$
(1.2.5)
$|a| = \sqrt{aa} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1.2.6)
Условие перпендикулярности векторов: ab=0 или
$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
=0
(1.2.7)
Условие коллинеарности векторов:

$a=\lambda b$ или $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$
(1.2.8)
Пример 1.2.4. При каком значении α векторы $a(2,3,4)$ и $b(3, \alpha,-1)$ перпендикулярны?
Используя (1.2.7), имеем $ab=6+3\alpha -4=0$ или $3\alpha = -2$, $\alpha = -2/3$
Пример1.2.5.При каких значениях α и β векторы $a(2,4, \alpha)$ и $b(4,\beta,1)$коллинеарны?
Используя условие коллинеарности векторов (1.2.8), имеем: $2/4=4/\beta=\alpha/1$. Откуда $4/\beta = 1/2$ или $\alpha/1=1/2$, $\beta = 8$, а $\alpha = 1/2$
Пример 1.2. 6. Найти вектор b, коллинеарный вектору $a(1,-2,-2)$ образующий с ортом j острый угол и имеющий длину $|b| = 15$.
Пусть вектор b имеет координаты b_x, b_y, b_z, Из условия коллинеарности (1.2.8) имеем $b = \lambda a$ или $b_x = \lambda a_x = \lambda$, $b_y = \lambda a_y = -2\lambda$, $b_z = \lambda a_z = -2\lambda$.
По формуле (1.2.6) вычисляем
$$|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{9\lambda^2} = 3|\lambda| = 15.$$
Откуда $|\lambda|=5$ или $\lambda=\pm 5$. Получаем два вектора b; b_1

(5,-10,-10) и b_2 (-5,10,10). Так угол между вектором *b* и ортом *j* острый, то *cos(b,j)>0* и координата b_y >0. Поэтому в качестве вектора *b* выбираем вектор b_2 т.е. $b = -5i + 10j + 10k$.

4. Векторное произведение векторов.

Необходимо обратить внимание студентов на определение правой и левой троек векторов (рис.1.2.6 и 1.2.7).



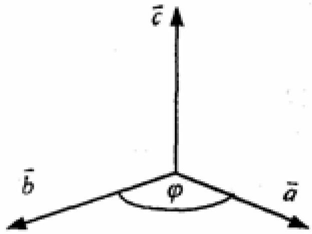


Рис.1.2.6

Рис.1.2.7

Тройка некомпланарных векторов *a,b,c* называется правой (рис.1.2.6) или левой (рис.1.2.7), если будучи приведены к общему началу, эти векторы располагаются так, как могут быть расположены соответственно большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

Векторным произведением векторов *a* и *b* называется вектор *c,* который обозначается символом $c=a'b$ и удовлетворяет следующим трем условиям:

1) вектор *c* перпендикулярен плоскости векторов *a* и *b;*

2)образует с векторами *a и b* правую тройку;

3)длина вектора *c* численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах *a* и *b*, т.е.

$$|c|=|a|\times|b|\sin(a\ b) \quad (1.2.9)$$

Из свойств векторного произведения следует обратить внимание на антикоммутативность, т.е. $a'b=-b'a$

Пример 1. 2.7. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $a=2m+n$ и $b = m- n$, если $|m|=2$, $|n|=1$, $(m,n)=\pi/6$

Вычислим векторное произведение векторов *a*, и *b* и воспользуемся формулой (1.2.9)

$$a'b =(2m+ n)\text{-}(m- n)= 2m'm- 2m'n+n'm-n'n =0-3m'n-0=-3m'n$$

$$S_{пар} = \frac{1}{2}|a\times b| = \frac{3}{2}2\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}(ед^2)$$

$$S_{тр} = \frac{1}{2}S_{пар} = \frac{3}{4}(ед^2)$$

В декартовом базисе { *i,j,k*} векторное произведение векторов $a(a_x,a_y,a_z)$ и $b(b_x, b_y, b_z)$ вычисляется по формуле

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1.2.10)}$$

Пример1.2.8. Найти координаты вектора $b=(b_x,b_y,b_z)$, если он перпендикулярен векторам a_1 (2,-3,1) и a_2 (1,-2,3) и удовлетворяет условию;

b(i +2j-7k) = 10.

Вектор *b* перпендикулярен векторам a_1 и a_2. Поэтому его можно искать в виде:

$$b = \lambda(a_1 \times a_1) = \lambda \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \lambda(-7i - 5j - k); b = -7\lambda i - 5\lambda j - \lambda k$$

Удовлетворим условию *b(i* + 2*j-7k)*=10; -7λ -10λ + 7λ =10; -10λ=10, λ=-1.

Таким образом вектор имеет вид: *b= 7i+5j+k.*

Пример 1.2.9.Вычислить площадь треугольника, вершины которого расположены в точках A(1,2,3), B(2,1,-1), C(3,-1,1).

$S_{\Delta ABC}$ =1/2 |ABxAC|.Вычислим координаты векторов AB и AC и векторное произведение *AB´AC* .

$$AB = AB(1,-1,-4); AC = AC(2,-3,-2); AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -10i - 6j - k;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 6^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{137}\,(ед^2)$$

5.Смешанное произведение трех векторов.

Смешанным произведением трех векторов *a,b,c* называется число, которое обозначается символом *a*x*b-c* (смешанное произведение иногда называют векторно-скалярным).

Если векторы *a,b,c* некомпланарны, то смешанное произведение *a ´b-c* равно объему параллелепипеда, построенного на векторах *a,b,c,* взятому со знаком "+", если упорядоченная тройка векторов *a,b,c* -правая, и со знаком "-", если эта тройка - левая.

Из свойств смешанного произведения трех векторов следует отметить следующие:

1)при круговой перестановке векторов смешанное произведение не меняется, т.е. (*a*x *b)*× *c* = (сх*a)*× *b* = *(b*x*c)*× *a;*

2)если в смешанном произведении поменять местами два соседних сомножителя, то произведение изменит знак, т.е. (*a*x *b)*× *c* = -(*a*x *c)*× *b ;*

3) смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны, т.е. условием компланарности векторов является равенство нулю смешанного произведения этих векторов.

Смешанное произведение векторов в декартовом базисе *{i,j,k}*.Если $a(a_x, a_y, a_z)$, $b(b_x, b_y, b_z,)$ и $c(c_x, c_y, c_z)$, то

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \qquad \mathbf{(1.2.11)}$$

Условие компланарности векторов $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$ (1.2.12)

Наиболее распространенные задачи, решаемые при помощи смешанного произведения:

1)найти объем параллелепипеда, построенного на векторах *a,b,c:*

$V = |a \times b\times c|$**,**

2) найти объем тетраэдра, построенного на векторах *a,b,c:*

$V=1/6\ (|a \times b\times c|)$

3) проверить компланарны ли векторы *a,b,c,* если $a \times b\times c=0,$ то векторы компланарны, если $a \times b\times c^1\ 0,$ то векторы некомпланарны;

4)проверить правую или левую тройку образуют векторы *a,b,c,*

$$a \times b\times c=. \begin{cases} >0 \text{ -тройка векторов - правая ,}\\ <0 \text{ - тройка векторов левая.}\end{cases}$$

Замечание: смешанное произведение векторов *a,b,c,* как правило, записывают в виде $a\times b\times c$.

Пример1.2.10. Вычислить длину высоты тетраэдра *ABCD*, проведенную из вершины *D* к основанию *ABC,* если вершины тетраэдра имеют координаты:

A (1,2,0), B(2,1,1), C(0,-3,-1), D(3,3,4). Найдем координаты векторов, выходящих из вершины *A:*

AB(1,-1,1), AC(-1,-5,-1), AD(2,1,4), $V_{тетр}=1/6(|AB\times AC\times AD|)$; $V_{тетр}=1/3(S_{DABC}\times H_D)$;

$S_{DABC}=1/2\ (|AB´AC|)$; $H_D=\dfrac{3V}{S_{\Delta ABC}}$. Отсюда

$$V_{тетр}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & -5 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & -6 & 0\\ 3 & 0 & 5\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-6\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 3 & 5\end{matrix}\right\|\right.=2(ед^3)$$

$$AB\times AC=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -5 & -1\end{vmatrix}=6i-6k;\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}6\sqrt{1+1}=3\sqrt{2}(ед^2)$$

$$H_D=\frac{3\cdot 2}{3\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}(ед)$$

Вопросы для самопроверки

1.Сформулируйте правила треугольника и параллелограма сложения векторов.

2.Укажите принципиальное различие в формулах для вычисления длины вектора в произвольном и декартовом базисах.
3. Чему равно скалярное произведение базисных векторов в декартовом базисе?
4.Чему равно векторное произведение базисных векторов в декартовом базисе?
5.Запишите условие компланарности векторов. Приведите пример.
6.Можно ли построить треугольник на векторах *a,b,a+b* ?
7.Приведите пример условия, при выполнении которого из трех векторов *a, b,c* можно образовать треугольник.

8. Докажите, что объем тетраэдра вычисляется по формуле V=$\frac{1}{6}\,|\,a\times b\times c|$
9. Вычислите угол между векторами, совпадающими со скрещивающимися ребрами тетраэдра.
10.Как Вы считаете, произведение векторов $a\text{x}b\text{x}c$
(двойное векторное) является векторной величиной или скалярной?

.

Методические указания к решению задач по пределам, непрерывности, производным ,интегралам.

Пусть какая-либо выколотая окрестность точки a лежит в области определения функции $y=f(x)$.

Определение 1. Число B называется пределом функции $y=f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что

$$|x-a|<\delta \text{ и } x\neq a \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon.$$

Обозначение предела: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$.

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Нам надо найти такое $\delta>0$, что $|x-2|<\delta \Rightarrow |(2x+1)-5|<\varepsilon$. Начнем преобразовывать последнее неравенство:

$$|(2x+1)-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |2x+4|<\varepsilon \Leftrightarrow 2|x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь легко понять, что если мы возьмем $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$, то получим требуемое соотношение: $|x-2|<\delta \Rightarrow |(2x+1)-5|<\varepsilon$.

Сформулируем основные теоремы теории пределов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1. Если в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то в этой точке существует и предел суммы $f(x)+g(x)$, причем

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to 2}g(x).$$

Теорема 2. Пусть $f(x)=C$, тогда в любой точке a существует предел $f(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a}C=C$.

Теорема 3. Пусть в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=C$, тогда функция $f(x)\cdot g(x)$ также имеет в точке a предел причем

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=B\cdot C.$$

Теорема 4. Если в точке a существует предел функции $f(x)$, то в этой точке существует и предел функции $C\cdot f(x)$, причем

$$\lim_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to a}f(x).$$

Теорема 5. Пусть в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=C$, $C\neq 0$, тогда функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также имеет в точке a предел, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{B}{C}$.

Перейдем к вычислению некоторого класса пределов, связанных с тригонометрическими, показательными и логарифмическими функциями.

Теорема 6. (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Примеры.

. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=\begin{bmatrix}ax=y\\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y/a}=a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=a$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\begin{bmatrix}\arcsin x=y\\ x=\sin y\\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x\cdot\cos ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}:\lim\limits_{x\to 0}\cos ax=a:1=a$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin ax):x}{(\sin bx):x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx}{x}=a:b$.

Теорема 7. (Второй замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Примеры.

3.. Прологарифмируем равенство $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$:

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln e$ или $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=\begin{bmatrix} ax=y \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y:a}=a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=a$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\begin{bmatrix} e^x-1=y \\ x=\ln(1+y) \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=1:\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=1$.

Непрерывность функции

Определение 1. Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки a. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.
Если $f(x)$ не является непрерывной в точке a, то говорят, что она разрывна в этой точке.

Определение 2.

А) Функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества;

б) $f(x)$ непрерывна в области , если она непрерывна в каждой точке области определения функции $f(x)$;

в) $f(x)$ всюду непрерывна, если $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной оси.

Теорема 1. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ также непрерывны в этой точке. Если, кроме того, $g(a)\neq 0$, то $f(x):g(x)$ непрерывна в точке a.

Теорема 2. (Теорема о сложной функции). Пусть $y=f(x)$, $z=g(y)$, $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$, тогда функция $z=g(f(x))$ непрерывна в точке x_0

Теорема 3. (Больцано-Коши). Пусть $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a;b]$ и на концах промежутка $f(x)$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f(c)=0$.

Теорема 4. (Вторая теорема Больцано-Коши). Пусть $f(x)$

определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, причем $A<B$. Тогда для любого C, $A<C<B$, существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f(c)=C$.

Производная функции

Определение 1. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения ее приращения в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Обозначают производную в точке x_0 так: $f'(x_0)$. Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Если предел существует для всех x из некоторого промежутка, то правило определяет функцию, которую называют производной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$. Нахождение производной называют дифференцированием функции $f(x)$.

Часто употребляются и другие обозначения производной:

$$\frac{df(x)}{dx},\quad \frac{dy}{dx},\quad y'$$

Пример 1. Вычислить производную функции $f(x)=x$

Решение. Для данной функции $f(x+\Delta x)=x+\Delta x$, а потому

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)-x=\Delta x$$

тогда

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

Итак, $x'=1$

Пример 2. Вычислить производную функции $f(x)=x^2$

Решение. Для этой функции имеем :

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тогда $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Итак, $(x^2)'=2x$

Теорема 1. если существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, то:

1. функция Cf производную и $(C f(x))'=C f'(x)$
2. функция $f\pm g$ имеет производную и $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
3. функция fg имеет производную и $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. функция $\frac{f}{g}$ имеет производную и $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

5. суперпозиция (сложная функция) функций f и g , т.е. функция $f(g(x))$ имеет производную, и она находится по правилу

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin(x^2 + x + 1)$

Решение. Функция $\sin(x^2 + x + 1)$ – суперпозиция двух функций $f(u)=\sin u$ и $u=g(x)=x^2+x+1$.. Согласно правилу 5 имеем:

$[\sin(x^2+x+1)]'=\sin'(x^2+x+1)\,(x^2+x+1)'=\cos(x^2+x+1)\odot(2x+1)$

Таблица производных простейших функций

1. $C' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$;
4. $\left(e^x\right)' = e^x$;
5. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$;
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$;
8. $(\sin x)' = \cos x$;
9. $(\cos x)' = -\sin x$;
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Сформулируем несколько теорем о дифференцируемых функциях. Отметим только, что функция называется дифференцируемой в точке или на промежутке, если она имеет производную в этой точке или на этом промежутке.

Теорема 8. (Ферма). Если функция определена, дифференцируема в промежутке $[a;b]$ и в точке $C \in (a;b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение, то $f'(C) = 0$.

Теорема 9. (Ролля). Пусть $f(x)$ определена на промежутке $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $C \in (a;b)$ такая, что $f(C) = 0$.

Теорема 10. (Лагранжа или теорема о среднем). Пусть $f(x)$ определена, непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, тогда существует $c \in (a;b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Наряду с производной, которую часто называют производной первого порядка, рассматриваются производные высших порядков. Так, производная от производной функции $f(x)$ называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)$. Аналогично определяется $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ и т.д. Для примера вычислим $(x\sin x)'''$:

$$(x\sin x)' = x \cdot \cos x + \sin x;\ (x\sin x)'' = -x \cdot \sin x + 2\cos x;\ (x\sin x)''' = -3\sin x - x\cos x.$$

Определение 2. Дифференциалом функции $f(x)$ называется выражение $df(x) = f'(x) \cdot dx$, где $dx = \Delta x$. Аналогично таблице производных строится и таблица дифференциалов. Приведем лишь некоторые примеры из этой таблицы:

$$dC = 0;\ dx^2 = 2xdx;\ d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Роль дифференциалов прояснится при изучении интегралов и дифференциальных уравнений.

Исследование функций с помощью производных

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке $[a;b]$, если для любых $x_0, x_1 \in [a;b]$ имеет место:

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)\ \left(f(x_0) > f(x_1)\right).$$

Теорема 1. Пусть $f(x)$ имеет производную в каждой точке из $[a;b]$. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a;b]$ в том и только в том случае, когда для любого $x \in [a;b]$ $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой максимума $f(x)$, если существует окрестность $O(\varepsilon, x_0)$ такая, что $f(x)$ определена в этой окрестности и для любого $x \in O(\varepsilon, x_0)$

$$f(x_0) > f(x)$$

Аналогично определяется точка минимума. Точка минимума или максимума называется точкой экстремума.

Определение 3. Точка x_0 называется критической точкой функции $f(x)$, если $f'(x)$ не определена в этой точке или $f'(x_0) = 0$.

Теорема 2.

1) Если x_0 - точка экстремума функции $f(x)$, то она является критической точкой этой функции;

2) Если x_0 - критическая точка функции $f(x)$, причем для $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а для $x > x_0$ $f'(x) > 0$ в некоторой окрестности $O(\varepsilon, x_0)$, то x_0 - точка минимума;

3) Если x_0 - критическая точка функции $f(x)$, причем для $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а для $x > x_0$ $f'(x) < 0$ в некоторой окрестности $O(\varepsilon, x_0)$, то x_0 - точка максимума.

Определение 3.

а) Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх на промежутке $[a;b]$, если для любого $x \in [a;b]$ касательная, проведенная к графику $y = f(x)$ в точке *x*, лежит над графиком функции $f(x)$;

б) Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на промежутке $[a;b]$, если для любого $x \in [a;b]$ касательная, проведенная к графику $y = f(x)$ в точке *x*, лежит под графиком функции $f(x)$.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в каждой точке $x \in [a;b]$. Тогда:

а) $f(x)$ выпукла вниз на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда $f''(x) > 0$ для любого $x \in [a;b]$;

б) $f(x)$ выпукла вверх на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда $f''(x) < 0$ для любого $x \in [a;b]$.

Определение 4. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции $f(x)$, если она определена в выколотой окрестности точки x_0, а левый или правый пределы $f(x)$ в этой точке равны ∞.

Определение 5. Прямая $y = kx + b$ называется правой (левой) наклонной асимптотой функции $f(x)$, если имеет место

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - kx - b \right) = 0.$$

Если прямая является одновременно и правой, и левой наклонной асимптотой, о ее называют просто наклонной асимптотой. Если $k = 0$, то наклонную асимптоту иногда называют горизонтальной асимптотой.

Схема исследования функции $y = f(x)$:

1. Область определения функции.
2. Вертикальные асимптоты.
3. Наклонные асимптоты.
4. Исследование по первой производной – промежутки убывания, возрастания, экстремумы (для удобства строится таблица первой производной).

5. Исследование по второй производной - промежутки выпуклости вверх и вниз (строится таблица второй производной).

6. Специальные свойства – четность, нечетность, периодичность (если какого-либо или нескольких свойств их перечисленных нет, то о них упоминать не следует).

7. Исследование завершается построением графика функции.

Пример: $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$

1. Область определения: $3-x^2 \neq 0$ или $x \neq \pm\sqrt{3}$

2. $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-0} \dfrac{x^3}{3-x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}+0} \dfrac{x^3}{3-x^2} = -\infty$,

$x_1 = -\sqrt{3}$ - вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}-0} \dfrac{x^3}{3-x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+0} \dfrac{x^3}{3-x^2} = -\infty$,

$x_1 = \sqrt{3}$ - вертикальная асимптота.

3. $k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{3-x^2} = -1$, $b_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k_1x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}+x\right) = 0$,

$x = -y$ - правая асимптота.

$k_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{3-x^2} = -1$, $b_2 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k_2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}+x\right) = 0$,

$x = -y$ - левая асимптота.

4. $y' = \left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right)' = \dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2}$.

Критические точки: $x_1 = -3$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \sqrt{3}$, $x_5 = 3$

Составляем таблицу первой производной:

x	$(\infty;-3)$	-3	$(-3;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;\infty)$
y'	–	0	+	нет	+	0	+	нет	+	0	-
y	убыв.	4,5	возр.	нет	возр.	0	возр.	нет	возр.	-4,5	возр.

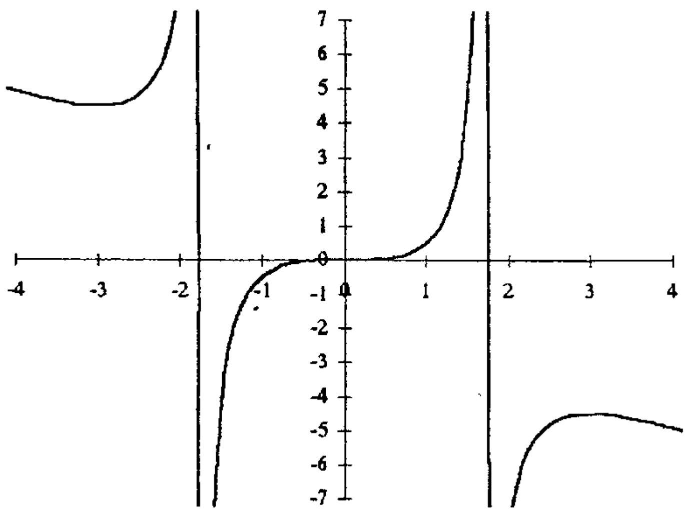
		min								max	

5. $y'' = \left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right) = \dfrac{-2x\left(x^2+27\right)}{\left(x^2-3\right)^3}$, $x=-\sqrt{3};0;\sqrt{3}$ - точки изменения знака второй производной.

Составляем таблицу второй производной:

x	$\left(\infty;-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3};0\right)$	0	$\left(0;\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};\infty\right)$
y''	+	нет	-	0	+	нет	-
y	$\cup$	нет	$\cap$	0	$\cup$	нет	$\cap$

6. Функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$.
7. Строим график:



Методические указания к решению задач по интегралам

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если $F(x)' = f(x)$.

Определение 2. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ и C – символ константы, тогда выражение $F(x)+C$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, то есть $\int f(x)dx = F(x)+C$. В выражении $\int f(x)dx$ функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

На основании таблицы производных составим таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int k dx = kx + C$
2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
5. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$
8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
11. $\int \cos x dx = \sin x + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
13. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

свойства

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$
4. $\int df(x) = f(x) + C$
5. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx + C$
6. $\int \left(f(x) + g(x)dx\right) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
7. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$

Основные приемы вычисления неопределенных интегралов

1. Метод интегрирования по частям.

Этот метод основан на формуле $\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)dx$

Пример 1.

$$\int x\cdot e^x dx = \left|\begin{matrix} f(x) = x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 1 & g(x) = e^x \end{matrix}\right| = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C$$

Пример 2.

$$\int \ln x dx = \left|\begin{matrix} f(x) = \ln x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} & g(x) = x \end{matrix}\right| = x\cdot\ln x - \int dx = x\cdot \ln x - x + C$$

2. Метод подстановки.

Теорема 1. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)dx = F(\phi(x))+C$/

Сама теорема формулируется и доказывается довольно просто, но применение ее, в чем и заключается метод подстановки, довольно затруднительно, так как нелегко сразу определить, что взять за функцию $\phi(x)$, а что – за $f(x)$. Рассмотрим это на примерах.

Пример 1.

$$\int \sin^2 x\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx\end{matrix}\right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{\sin^3 x}{3}+C$$

Пример 2.

$$\int \frac{\sqrt{x dx}}{x+1}dx = \left|\begin{matrix} t^2=\sin x \\ dx=2\,\mathrm{t}\,dtx\end{matrix}\right| = \int \frac{t\cdot 2tdt}{t^2+1} = 2\int\frac{t^2dt}{t^2+1} = 2\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2\int dt - 2\int\frac{dt}{t^2+1}+C =$$

$$= 2t - 2\operatorname{arctg}(t)+C = 2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение 1. Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены, называется дробно-рациональной функцией. Мы будем рассматривать, как правило, правильные дроби, то есть дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена в числителе меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Начнем с дробей, в которых в знаменателе стоит квадратный трехчлен. Обычно дробно-рациональные функции интегрируются с помощью разложения на простейшие дроби. Проиллюстрируем этот метод несложными примерами.

Пример 1. $\int \frac{x^2+x-2}{x(x+1)(x-2)}dx$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+x-2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

Найдем неизвестные коэффициенты *A, B, C* исходя из того, что после приведения правой части к общему знаменателю коэффициенты при одинаковых степенях левой и правой частей равенства должны совпадать:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2(A+B+C)+x(-A-2B+C)+(-2A+C)}{x(x+1)(x-2)}$$

Получаем равенство: $x^2+x-2 = x^2(A+B+C)+x(-A-2B+C)+(-2A+C)$, из которого получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-2B+C=1 \\ -2A+C=-2 \end{cases}$$

Решая эту линейную систему, получаем $A=\frac{9}{7},\quad B=-\frac{6}{7},\quad C=\frac{4}{7}$. Поэтому

$$\int\frac{x^2+x-2}{x(x+1)(x-2)}dx=\frac{9}{7}\int\frac{dx}{x}-\frac{6}{7}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{9}{7}\ln|x|-\frac{6}{7}\ln|x+1|+\frac{4}{7}\ln|x-2|+C$$

Пример 2. $\int\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$

Здесь подынтегральная функция следующим образом раскладывается на простейшие дроби:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ A-C=1 \end{cases}$$

Решая ее, получаем $A=1\quad B=-1\quad C=0$, значит

$$\int\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$$

Определенный интеграл

Один из источников появления определенных интегралов – задача вычисления площадей фигур, ограниченных кривыми.

Определение 1. пусть дана функция $y=f(x)$. Фигура, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, вертикальными прямыми $x=a,\quad y=b$ и осью OX, называется криволинейной трапецией.

Отрезок $[a,b]$ разобьем на n частей точками $x_0=a,x_1,x_2,...,x_n=b$. Проведя через эти точки вертикальные прямые, разобьем исходную фигуру на n более "узких" криволинейных трапеций. Заменим каждую "узкую" криволинейную трапецию с основанием $[x_{k-1},x_k]$ на прямоугольник с высотой $f(x_k)$

Определение 2. Выражение $\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\Delta x_k$, где $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, называется интегральной суммой функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

Геометрический смысл: каждое слагаемое этой суммы есть площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(x_k)$.

Определение 3. $\lim\limits_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\Delta x_k$ называется определенным интегралом функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta x_k$ существует и конечен.

С геометрической точки зрения число $\int_a^b f(x)dx$ естественно считать площадью соответствующей криволинейной трапеции при $f(x)\geq 0$.
Сформулируем ряд свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b dx = b-a$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
5. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Вычисление определенного интеграла

Теорема 1. Функция $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$, если $f(x)$ непрерывна.

Теорема 2. (Формула Ньютона--Лейбница). Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Значение этой формулы трудно переоценить хотя бы по той причине, что вычисление определенных интегралов сводится к уже разработанной технике вычисления неопределенных интегралов.

Пример 1. $\int_0^1 \left(x^2+x-1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2-1$, $y=-x^2-2x+3$.
Найдем точки пересечения этих двух линий:

$$\begin{cases} y = x^2-1 \\ y=-x^2-2x+3 \end{cases}$$

$x_1 = 1$, $x_2 = -2$

$$S = \int_{-2}^{1}\left(\left(-x^2-2x+3\right)-\left(x^2-1\right)dx\right) = \int_{-2}^{1}\left(-2x^2-2x+4\right)dx = \left(-\frac{2x^3}{3}-x^2+4x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{31}{3}.$$

Теорема 3. (Подстановка в определенном интеграле). Пусть $f(x)$

непрерывна на $[a,b]$, $\phi(x)$ имеет непрерывную производную на промежутке $[a,b]$, причем $\phi(a)=a$, $\phi(b)=b$ и для любого $t\in[\alpha,\beta]$, $\phi(t)\in[a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\phi(t)\right)\cdot\phi'(t)dt=F\left(\phi(a)\right)-F\left(\phi(b)\right)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Пример.

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c} x=\sin t\\ x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\\ dx=\cos t\,dt\end{array}\right|=\int_0^{\frac{x}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$