МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

«СОГЛАСОВАНО»
Руководитель ОП Химия

_____________ А.А. Капустина
(подпись) (Ф.И.О. рук. ОП)
«26» июня 2015г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Заведующая кафедрой
общей, неорганической и
элементоорганической химии
_____________ А.А. Капустина
(подпись) (Ф.И.О. зав. каф.)
«26 » июня 2015 г.

Математика
Направление подготовки 04.03.01 «Химия»
«Фундаментальная химия»
Форма подготовки очная

курс **1-2** семестр **1-3**
лекции **126** час. **(1сем-54ч, 2сем-36ч, 3сем-36ч)**
практические занятия **126** час. **(1сем-54ч, 2сем-36ч, 3сем-36ч)**
лабораторные работы **-** час.
в том числе с использованием МАО лек. **8** / пр. **10** / лаб. _____час.
в том числе в электронной форме лек. _____/ пр. _____/ лаб. _____час.
всего часов аудиторной нагрузки **252** час.
в том числе с использованием МАО **18** час.
самостоятельная работа **252** час.**(1сем-144ч, 2сем-36ч, 3сем-72ч)**
в том числе на подготовку к экзамену **135** час.**(1сем-54ч, 2сем-27ч,3сем54ч)**
курсовая работа / курсовой проект **-** семестр
зачет **3** семестр
экзамен **1,2,3** семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 12 марта 2015 г № 210

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры ______________________________
протокол № 10 от « 3 » июня 2015 г.

Заведующий (ая)кафедрой Шепелева Р.П.
Составитель (ли): Батурин Г.И.

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:
Протокол от« 3 » сентября 2015 г. № 1

Заведующий (ая) кафедрой________________ Шепелева Р.П.
(подпись) (И.О. Фамилия)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:
Протокол от«_____»________________201 г. № _____

Заведующий (ая) кафедрой________________ ______________________
(подпись) (И.О. Фамилия)

Аннотация к рабочей программе дисциплины «Математика»

Дисциплина «Математика» относится к разделу Б.1. – базовая часть учебного плана ОП направления **04.03.01 «Химия»,** профиль «Фундаментальная химия».

Трудоемкость дисциплины составляет 14 зачетных дисциплин, аудиторная нагрузка составляет 252 часов, самостоятельная работа 252 часов, Дисциплина реализуется в 1-3 семестрах, в каждом семестре завершается экзаменом.

Цель преподавания дисциплины – воспитание высокой математической культуры, привитие навыков современных видов мышления, привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования. Изучение курса способствует расширению научного кругозора и повышению общей культуры будущего специалиста, развитию его мышления и становлению его мировоззрения.

Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки квалифицированного бакалавра в области химии.

Задачи преподавания дисциплины

- овладение аппаратом высшей математики: линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа....
- продемонстрировать на примерах понятий и методов сущность научного подхода; научить понимать и пользоваться основными методами математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики
- приобретение базы, необходимой для изучения прикладных, информационных, специальных (химических) дисциплин...
- формирование устойчивых навыков по компетентностному применению фундаментальных положений математики при изучении дисциплин профессионального цикла и научном анализе ситуаций, с которыми выпускнику приходится сталкиваться в профессиональной и общекультурной деятельности;

Для успешного усвоения дисциплины «Математика» необходимы следующие предварительные компетенции: применять устойчивые теоретические знания практические навыки по всем разделам обязательного минимума содержания среднего (полного) образования по математике.

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие общепрофессиональные компетенции: Способность использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности**(ОПК-3)**

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ОПК-3 Способность использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности **(ОПК-3)**	Знает	основные понятия и инструменты алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики; основные законы естественнонаучных (математических) дисциплин и их роль в профессиональной деятельности.
	Умеет	применять полученные знания для решения математических задач, использовать математический язык и символику при построении моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные; применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.
	Владеет	Математическими и количественными методами решения химических, научных и производственных задач в профессиональной деятельности.

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Математика» применяются следующие методы активного обучения:

Проблемная лекция - опирается на логику последовательно моделируемых проблемных ситуаций путем постановки проблемных **вопросов** или предъявления проблемных задач

Уровень сложности, характер проблем зависят от подготовленности обучающихся, изучаемой темы и других обстоятельств.

Лекция-консультация. Эта форма занятий предпочтительна при изучении тем с четко выраженной практической направленностью. Варианты проведения подобных лекций:

Вариант 1. Занятия начинаются со вступительной лекции, где преподаватель акцентирует внимание обучающихся на ряде проблем, связанных с практикой применения рассматриваемого положения. Затем слушатели задают вопросы.

Основная часть занятия (до 50% учебного времени) уделяется ответам на вопросы. В конце занятия проводится небольшая дискуссия, свободный обмен мнениями, завершающийся заключительным словом лектора.

Вариант 2. За несколько дней до объявленного занятия преподаватель собирает вопросы слушателей в письменном виде.

Первая часть занятия проводится в виде лекции, в которой преподаватель отвечает на эти вопросы, дополняя и развивая их по своему усмотрению.

Вторая часть проходит в форме ответов на дополнительные вопросы слушателей, свободного обмена мнениями, и завершается заключительным словом преподавателя.

Вариант 3. Слушатели заблаговременно получают материал к занятию. Как правило, он носит не только учебный, но и инструктивный характер, т.е.: представляет собой методическое руководство к практическому использованию.

Слушатели должны изучить материал и подготовить свои вопросы лектору-консультанту. Занятие проводится в форме ответов на вопросы и свободного обмена мнениями

Лекция-беседа. Она предполагает максимальное включение обучающихся в интенсивную беседу с лектором . Преимущество этой формы перед обычной лекцией состоит в том, что она привлекает внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определяет содержание, методы и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории.

Различают несколько ее разновидностей:

лекция-диалог

лекция-дискуссия,

лекция-диспут,

Лекция с запланированными ошибками (лекция-провокация). Этот способ чтения лекции способствует активизации познавательной деятельности обучающихся на занятиях, позволяет повысить контролирующую функцию лекционных занятий. Слушатели по ходу проведения лекции должны будут выявить все запланированные ошибки и отметить их в конспекте. За 15—20 мин до окончания лекции осуществляется изложение выявленных слушателями ошибок с подробным их анализом и обоснованием верного ответа. В заключительной части занятия или на лекции, завершающей тему, целесообразно наиболее широко использовать контрольные вопросы, логические и практические задания. Делается это в целях контроля, определения уровня усвоения, понимания наиболее важных, стержневых положений, имеющих методологическое значение для дальнейшей углубленной самостоятельной работы

I.СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА (126 часов)

Линейная алгебра

Раздел 1 Определители 2-го и 3-го порядка. (6 часов)

Тема 1. Определители второго и третьего порядков, действия над определителями, их основные свойства. Миноры и их алгебраические дополнения, разложение определителя по строке.(3 час.)

Тема 2. Определитель n-го порядка. Методы вычисления определителей. (3 час.)

Раздел 2 . Системы линейных уравнений. (6 часов)

Тема 1. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Структура общего решения однородной системы линейных уравнений. (3 час.)

Тема 2 Правило Крамера. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений. (3 час.)

Раздел 3 Матрицы. (8 часов)

Тема 1. Матрицы. Операции над матрицами, их свойства. Обратная матрица, ее вычисление. Матричная запись системы линейных уравнений. (4 час.)

Тема 2. Решение матричных уравнений и линейных систем с помощью обратной матрицы. Лекции проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа» (4 час.)**

Векторная алгебра.

Раздел 4. Вектор (6 часов)

Тема 1. Действия над векторами Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Декартовы координаты векторов и точек. (3 час.)

Тема 2. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное произведение, смешанное произведение и их приложения к решению задач. (3 час.)

Раздел 5. Прямая на плоскости и в пространстве. Плоскость. (8 часов)

Тема 1. Прямая на плоскости. Способы задания прямой. Взаимное расположение прямых, угловые соотношения. Лекции проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-консультация» (4 час.)**

Тема 2. Прямая в пространстве. Способы задания прямой. Взаимное расположение прямых, угловые соотношения между прямыми, между прямой и плоскостью.(4 час.)

Кривые второго порядка

Раздел 6. Окружность, эллипс (2 часа)

Тема 1. Определение, вывод канонического уравнения(1 час.)
Тема 2. Фокальный радиус и эксцентриситет. (1 час.)

Раздел 7. Гипербола, парабола (2 часа)

Тема 1 . Определение, вывод канонического уравнения. (1 час.)
Тема 2 .Фокальный радиус, эксцентриситет директрисы. (1 час.)

Функция

Раздел 8. Основные понятия о множествах, логическая символика. Теория последовательностей. Понятие числовой последовательности.(**8 часов**)

Тема 1. Предел переменной, арифметические свойства предела Предельный переход в неравенствах. Предел монотонной ограниченной последовательности. (4 час.)

Тема 2. Предел функции. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. (4 час.)

Производная

Раздел 9 . Производная функции.(6 часов)

Тема 1. Геометрический и механический смысл производной. Основные правила дифференцирования. (3 час.)

Тема 2 .Производные некоторых функций. Производная сложной и обратной функций. **Лекции проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-провокация» (3 час.)**

Раздел 10. Производная функции заданной параметрически. Производные различных порядков. (2 часа)

Тема 1. Механическое значение второй производной. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Линеаризация функции. (1 час.)

Тема 2. Логарифмическое дифференцирование. Исследования функций с помощью первой производной. (1 час.)

РАЗДЕЛ 11. Основные теоремы дифференциального исчисления (2 часа)

Тема 1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение некоторых функций по формуле Тейлора. (1 час.)

Тема 2. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. (1 час.)

Интеграл.

Раздел 12. Первообразная функции. Неопределенный интеграл (10часов)

Тема 1 Свойства неопределенного интеграла .Основные методы интегрирования (5 час.)

Тема 2 Некоторые сведения об алгебраических многочленах. Интегрирование тригонометрических функций. (5 час.)

РАЗДЕЛ 13. Определенный интеграл. (3 часа)

Тема 1 Определенный интеграл. (1 час.)
Тема 2 Приложения определенного интеграла. (2 час.)

Функции многих переменных.

Раздел 14. Функции многих переменных. (3 часа)

Тема1 Дифференцирование сложной функции, функции заданной параметрически. Дифференциал, связь дифференциала и приращения. (2 час.)
Тема 2 Приложения. Метод наименьших квадратов. (1 час.)

Дифференциальные уравнения

Раздел 15. Дифференциальные уравнения первого порядка (4 часа)

Тема 1 Задачи приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши (2 час.)
Тема 2 Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородных, и т д) (2 час.)

Раздел 16. Уравнения высших порядков (2часа)

Тема 1 Уравнения допускающие понижение порядков**.** (1 час.)
Тема 2 Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Системы дифференциальных уравнений. Лекции проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа**(1 час.)

Теория рядов

Раздел 16 Ряды. Свойства (6 часов)

Тема1. Числовые ряды их сходимость и расходимость. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости. Знакочередующиеся ряды.(2 час.)
Тема2. Функциональные ряды. Непрерывность суммы ряда. Интегрирование и дифференцирование рядов. (2 час.)
Тема 3. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Формула Тейлора. Приближенные вычисления с помощью рядов(2 час.)

Раздел 17. Ряды Фурье (6 часов)

Тема 1 Нахождение коэффициентов ряда Фурье. Примеры разложения в ряд Фурье. (3 час.)
Тема 2 Ряды Фурье от четных и не четных функций. Замечание о разложении в ряд Фурье. Ряды Фурье в комплексной форме. Применение рядов. Биноминальный ряд. (3 час.)

Раздел 18. Применение рядов к решению дифференциальных уравнений. (4 часа)

Тема 1.Применение рядов к решению дифференциальных уравнений. (4 час.)

Двойные интегралы

Раздел 19 .Двойной интеграл и его свойства (4 часа)

Тема 1.Геометрический смысл. Вычисление двойного интеграла путем сведения к повторному. Области интегрирования. Замена переменной в

двойном интеграле. (2 час.)
Тема 2.Приложения двойного интеграла.(Обьем, площадь и т д) (2 час.)

Тройные интегралы

Раздел 20 Тройной интеграл (6 часов)

Тема 1. Тройной интеграл. Вычисление. Якобиан и его геометрический смысл. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам. Криволинейная система координат в трехмерном пространстве. (4 час.)
Тема 2.Применение тройного интеграла. (2 час.)

Криволинейные интегралы

Раздел 21. Криволинейные интегралы. (6 часов)

Тема 1. Криволинейные интегралы 1 рода. Свойства. Криволинейные интегралы 2 рода. Независимость криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования. (4 час.)
Тема 2. Приложения (2 час.)

Поверхностные интегралы

Раздел 22. Поверхностные интегралы (6 часов)

Тема 1 Ориентация поверхности. Поверхностный интеграл первого рода, его свойства, геометрический и физический смысл.Вычисление. (2 час.)
Тема 2.Поверхностный интеграл 2 рода. Поверхностный интеграл второго рода, его свойства, геометрический и физический смысл. Вычисление(2 час.)
Тема 3. Связь поверхностных интегралов. **Лекции проводится с использованием элементов метода активного обучения «лекция-консультация»** (2 час.)

Теория вероятности

Раздел 23. Теория вероятности (2 часа)

Тема 1. Предмет теории вероятности. Операции над событиями. Виды случайных событий. Основные формулы комбинаторики.
Случайные события. Алгебра событий. Полная группа событий. (1 час)
Тема 3. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность. (1 час.)

Раздел 24. Дискретная случайность (6 часов)

Тема 1 Математическое ожидание дискретной случайной величины. Свойства. Дисперсия дискретной случайной величины (6 час.).

Раздел 25 (6 часов)

Тема 1. Функция распределения. Плотность распределения непрерывной случайной величины. Равномерное распределение вероятностей. Свойства плотности распределеня. Лекции проводится **с использованием элементов метода активного обучения «лекция-беседа» (2 час.)**

Тем 2. Равномерный закон распределения. Нормальный закон распределения вероятностей. Функция Лапласа. (2 час.)
Тема 3. Правило трех сигм. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины. (2 час.)

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Практические занятия (126 часов)

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины«Математика» применяется метод активного обучения **«групповая консультация».** Групповые консультации представляют собой своеобразную форму проведения практических занятий, основным содержанием которых является разъяснение отдельных, часто наиболее сложных или практически значимых вопросов изучаемой программы. После всех практических занятий студенты получают задачи для самостоятельной внеаудиторной работы. С каждым практическим занятием повышается сложность предлагаемых задач. Групповая консультация проводятся с целью оказания помощи в самостоятельной работе, в подготовке к рубежной контрольной работе. Студенты сами предлагает для решения те задачи, которые вызвали какие-то затруднения или непонимание. К доске выходят студенты, готовые разъяснить возникшие вопросы. Преподаватель только контролирует ход решения задач, комментирует в случае необходимости какие-то ситуации и обобщает рассмотренный материал. Преимущество практики-консультации перед другими формами проведения практического занятия в том, что она позволяет в большей степени приблизить содержание занятия к практическим интересам обучаемых, в какой-то степени индивидуализировать процесс обучения с учетом уровня понимания и восприятия материала каждым обучаемым.

РАЗДЕЛ 1-2

Занятия 1-2 (6 часов) Применяется метод активного обучения «групповая консультация» (4 часа).

Определители 2-го и 3-го порядка. Действия над определителями. Системы линейных неоднородных уравнений. Матрицы. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Структура общего решения однородной системы линейных уравнений

РАЗДЕЛ -3-4

Занятия 3-5 (6 часов) Применяется метод активного обучения «групповая консультация» (6 часов).

Векторная алгебра. Действия над векторами. Прямая на плоскости .Прямая в пространстве. Способы задания прямой . Взаимное расположение прямых, угловые соотношения между прямыми ,между прямой и плоскостью.

РАЗДЕЛ 5-6

Занятия 6-7(6 часов)

Кривые второго порядка. Определение, вывод канонического уравнения. Фокальный радиус, эксцентриситет директрисы.

РАЗДЕЛ 7

Занятия 8-9(6 часов)

Предел функции. Предел переменной. Способы вычисления пределов. Замечательные пределы. Производные некоторых функций. Производная сложной и обратной функций.

Занятия 10 (6 часов)

Производная функции. Механическое значение второй производной. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Логарифмическое дифференцирование.

Исследования функций с помощью первой и второй производной

Применяется метод активного обучения «групповая консультация»

РАЗДЕЛ 8

Занятия 11-12(6 часов)

Первообразная функции. Неопределенный интеграл. Свойства, методы интегрирования

РАЗДЕЛ 9

Занятия 13 (6 часов)

Определенный интеграл. Свойства, методы интегрирования

Занятия 14-15 (6 часов)

Приложения определенного интеграла.

РАЗДЕЛ 10

Занятия 16-18 (6 часов)

Функции многих переменных. Дифференцирование сложной функции, функц заданной параметрически. Дифференциал, связь дифференциала и приращения

Дифференциальные уравнения. Методы решения. Дифференциальные уравнения высших порядков. **Применяется метод активного обучения «групповая консультация»**

РАЗДЕЛ 11

Занятие 19-20 (4 часа)

Числовые ряды их сходимость и расходимость. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости

Занятие 21 (4 часа).

Знакочередующиеся ряды.

Занятие 22 (4 часа)

Функциональные ряды. Непрерывность суммы ряда

Занятие 23 (4 часа)

Интегрирование и дифференцирование рядов

Занятие 24 (6 часа)

Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Приближенные вычисления с помощью рядов**Применяется метод активного обучения «групповая консультация»**

Занятие 25 (8 часов)

Примеры на разложения в ряд Фурье. Ряды Фурье в комплексной форме Применение рядов к решению дифференциальных уравнений.

РАЗДЕЛ 12

Занятие 26 (2 часа)

Двойной интеграл и его свойства Вычисление двойного интеграла . Замена переменной в двойном интеграле. Занятие 2. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области)

Занятие 27-28. (2 часа)

Якобиан, его геометрический смысл. Двойной интеграл в полярных координатах

Занятие 29-30. (2 часа)

Приложения двойного интеграла

РАЗДЕЛ 13

Занятие 31 (2 часа)

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Занятие 32 (2 часа)

Тройной интеграл в сферических координатах.

РАЗДЕЛ 14

Занятие 33 (2 часа)

Криволинейные интегралы 1 и 2 рода**.**

Занятие 34-35 (2 часа)

Независимость криволинейного интеграла 2-го рода от контура интегрирования

Занятие 36-37 (2 часа)

Формула Грина**.** Приложения. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

РАЗДЕЛ 15

Занятие 38-39(2 часа)

Ориентация поверхности Площадь поверхности. Поверхностный интеграл первого рода, его свойства **Применяется метод активного обучения «групповая консультация» (2 час.)**

Занятие 40-41 (2 часа)

геометрический и физический смысл. Вычисление поверхностного интеграла первого рода

РАЗДЕЛ 16

Занятие 42 (2 часа)

Случайные события. Виды и примеры событий вероятности Вероятность произведения и вероятность суммы событий.

Занятие 43 (2 часа)

Формула полной вероятности и формула Байеса

Занятие 44 (2 часа)

Случайные величины и распределения вероятностей .Формула Бернулли.

Занятие 45-47 (2 часа)

Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Биноминальное распределение и распределение Пуассона.

Занятие 48-50 (4 часа)

Математическое ожидание дискретной случайной величины. Свойства математического ожидания. Дисперсия дискретной случайной величины..

Занятие51-52 (2 часа)

Среднее квадратическое отклонение. Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины их взаимосвязь и свойства.

Занятие 53-54 (2 часа)

Равномерный закон распределения**.** Нормальный закон распределения вероятностей. Функция Лапласа. Правило трех сигм

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Математика» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

Проверка знаний студентов осуществляется путем проведения контрольных работ, сдачи индивидуальных заданий, семестровыми зачетами и экзаменами. Темы контрольных работ и индивидуальных заданий отражены в программах семестровых экзаменов

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства - наименование	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Определители 2-го и 3-го порядка. Действия над определителями. Системы линейных неоднородных уравнений. Матрицы.	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы №5,8,10,11.
			умеет	Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях(ПР-2)	Экзам вопросы №16,17,21,26,27,31
			владеет	Выполнение к/р на 4 неделе (ПР-2)	Экзам вопросы№20,21,37,41,45,47
2	Векторная алгебра. Действия над векторами. Прямая на плоскости	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№1,3,6,7,9,14.
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№28,29,32,33,34,35,46,51,52
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача индивидуальных домашних заданий на 5 неделе. Срок сдачи 6 неделя) (ПР-2).	Экзам вопросы№15,18,19,23,25.
3	Кривые второго порядка	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№2,4,12,22.
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№24,30,36,
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача индивидуальных домашних заданий на 7 неделе). Срок сдачи8 неделя. (ПР-2).	Экзам вопросы№42,43,50.

4	Предел функции. Предел переменной	ОПК-3	знает	Собеседование (УО-1)	Экзам вопросы№54,55,56,57
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№58,59,60,61,62.
			владеет	Выполнение к/р на 10 неделе. (ПР-2).	Экзам вопросы№63,66,67.
5	Производная функции	ОПК-3	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№64,65
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзвопросы №66.
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача индивидуальных домашних заданий на 12 неделе). Срок сдачи 13 неделя (ПР-2).	Экзам вопросы№68,69,70.
6	Первообразная функции. Неопределенный интеграл	ОПК-3	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№71,72
			умеет	Собеседование (УО-1)	Экзам вопросы№74,75
			владеет		Экзам вопросы№75.
7	Неопределенный интеграл. Свойства, методы интегрирования	ОПК-3	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№73,75
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№76.
			владеет	Выполнение к/р на 20 неделе. (ПР-2).	Экзам вопросы№76,77
8	Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Функции многих переменных	ОПК-3	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№79-84.
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор	Экзам вопросы№85-

				домашних заданий) (УО-1)	90.
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача индивидуальных домашних заданий на 22 неделе). Срок сдачи 23 неделя. (ПР-2). Тестовый контроль(ПР-1).	Экзам вопросы№91-96.
9	Функции многих переменных. Дифференциальные уравнения. Методы решения	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№97-105
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№106-109
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача индивидуальных домашних заданий на 28 неделе). Срок сдачи 29 неделя (ПР-2).	Экзам вопросы№110.
10	Ряды. Свойства. Применение	**ОПК-3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№111
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№111-112
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№112-113, 114
11	Двойные интегралы	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№115-119.
			умеет	Собеседование (УО-1).	Экзам/Зач вопросы№120
			владеет	Контрольная	Экзам /Зач

				работа по теме «Двойные интегралы (ПР-2).	вопросы№121
12	Тройные интегралы	ОПК-3	знает	Собеседование (УО-1).	Экзам/Зач вопросы№122
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам /Зач вопросы№123
			владеет	Контрольная работа по теме «Тройные интегралы» (ПР-2).	Экзам/Зач вопросы№124
13	Поверхностные интегралы	ОПК-3	знает		Экзам/Зач вопросы№124
			умеет	Собеседование (УО-1).	Экзам/Зач вопросы№124
			владеет	Контрольная работа по теме «Поверхностные интегралы (ПР-2).	Экзам/Зач вопросы№122-124
14	Теория вероятности	ОПК-3	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам/Зач вопросы№125-128.
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам/Зач вопросы№128-131.
			владеет	Итоговая контрольная работа по теме «Теория вероятности» (ПР-2).Тестовый контроль(ПР-1).	Экзам/Зач вопросы№132-134.

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература (электронные и печатные издания)

1. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. Москва : Айрис-пресс, 2011.- 603 с.
http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:661980&theme=FEFU

2.М.М. Постников. Линейная алгебра. – Санкт-Петербург, «Лань», 2009, - 400 с. http://e.lanbook.com/view/book/319/
3.Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч 1.: учебное пособие. –Минск «Вышейшая школа», 2013. – 304 с. Ссылка: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65409
4.Калинин В.В., Петрова И.В., Харин В.Т. Неопределенные и определенные интегралы. М.: МГУНГ им.И.М.Губкина, 2005 (pdf), 153с. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/KalininPetrovaXarin2005ru.pdf
5.Любарский М.Г. Векторная алгебра и ее приложение. Web, 2010 (pdf), 166 с. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lyubarskij2010ru.pdf

Дополнительная литература
(печатные и электронные издания)

1.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления т.1,2.М.Наука. 1990. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:315151&theme=FEFU
2.Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов под ред. Б.П. Демидовича. М.: Астрель.- 2004.- 558 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:7674&theme=FEFU
3.Проскуряков И.В.. Сборник задач по линейной алгебре СПб: Физматлит.- 2001.-382 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:17681&theme=FEFU
4. Математика [Электронный ресурс] : учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М. : ГЭОТАР-Медиа, 2013. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785970426968.html
5. Математика [Электронный ресурс] / Шабунин М.И. - М. : БИНОМ, 2012. - http://www.studentlibrary.ru / book / ISBN9785996309252.html http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996309252.html
6. Математика. Сборник задач по углублённому курсу [Электронный ресурс] / Б.А. Будак [и др.]; под ред. М.В. Федотова. - М. : БИНОМ, .2015." http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996328857.html

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. http://e.lanbook.com/
2. http://www.studentlibrary.ru/
3. http://znanium.com/
4. http://www.nelbook.ru/

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного достижения учебных целей занятий должны выполняться следующие основные требования:

-соответствие действий обучающихся ранее изученным на лекционных и семинарских занятиях методикам и методам.

-максимальное приближение действий студентов к реальным, соответствующим будущим функциональным обязанностям.
-поэтапное формирование умений и навыков, т.е. движение от знаний к умениям и навыкам, от простого к сложному и т.д..
-использование при работе на тренажерах или действующей технике фактических документов, технологических карт, бланков и т.п.
-выработка индивидуальных и коллективных умений и навыков.
- распределение времени, отведенного на занятие, на решение каждой задачи;
-подбор иллюстративного материала (графиков, таблиц, схем), необходимого для решения задач, продумывание расположения рисунков и записей на доске.

Студент должен:
- научиться работать с книгой, документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой.
-формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства. Формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Необходимо поддерживать непрерывный контакт с аудиторией, отвечать на возникающие у студентов вопросы. На практических занятиях преподаватель разбирает примеры по пройденной теме. Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения. Если знаний полученных в аудитории оказалось недостаточно, студент может самостоятельно повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами, которые собраны в изучаемом курсе в системе Bb dvfu. После выполнения задания, студент отправляет его на проверку преподавателю в соответствующем «Назначении». Работа должна быть отослана в формате PDF одним документом. По данному курсу разработаны методические указания, которые выложены с системе Bb dvfu в соответствующем разделе.

По данному курсу разработаны следующие методические пособия:

Г. И. Батурин

МАТЕМАТИКА
для студентов нематематических специальностей
высших учебных заведений
(издание второе, переработанное и дополненное)

Учебное пособие

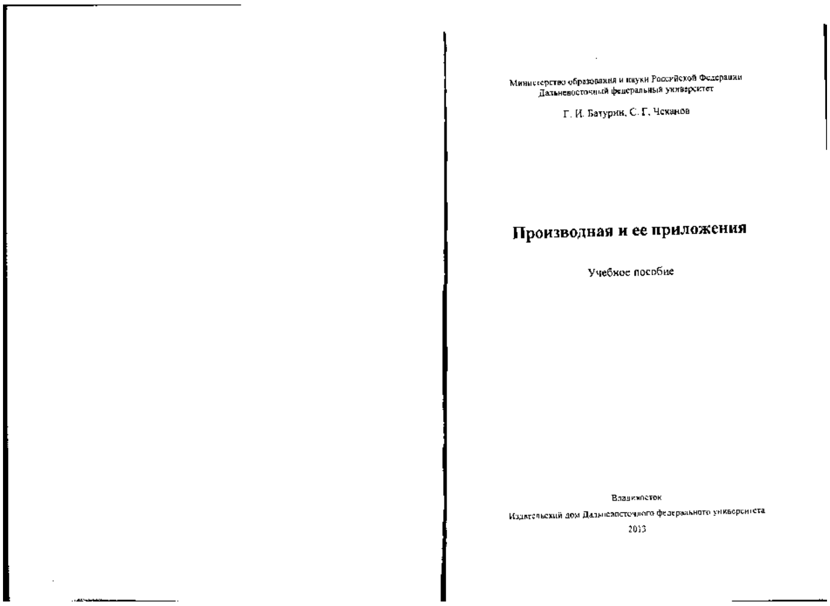
Рекомендовано Дальневосточным региональным
учебно-методическим центром (УМО)»

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
ББК 22.11
Б 28

Рецензенты: Г.К. Пак – заведующий кафедрой алгебры
и логики ДВГУ, к.ф.-м.н.;
А.А. Степанова – профессор кафедры алгебры
и логики ДВГУ, д.ф.-м.н.

Содержание пособия

Следующие учебные пособия есть в библиотеке ДВФУ и на кафедре



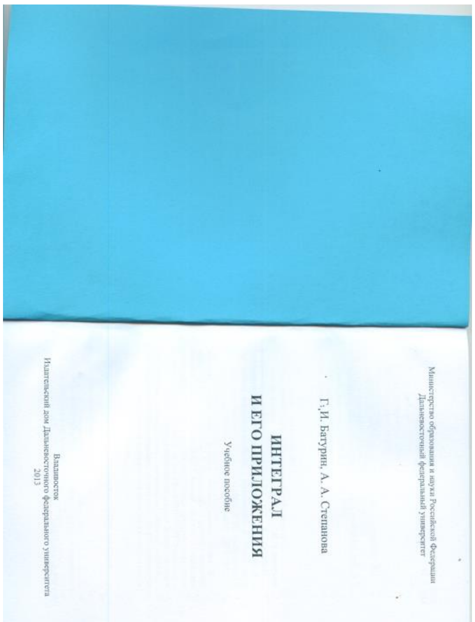
Министерство образования и науки Российской Федерации
Дальневосточный федеральный университет

Г. И. Батурин, С. Г. Чеканов

Производная и ее приложения

Учебное пособие

Владивосток
Издательский дом Дальневосточного федерального университета
2013



Министерство образования и науки Российской Федерации
Дальневосточный федеральный университет

Г.И. Батурин, А. А. Степанова

ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Владивосток
Издательский дом Дальневосточного федерального университета
2013

Элементы линейной алгебры. Учебное пособие

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебные аудитории кампуса ДВФУ. Мультимедийная лекционная аудитория (мультимедийный проектор, настенный экран, документ-камера)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

по дисциплине «Математика»
Направление подготовки 04.03.001 «химия»
Профиль «Фундаментальная химия»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1-4 недели	Контрольная работа	2	Зачет по заданию
2	5-6 недели	Индивидуальное задание	8	Зачет по заданию
3	7-8 недели	Индивидуальное задание	8	Зачет по заданию
4	9-10 недели	Контрольная работа	2	Зачет по заданию
5	11-14 недели	Индивидуальное задание	16	Зачет по заданию
6	15-17 недели	Индивидуальное задание	16	Зачет по заданию
7	19 неделя	Контрольная работа	9	Зачет по заданию
8	20-22 недели	Индивидуальное задание	9	Зачет по заданию
9	23-29 недели	Индивидуальное задание	18	Зачет по заданию
10	29-35 недели	Индивидуальное задание	18	Зачет по заданию
11	37-42 недели	Контрольная работа	3	Зачет по заданию
12	43-46 недели	Контрольная работа	3	Зачет по заданию
13	47-50 недели	Контрольная работа	3	Зачет по заданию
14	51-53 недели	Контрольная работа	2	Зачет по заданию
15	Подготовка к экзамену1 семестр		54	Экзамен
16	Подготовка к экзамену2 семестр		27	Экзамен
17	Подготовка к экзамену3 семестр		54	Экзамен

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий и контрольных работ по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены ниже). Критерии оценки: студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя.

Индивидуальное задание № 1 (системы)

Вариант № 1

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

Вариант № 2

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант № 3

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 14, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант № 4

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$$

Вариант № 5

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,

методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 6

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 8, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 7

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -11, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 8

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 18. \end{cases}$$

Вариант № 9

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант № 10

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант № 11

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Вариант № 12

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 13

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Вариант № 14

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,

методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = -11. \end{cases}$$

Вариант № 15

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 7, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Вариант № 16

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 15, \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант № 17

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -14, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 18

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -7, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Вариант № 19

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 16, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -13, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$$

Вариант № 20

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант № 21

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант № 22

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$$

Вариант № 23

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,

методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Вариант № 24

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 25

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -8. \end{cases}$$

Вариант № 26

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Вариант № 27

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Вариант № 28

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 29

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Вариант № 30

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Вариант № 31

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Вариант № 32

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\2x_1+5x_2-3x_3=4,\\5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}$$

Индивидуальное задание № 2 (прямая и плоскость)

Вариант № 1

1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки *A(2; 3; -1)* и *B (-1; 2; 4)*.

2. Общие уравнения прямой $\begin{cases}x+3y-4z+5=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую *x=3t+1* , *y=2t+3, z= –t–2* параллельно прямой $2x-y+z-3=0,\qquad x+2y-z-5=0$.

Вариант № 2

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A(2; -3; 2)* и *B(7; 1; 0)* и параллельной оси *Ox*.

2. Уравнения прямой $\begin{cases}x-4y+5z-1=0\\2x+3y+z+9=0\end{cases}$ преобразовать к каноническому виду и определить углы, образуемые этой прямой с координатными осями.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

Вариант № 3

1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси *Oy* и проходящей через точки *A(2; 1; -2)* и *B(-7; -2; 1)*.

2. Привести к каноническому виду Общие уравнения прямой $\begin{cases}x-2y+3z-4=0\\2x+3y-4z+5=0\end{cases}$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; 2; -3)$ параллельно прямым $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-7}{3},\qquad \dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Вариант № 4

1. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости *xOy* и проходящей через точку *A (1; 2; -4)*.

2. Преобразовать к каноническому виду общие уравнения прямой $\begin{cases}2x+3y+2z+8=0\\x-y-z-9=0\end{cases}$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой $x-2y+z-3=0,\quad x+y-z+2=0$.

Вариант № 5

1. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси *Ox* и проходящей через точку *A (3; 7; -1)*.

2. Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую $\begin{cases} 2x-4y+5z+7=0 \\ x+2y+3z+11=0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

3. Убедившись, что прямые $2x+2y-z-10=0$, $x-y-z-22=0$, $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние *d* между ними.

Вариант № 6

1. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости *xOz* и проходящей через точку *A(2; -3; 4)*.

3. Найти точку Q, симметричную точке *P(4; 1; 6)* относительно прямой $x-y-4z+12=0$, $2x+y-2z+3=0$.

Вариант № 7

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *Ox* и точку *A (2; 1; 3)*.

2. Определить следы прямой $\begin{cases} 5x+3y-4z+8=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$

на координатных плоскостях (следом прямой на плоскости называется точка пересечения прямой с плоскостью).

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$.

Вариант № 8

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось *Oz* и точку *A (-2; 4; -4)*.

2. Найти координаты следов прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{4}$ на координатных плоскостях (следом прямой на плоскости называется точка пересечения прямой с плоскостью).

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$.

Вариант № 9

1.. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *A(2; -5; 4)* и через ось *Oy*.

2. Найти острый угол между прямыми $\begin{cases} 2x+3y-4z+5=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{cases}$

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$.

Вариант № 10

1. Какие отрезки на координатных осях отсекает плоскость $2x + 3y - 5z + 30 = 0$?

2. Через точку *A(1; -1; 2)* провести прямую, параллельную прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$.

3. Доказать, что прямая *x=3t-2, y=–4t+1, z=4t–5* параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

.

Вариант № 11

1. Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $x - 10y + 2z - 12 = 0$ на координатных осях.

2. Через точку *(2; -1; 3)* провести прямую, параллельную оси *Ox*.

3. При каком значении *C* прямая $3x - 2y + z + 3 = 0$, $4x - 3y + z + 1 = 0$, параллельна плоскости $2x - y + Cz - 2 = 0$?

Вариант № 12

1. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$5x + 3y - 4z + 15 = 0$; $15x + 9y - 12z - 5 = 0$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точки *A(1; 2; -1) и B(0; 3; -4).*

3. Найти точку *Q*, симметричную точке *P(2; -5; 7)* относительно прямой, проходящей через точки M_1*(5; 4; 6)* и M_2*(-2; -17; -8).*

Вариант № 13

1.Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x - 3y + 6z - 14 = 0$; $2x - 3y + 6z + 28 = 0$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точки *A (3; 0; 4)* и *B (-1; -2; 3).*

3. Вычислить расстояние *d* точки *P(1; -1; -2)* от прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Вариант № 14

1. Через точку *M(2; 3; -1)* провести плоскость, параллельную плоскости $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

2. Найти острый угол между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ и плоскостью $2x + y - z + 4 = 0$.

3. Вычислить расстояние *d* от точки *P(2; 3; -1)* до прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$.

Вариант № 15

1. Через точку M *(-4; -1; 2)* провести плоскость, параллельную плоскости $3x + 4y - z - 8 = 0$.

2. Найти острый угол между прямой $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 4z + 5 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $x + y + 3z - 1 = 0$.

3. Вычислить расстояние d от точки *P(2; 3; -1)* до прямой $x = t + 1$, $y = t + 2$, $z = 4t + 13$.

Вариант № 16

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *(2; 5; -1)* и параллельной плоскости $x + 3y - 4z + 5 = 0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *P(1; 2; -1)* перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

3. Вычислить расстояние d от точки *P(2; 3; -1)* до прямых $2x - 2y + z + 3 = 0$, $3x - 2y + 2z + 17 = 0$.

Вариант № 17

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *(1; -3; 2)* и параллельно плоскости $7x - 4y + z - 4 = 0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *P (2, —4, —2)* перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x - 4y + 5z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}.$$

3. Вычислить проекцию точки *P(5; 2; -1)* на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Вариант № 18

1. Через точки *M(1; 2; 3)* и *N (-2; -1; 3)* провести плоскость, перпендикулярную плоскости *x + 4y - 22 + 5 = 0.*

2. Через точку *(2, 1, 6)* провести прямую, перпендикулярную плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$, и определить направляющие косинусы этой прямой.

3. При каких значениях *A* и *B* плоскость $Ax + By + 3z - 5 = 0$ перпендикулярна к прямой $x = 3 + 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = -2 - 2t$?

Вариант № 19

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *M(-1; 2; -3)* и *N(1; 4; -5)* и перпендикулярной плоскости $3x + 5y - 6z + 1 = 0$.

2. Найти уравнение перпендикуляра к плоскости $3x - y - 5z - 8 = 0$, проходящего через точку *(1, -1, 2)*.

3. Найти точку *Q*, симметричную точке *P(1; 3; -4)* относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

Вариант № 20

1. Выяснить геометрический смысл коэффициентов *A, B* и *C* в общем уравнении плоскости *Ax + By + Cz + D = 0.*

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$ с плоскостью $x+y-2z-4=0$.

3. найти проекцию точки $P(2;-1;3)$ на прямую $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.

Вариант № 21

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки: $M_1(1;2;-1)$, $M_2(-1;0;4)$, $M_3(-2;-1;1)$.

2. Найти уравнения перпендикуляра к плоскости
$x+3y-4z-13=0$,
проходящего через точку $(2;-1;3)$, и определить координаты основания этого перпендикуляра.

3. При каких значениях A и D прямая $x=3+4t$, $y=1-4t$, $z=-3+t$ лежит в плоскости $Ax+2y-4z+D=0$?

Вариант № 22

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-2;-1)$, $M_3(1;1;-1)$.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-1}$ и плоскости $3x-4y-z+5=0$.

3. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

Вариант № 23

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1\left(1;-2;-\frac{1}{2}\right)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(0;-1;-1)$.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$ и плоскости $x+y-z+5=0$.

3. Найти точку Q, симметричную точке $P(-3;2;5)$ относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases}x-2y+3z-5=0\\x-2y-4z+3=0\end{cases}$, $\begin{cases}3x+y+3z+7=0\\5x-3y+2z+5=0\end{cases}$.

Вариант № 24

1. Найти расстояние от точки $A(2, 3, -1)$ до плоскости $7x-6y-6z+42=0$.

2. Проверить, что прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{1}$ лежит в плоскости $x+y-z-6=0$.

3. Найти точку Q, симметричную точке $P(3;-4;-6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$ и $M_3(10;-7;1)$.

Вариант № 25

1. На плоскость $5x-y+3z+12=0$ из начала координат опущен перпендикуляр. Найти

его длину и углы, образованные им с координатными осями, а также координаты основания этого перпендикуляра.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{9}$ и плоскости $2x - 3y + z - 3 = 0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=2t+1$, $y=-3t+2$, $z=2t-3$ и точку $M_1(2;-2;1)$.

Вариант № 26

1. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $10x-15y-6z-380=0$, и углы, образуемые этим перпендикуляром с координатными осями.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases}3x+y-4z+5=0\\ x-y+2z-1=0\end{cases}$ и точку *M(1; -1; 2)*.

3. Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(x-3y+72z+36)+\beta(2x+y-z-15)=0$ и отстоит от начала координат на расстояние *d=3*.

Вариант № 27

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *M(2; 3; -1)* параллельно плоскости $5x-3y+2z-10=0$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *M(2; - 1; 0)* и прямую $\begin{cases}x-y+3z-1=0\\ 2x+y-z+2=0\end{cases}$.

3. Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(10x-8y-15z+36)+\beta(4x+y+3z-1)=0$ и отстоит от точки $C(3;-2;-3)$ на расстояние *d=7*

Вариант № 28

1.Из точки *P(2; 3; -5)* на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *(1; 1; -2)* и прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}$.

3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

Вариант № 29

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *A(5; 4; 3)* и отсекающей равные отрезки на осях координат.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases}3x-1y+z-5=0\\ x+2y-z+2=0\end{cases}$ параллельно

прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}$.

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;\ -3;\ -4)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковые величины (считая каждый отрезок направленными из начала координат).

Вариант № 30

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+y+5z-1=0$, $2x+3y-z+2=0$ и через точку $M(3;\ 2;\ 1)$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x - y + 2z - 2 = 0$.

3. Найти проекцию точки $C(3;\ -4;\ -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$.

Вариант № 31

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $P(4;\ -2;\ 1)$ и $Q(2;\ 4;\ 3)$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases}3x+2y+3z-5=0\\ x+y+z-4=0\end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases}x-y+2z+1=0\\ 2x+y-3z+2=0\end{cases}$.

Вариант № 32

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x-y-12z-3=0$ и $3x+y-7z-2=0$ и перпендикулярной плоскости $x+2y+5z-1=0$

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases}x-2y+3z-1=0\\ x-y+z+5=0\end{cases}$$

перпендикулярно плоскости $2x+2y-z+5=0$.

Вариант № 33

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;\ -1;\ 4)$ и $B(3;\ 2;\ -1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+2z-3=0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые: •

$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}$, $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}$.

Вариант № 34

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(3;\ -1;\ -5)$ и перпендикулярной

плоскостям $3x-2y+2z+7=0$ и $5x-4y+3z+1=0$.

2. Дана плоскость $x+y-2z-6=0$ и вне её точка *M(1; 1; 1)*. Найти точку *N* симметричную точке *M* относительно данной плоскости.

Вариант № 35

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+3y+5z-4=0$ и $x-y-2z+7=0$ и параллельно оси *Oy*.

2. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ на плоскость $x+y+2z-5=0$.

Индивидуальное задание № 3 (кривые 2-го порядка)

Вариант № 1

1. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$.

2. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями. Изобразить эти линии на чертеже

a) $y=+\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$;   b) $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$;

c) $y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$;   d) $y=+\frac{1}{7}\sqrt{49-x^2}$ /

3. Из точки $C(1;-10)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

4. Составить уравнения касательных к параболе $y^2=36x$, проведенных из точки *A(2; 9).*

Вариант № 2

1. Найти множество середины хорд окружности $x^2+y^2=4(y+1)$, проведенных через начало координат.

2. Вычислить расстояние от фокуса $F(c;0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ до односторонней с этим фокусом директрисы.

3. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2-y^2=16$, проведенных из точки A(-1; -7).

4. К параболе $y^2=2px$ проведена касательная. Доказать, что вершина этой параболы лежит посередине между точкой пересечения касательной с осью *OX* и проекцией точки касания на ось *OX*.

Вариант № 3

1.Составить уравнение касательных к окружности

$(x-3)^2+(y+2)^2=25$, проведенных в точках пересечения окружности с прямой $x-y+2=0$.

2. Через фокус эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$ проведен перпендикуляр к его большой оси. Определить расстояния от точек пересечения этого перпендикуляра с эллипсом до фокусов.

3. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, параллельных прямой $10x-3y+9=0$.

4. Из точки *A(5; 9)* проведены касательные к параболе $y^2=5x$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

Вариант № 4

1.Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;2)$; $B(0;-1)$; $C(-3;0)$.

2. Эксцентриситет эллипса $e=\frac{2}{3}$, фокальный радиус точки М эллипса равен 10. Вычислить расстояние от точки М до односторонней с этим фокусом директрисы.

3. На гиперболе $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ найти точку, ближайшую к прямой $3x+2y+1=0$.

4. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины *A* и величину параметра *p*:

a) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$;

b) $y=4x^2-8x+7$;

c) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$

Вариант № 5

1.Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5;0)$; $B(1;4)$, если её центр лежит на прямой $x+y-3=0$.

2. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2+5y^2=20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между фокусами 2c=6 и эксцентриситет $e=\frac{3}{2}$.

4. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус *F(4; 3)* и директриса $x-5=0$.

Вариант № 6

1.Найти угол между радиусами окружности $x^2+y^2+4x-6y=0$, проведенными в точки её пересечения с осью OY.

2. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между директрисами равно $\frac{228}{13}$ и расстояние между фокусами 2c=26.

4. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+b$ касается параболы $y^2=2px$.

Вариант № 7

1.Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2=2x+4y-4$ относительно прямой $x-y-3=0$.

2. Дан эллипс $9x^2+5y^2=45$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $e=\frac{3}{2}$.

4. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2=8x$ и параллельна прямой $2x+2y-3=0$.

Вариант № 8

1. Составить уравнение окружности, если её центр лежит на прямой $3x-y-2=0$ и окружность проходит через точки $A(3;1)$ и $B(-1;3)$.

2. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $9x^2+5y^2=1$,
две другие лежат с концами его малой оси.

3. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ и прямой $9x+2y-24=0$.

4. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2=16x$ и перпендикулярна к прямой $2x+4y+7=0$.

Вариант № 9

1. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы уравнениями $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

2. Определить эксцентриситет эллипса, если его малая ось видна из фокусов под углом 60^0.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

4. Вычислить длину стороны правильного треугольника *ABC*, вписанного в параболу с параметром *p*, в предположении, что *A* совпадает с вершиной параболы.

Вариант № 10

1. Составить уравнение хорды окружности $x^2+y^2=49$, делящейся в точке $A(1;2)$

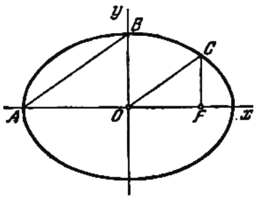
пополам.
2. Определить эксцентриситет эллипса, если :
отрезок между фокусами виден и вершин малой оси под прямым углом;
расстояние между директрисами в три раза больше расстояния между фокусами.
3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если дана точка $M_1\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ гиперболы и уравнение директрис $x=\pm\frac{4}{3}$.
4. Поздравляем! Вам выпал счастливый билет ! Задания не будет!

Вариант № 11

1. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ перпендикулярного к прямой $5x+2y-13=0$.
2. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$, параллельных прямой $3x+2y+7=0$.
3. Установить, какая линия определяется уравнением $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$. Изобразить её на чертеже.
4. Написать уравнение параболы, если известно, что она проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси *OX*.

Вариант № 12

1. Определить, при каких значениях углового коэффициента к прямой $y=kx$ пересекает окружность $x^2+y^2-10x+16=0$, касается её, проходит вне её.
2. Через фокус F эллипса проведен перпендикуляр к его большой оси (см. рис.). Определить, при каком значении эксцентриситета эллипса отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{OC}$ будут параллельны.



3. Установить, какая линия определяется уравнением $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$. Изобразить её на чертеже.
4. Даны вершина параболы *A(6; -3)* и уравнение ее директрисы $3x-5y+1=0$. Найти фокус *F* этой параболы.

Вариант № 13

1. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, изобразить на рисунке:
a) $y=+\sqrt{9-x^2}$ b) $y=-\sqrt{25-x^2}$
c) $y=-\sqrt{4-y^2}$ d) $x=+\sqrt{16-y^2}$

2. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$, перпендикулярных к прямой $3x+2y+7=0$.

3. Дано уравнение равносторонней гиперболы $x^2-y^2=a^2$. Найти ее уравнение в новой системе, приняв за оси координат ее асимптоты.

4. Определить площадь треугольника, у которого одна вершина принадлежит директрисе параболы $y^2=4x$, а две другие служат концами хорды, проходящей через фокус, перпендикулярно оси *OX*.

Вариант № 14

1. Определить уравнение линии центров окружностей, заданных уравнениями:

a) $(x-3)^2+y^2=9$ и $(x+2)^2+(y-1)\ \ =1$

b) $x^2+y^2-4x+6y=0$ и $x^2+y^2-6x=0$

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если его малая ось равна 16, а эксцентриситет $e=\frac{3}{5}$.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

4. На параболе $y^2=16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

Вариант № 15

1.Написать уравнение окружности радиуса $R=\sqrt{5}$, касающихся прямой $x-2y-1=0$ в точке $M(3;1)$.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а расстояние между директрисами равно $\frac{50}{3}$.

3. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $e=2$.

4. На параболе $y^2=12x$ найти точку, фокальный радиус которой равен *9*.

Вариант № 16

1. Какие из уравнений определяют окружность:

$x^2+y^2-2x+4y-20=0$,

$x^2+y^2+6x-4y-14=0$,

$x^2+y^2+4x-2y+5=0$.

2. Эксцентриситет эллипса $e=\frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, одна из директрис задана уравнением $x=16$. Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной -4, до фокуса, одностороннего с данной директрисой.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которого расположены на оси ординат

симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксценриситет $e=\frac{7}{5}$.

4. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен *24 м* и высоты *6 м*.

Вариант № 17

1. Составить уравнение окружности, если её центр совпадает с точкой $C(1,-1)$, и прямая $5x-12y+9=0$ является касательной к окружности.

2. Эксцентриситет эллипса $e=\frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, один из фокусов (-2; 0). Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной 2, до директрисы, односторонней с данным фокусом.

3. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до двух её асимптот есть величина постоянная, равная $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

4. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус *F(4; 3)* и директриса $y+1=0$.

Вариант № 18

1.Составить уравнение окружности, если её центр совпадает с началом координат, и прямая $3x-4y+20=0$ является касательной к окружности.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между его директрисами равно 5, и расстояние между фокусами равно 4.

3. Доказать, что расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до её асимптоты равно b.

4. Под каким углом к горизонту брошен камень, который, двигаясь по параболе, ушел на расстояние *24 м* от начального положения. Определить параметр траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, *6 м*.

Вариант № 19

1. Составить уравнение окружности, которая имеет центр на прямой $2x+y=0$, касается прямых $4x-3y+10=0$ и $4x-3y-30=0$.

2. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+m$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3. Доказать, что уравнении $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ определяет гиперболу, найти координаты её центра С, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис.

4. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+b$ касается параболы $y^2=2px$.

Вариант № 20

1. Составить уравнение окружности, касающейся параллельных прямых $2x+y-5=0$ и $2x+y+15=0$, причем одной их них в точке $A(2,1)$.

2. Из точки $A\left(\frac{10}{3};\frac{5}{3}\right)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. Составить их уравнения.

3. Определить, при каких значениях m прямая $y=\frac{5}{2}x+m$ пересекает гиперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$, касается её, проходит вне гиперболы.

4. Стальной трос подвешен за два конца; точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно *20 см*. Величина его прогиба на расстоянии *2 м* от точки крепления, считая по горизонтали, равна *14,4 см*. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму дуги параболы.

Вариант № 21

1.Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;1)$, $B(1;-1)$ $C(2;0)$

2. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, расстояние которых до правого фокуса равно 14.

3. Провести касательные к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$ параллельно прямой $2x+4y-5=0$ и вычислить расстояние d между ними.

4. Из точки P(-3; 12) проведены касательные к параболе $y^2=10x$. Вычислить расстояние d от точки P до хорды параболы, соединяющей точки касания.

Вариант № 22

1. Определить длину хорды окружности $(x-2)^2+(y-4)^2=10$, делящейся в точке A(1; 2) пополам.

2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично начала координат, зная что его малая ось равна 16, а эксцентриситет $e=\frac{3}{5}$.

3. Найти точку пересечения прямой $2x-y-10=0$ и гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

4. Провести касательную к параболе $y^2=12x$ параллельно прямой $3x-2y+30=0$ и вычислить расстояние d между этой касательной и данной прямой.

Вариант № 23

1. Составить уравнение касательной к окружности $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ в точке A(-5; 7).

2. Найти точки пересечения прямой $3x+10y-25=0$ и эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

3. Из точки $P(1;-5)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$. Вычислить расстояние d от точки P до хорды гиперболы, соединяющей точки касания.

4. На параболе $y^2 = 64x$ найти точку M_1, ближайшую к прямой $4x + 3y - 14 = 0$, и вычислить расстояние d от точки M_1 до этой прямой.

Вариант № 24

1. Составить уравнение диаметра окружности $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$, проходящего через середину хорды, отсекаемой на прямой $x - 2y - 3 = 0$.

2. Найти точки пересечения прямой $x + 2y - 7 = 0$ и эллипса $x^2 + 4y^2 = 25$.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

4. Доказать, что две параболы, имеющую общую ось и общий фокус, расположенный между ее вершинами, пересекаются под прямым углом.

Вариант № 25

1. Составить уравнение окружности, которая, имея центр на прямой $2x + y = 0$, касается прямых $4x - 3y + 10 = 0$, $4x - 3y - 30 = 0$.

2. Через фокус эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{15} = 1$ проведен перпендикуляр к его большой оси. Определить расстояния от точек пересечения этого перпендикуляра с эллипсом до фокусов.

3. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, параллельных прямой $10x - 3y + 9 = 0$.

4. На параболе $y^2 = 12x$ найти точку, фокальный радиус которой равен *9*.

Вариант № 26

1. Определить, как расположена прямая относительно окружности (пересекает ли, касается или проходит вне ее), если прямая и окружность заданы следующими уравнениями:

$y = x + 10$, $\quad x^2 + y^2 - 1 = 0$,

$y = 2x - 3$, $\quad x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$,

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $\quad x^2 + y^2 - 8y + 2y + 12 = 0$.

2. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, параллельных прямой $3x + 2y + 7 = 0$.

3. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$, проведенных из точки A(-1; -7).

4. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$;

b) $y = 4x^2 - 8x + 7$;

c) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$

Вариант № 27

1. Составить уравнения касательных к окружности $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, проведенных в точках пересечения окружности с прямой $x - y + 2 = 0$.

2. Из точки $A\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Составить их уравнения.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

4. На параболе $y^2 = 64x$ найти точку M_1, ближайшую к прямой $4x + 3y - 14 = 0$, и вычислить расстояние d от точки M_1 до этой прямой.

Вариант № 28

1. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;2)$, $B(0;-1)$ $C(-3;0)$.

2. Вычислить расстояние от фокуса $F(c;0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ до односторонней с этим фокусом директрисы.

3. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, параллельных прямой $10x - 3y + 9 = 0$.

4. Провести касательную к параболе $y^2 = 12x$ параллельно прямой $3x - 2y + 30 = 0$ и вычислить расстояние d между этой касательной и данной прямой.

Вариант № 29

1. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2 + y^2 = 16$ и $(x-5)^2 + y^2 = 9$.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а расстояние между директрисами равно $\frac{50}{3}$.

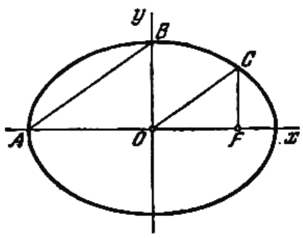
3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которого расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксценриситет $e = \frac{7}{5}$.

4. На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен *13*.

Вариант № 30

1. Найти множество середины хорд окружности $x^2 + y^2 = 4(y+1)$, проведенных через начало координат.

2. Через фокус F эллипса проведен перпендикуляр к его большой оси (см. рис.). Определить, при каком значении эксцентриситета эллипса отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{OC}$ будут параллельны.



3. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до двух её асимптот есть величина постоянная, равная $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

4. Определить точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ и параболы $y^2=24x$.

Индивидуальное задание № 4 (производные)

Вариант № 1

найти производные y'_x :

1. $y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$,
2. $y=5tg\frac{x}{5}+tg\frac{\pi}{8}$,
3. $y=\frac{2}{3}arctg\,x+\frac{1}{3}arctg\frac{x}{1-x^2}$,
4. $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$,
5. $y=e^{ax}(a\sin x-\cos x)$,
6. $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=c$,
7. $\begin{cases} x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$
8. $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(в 8 применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 2

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt{1+\sqrt{2px}}$,
2. $y=\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x$,
3. $y=arctg(x^2-3x+2)$,
4. $y=x\cdot e^{1-\cos x}$,
5. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,
6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,
7. $\begin{cases} x=2t+3t^2, \\ y=t^2+2t^3; \end{cases}$
8. $y=\frac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 3

найти производные y'_x:

1. $y = \sqrt[3]{x^6 - 8}$,
2. $y = \sin^2 \frac{x}{3} \cdot ctg \frac{x}{3}$,
3. $y = \arccos \sqrt{1 - 3x}$,
4. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$,
5. $y = e^x \cdot (\sin 3x - 3\cos 3x)$,
6. $\sin(xy) + \cos(xy) = tg(x + y)$,
7. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2; \end{cases}$
8. $y = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 4

найти производные y'_x:

1. $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \cdot \arccos \frac{x}{a}$,
2. $y = \cos 2x \cdot \ln x$,
3. $y = \arcsin\left(\sqrt{\sin x}\right)$,
4. $y = \ln \frac{1 - e^x}{e^x}$,
5. $y = 10^{xtgx}$,
6. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$,
7. $\begin{cases} x = a\left(\ln tg \frac{t}{2} + \cos t - \sin t\right), \\ y = a(\sin t + \cos t); \end{cases}$
8. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 5

найти производные y'_x:

1. $y = x - \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x$,
2. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$,
3. $y = x \cdot \arcsin(\ln x)$,
4. $y = \ln\left(e^x \cos x + e^{-x} \sin x\right)$,
5. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$,
6. $y^3 = \frac{x - y}{x + y}$,
7. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$
8. $y = \cdot\sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 6

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$,

2. $y = \dfrac{1}{18}\sin^6 3x - \dfrac{1}{24}\sin^8 3x$,

3. $y = arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,

4. $y = e^x \sin x \cos^3 x$,

5. $y = a^{\sin^3 x}$,

6. $xy = arctg\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$

8. $y = (\cos x)^{tgx}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 7

найти производные y'_x :

1. $y = 3^{\sin x}$,

2. $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$,

3. $y = \dfrac{\arcsin 4x}{1-4x}$,

4. $y = \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$,

5. $y = \ln arctg\dfrac{1}{1+x}$,

6. $e^y = x + y$,

7. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{(1+t)^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$

8. $y = x\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 8

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$,

2. $y = \dfrac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cdot\cos x}$,

3. $y = \arcsin(n\sin x)$,

4. $y = \ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$,

5. $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$,

6. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$,

7. $\begin{cases} x = a\cdot\cos^3 t, \\ y = b\cdot\sin^3 t; \end{cases}$

8. $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 9

найти производные y'_x :

1. $y = \sqrt{1 + tg^2 x + tg^4 x}$,

2. $y = \sin^2 \frac{x}{3} \cdot ctg \frac{x}{2}$,

3. $y = \arccos \sqrt{1 - 3x}$,

4. $y = \log_3 \left(x^2 - \sin x \right)$,

5. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$,

6. $\ln y + \frac{x}{y} = c$,

7. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \frac{t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}}; \end{cases}$

8. $y = (arctgx)^x$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 10

найти производные y'_x :

1. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

2. $y = \sin^2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right)$,

3. $y = \frac{2}{3} arctgx + \frac{1}{3} arctg \frac{x}{1 - x^2}$,

4. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$,

5. $y = 10^{2x - 3}$,

6. $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$,

7. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}; \end{cases}$

8. $y = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 11

найти производные y'_x :

1. $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}$,

2. $y = \frac{\sin^2 x}{1 + ctgx} + \frac{\cos^2 x}{1 + tgx}$,

3. $y = arctg \frac{x + 1}{x - 1}$,

4. $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$,

5. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$,

6. $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$,

7. $\begin{cases} x = \frac{2at}{1 + t^2}, \\ y = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t}; \end{cases}$

8. $y = (\cos x)^{\sin x}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 12

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$,
2. $y=\sin x\cdot e^{\cos x}$,
3. $y=x(\arcsin x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$,
4. $y=\ln tgx$,
5. $y=\sqrt{1+e^x}$,
6. $y^2=2px$,
7. $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t); \end{cases}$
8. $y=x^{\ln x}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 13

найти производные y'_x :

1. $y=\dfrac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$,
2. $y=\sin\sqrt{1+x^2}$,
3. $y=arctg\,x^2$,
4. $y=xe^x$,
5. $y=e^{\arcsin 2x}$,
6. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$,
7. $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t; \end{cases}$
8. $y=x^{\ln x}$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 14

найти производные y'_x :

1. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,
2. $y=\dfrac{1}{4}tg^4x$,
3. $y=\sqrt{1+tg\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$,
4. $y=\dfrac{x^2}{arctgx}$,
5. $y=e^x\cos x$,
6. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$,
7. $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}; \end{cases}$
8. $y=(arctg\,x)^x$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 15

найти производные y'_x:

1. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$,
2. $y=\sqrt{x}\,arctg\,x$,
3. $y=x\ln x$,
4. $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$,
5. $y=e^x(\sin 3x-3\cos 3x)$,
6. $2^x+2^y=2^{x+y}$,
7. $\begin{cases} x=a(\phi-\sin\phi), \\ y=a(1-\cos\phi); \end{cases}$
8. $y=(\sin x)^{\cos x}$ (применив логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 16

найти производные y'_x :

1. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$,

2. $y = \sin(\sin x)$,

3. $y = \arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$,

4. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$,

5. $y = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$,

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

7. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$

8. $y = x^{\frac{1}{x}}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 17

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$,

2. $y = arctgx + \arcsin x$,

3. $y = e^x \arcsin x$,

4. $y = \sqrt[3]{a+bx^3}$,

5. $y = \sqrt{1+e^x}$,

6. $xy = arctg\,\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x = 2t-1, \\ y = t^3; \end{cases}$

8. $y = x\sqrt{x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 18

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$,

2. $y = xctgx$,

3. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$,

4. $y = \dfrac{1}{2}\ln tg\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$,

5. $y = \ln(\arcsin 5x)$,

6. $xy = arctg\,\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$

8. $y = \sqrt[x]{x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 19

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$,

2. $y = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x$,

3. $y = \dfrac{e^x}{x^{\frac{2}{3}}}$,

4. $y = 2x + 5\cos^3\dfrac{1}{x}$,

5. $y = arctg\ln\dfrac{1}{x}$,

6. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$,

7. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2; \end{cases}$

8. $y = x^{\sin x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 20

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$,

2. $y = arctgx + \arcsin x$,

3. $y = e^x \arcsin x$,

4. $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$,

5. $y = \sqrt{1 + e^x}$,

6. $xy = arctg\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3; \end{cases}$

8. $y = x\sqrt{x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 21

найти производные y'_x :

1. $y = arctg\left(x^2 - 3x + 2\right)$,

2. $y = x^2 \cdot arctgx^3$,

3. $y = \dfrac{2\cos x^3}{\sqrt{\cos^2 x}}$,

4. $y = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{1}{2}arctgx$,

5. $y = \ln\left(e^x \cos x + e^{-x} \sin x\right)$,

6. $\begin{cases} x = 3\cos x, \\ y = 4\sin x; \end{cases} \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$,

7. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$,

8. $x^y = y^x$. *(применить логарифмическое диф-ние)*

Вариант № 22

найти производные y'_x :

1. $y = \sin\left(3x + 5\right)$,

2. $y = \sin(\sin x)$,

3. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$, .

4. $y = \dfrac{x}{e^x}$,

5. $y = \ln tg\dfrac{1}{1+x}$,

6. $y = \cos(x + y)$,

7. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t}{t^2} - 1, \end{cases}$

8. $y = x^{\sin x}$. (применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 23

найти производные y'_x :

1. $y = \sqrt{1 - 2x^3}$,

2. $y = \cos^3 4x$,

3. $y = 10^{x \cdot tgx}$,

4. $y = \ln^2 x$,

5. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$,

6. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$,

7. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3; \end{cases}$

8. $y = x^x$.

(в 8-м примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 24

найти производные $\boldsymbol{y'_x}$:

1. $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$,

2. $y=\cos^2 x$,

3. $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$,

4. $y=x\cdot 10^x$,

5. $y=tg\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$,

6. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$,

7. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}$

8. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

(в 8-м примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 25

найти производные $\boldsymbol{y'_x}$:

1. $y=\sqrt[3]{2+x^2}$,

2. $y=\sin^2(\cos 3x)$,

3. $y=a^x x^a$,

4. $y=\dfrac{1}{3^x}$,

5. $y=\dfrac{1}{\ln x}$,

6. $y=1+xe^y$,

7. $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ $\dfrac{dy}{dx}=?$

8. $y=x\cdot e^x$.

(в 8-м примере применить логарифмическое дифференцирование)

Индивидуальное задание № 5(Интегралы)

Вариант №1

1. Найти интеграл

$$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int\ln\left(1+x^2\right)dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int\sin x\cdot\sin 3xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Вариант №2

1. Найти интеграл

$$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int\ln\left(1+x^2\right)dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin x \cdot \sin 3x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Вариант №3

1. Найти интеграл

$$\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x^2 e^x \sin x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^6 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{2xdx}{x^2+3x-4}$$

Вариант №4

1. Найти интеграл

$$\int \cos(1-2x) dx$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin 7x \cdot \sin 3x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2)(x+1)}$$

Вариант №5

1. Найти интеграл

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^6 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx$$

Вариант №6

1. Найти интеграл

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5} dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int arctgx\, dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{\sin x\, dx}{(1-\cos x)^2}$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2 (x^2-1)}$$

Вариант №7

1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{1+x^3} dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^4 x\, dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+x-6}dx$$

Вариант №8

1. Найти интеграл

$$\int tg^2 x dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cdot 3^x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^2 3x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$$

Вариант №9

1. Найти интеграл

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int arctg\sqrt{x}dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^4 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$$

Вариант №10

1. Найти интеграл

$$\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \arcsin x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^5 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+3x}dx$$

Вариант №11

1. Найти интеграл

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cdot arctgx\ dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^2 5xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{x^3+x}$$

Вариант №12

1. Найти интеграл

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \arccos x\ dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-\sqrt[4]{x}}}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$$

Вариант №13

1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{2x-1}.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int xe^{-x}dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^5 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{x^2 - x}$$

Вариант №14

1. Найти интеграл

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int 3x \cos 3x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$$

Вариант №15

1. Найти интеграл

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + a^2} dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cos x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx$$

Вариант №16

1. Найти интеграл

$$\int tg 3x \, dx$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cdot \sin 2x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$$

Вариант №17

1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cdot arctgx\ dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{2x}{x^4+3}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin 4x \cdot \cos^2 x\, dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4-2x^2+1}$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №1

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} fdx.$$

Вычислить

$$\iint_D (12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=\frac{3}{x}, y=4e^x, y=3, y=4.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №2

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx.$$

. Вычислить

$$\iint\limits_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$x=\sqrt{36-y^2}, x=6-\sqrt{36-y^2}.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №3

Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y fdx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} fdx.$$

Вычислить

$$\iint\limits_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$x^2+y^2=72{,}6y=-x^2\,(y\le 0).$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №4

Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} fdx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} fdx.$$

Вычислить

$$\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$x=8-y^2, x=-2y.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №5

Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} fdx + \int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_x^0 fdx.$$

. Вычислить

$$\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}\,(x\ge 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y=\dfrac{3}{x}, y=8e^x, y=3, y=8.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №6

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_0^{\arccos y} f dx.$$

Вычислить

$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2\ (x \ge 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2}, y = \frac{1}{2x}, x = 16.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №7

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_0^{\sqrt{-y}} f dx.$$

Вычислить

$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$x = 5 - y^2, x = -4y.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №8

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^3.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2\ (y \le 0).$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №9

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_0^{x^2} f dy.$$

. Вычислить

$$\iint_D (4xy + 16x^2y^2)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \sqrt{12 - x^2}, y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, x = 0, (x \ge 0).$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №10

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} fdy.$$

Вычислить $\iint\limits_D (12xy + 9x^2y^2)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2.$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}, y = \dfrac{3}{2x}, x = 9.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №11

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} fdy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} fdy.$$

. Вычислить

$\iint\limits_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = \sqrt{24 - x^2}, 2\sqrt{3}y = x^2, x = 0, (x \geq 0).$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №12

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} fdx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} fdx.$$

. Вычислить

$\iint\limits_D (24xy + 18x^2y^2)dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = \sin x, y = \cos x, x = 0 (x \geq 0).$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №13

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{0}^{\pi.4} dy \int_{0}^{\sin y} fdx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} fdx.$$

Вычислить

$\iint\limits_D (12xy + 27x^2y^2)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x} (x \geq 0).$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = 20 - x^2, y = -8x.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №14

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f dy.$$

Вычислить

$$\iint_D (8xy + 18x^2 y^2) dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2 (x \geq 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = \sqrt{18 - x^2}, y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №15

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{0}^{\pi/4} dy \int_{0}^{\sin y} f dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} f dx.$$

Вычислить

$$\iint_D \left(\frac{4}{5} xy + \frac{9}{11} x^2 y^2 \right) dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = 32 - x^2, y = -4x.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №16

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx.$$

Вычислить

$$\iint_D \left(\frac{4}{5} xy + 9x^2 y^2 \right) dxdy; D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^3.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = \frac{2}{x}, y = 5e^x, y = 2, y = 5.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №17

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{0} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx.$$

Вычислить

$$\iint_D (24xy + 48x^3y^3) dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$x^2 + y^2 = 36, 3\sqrt{2} y = x^2 (y \geq 0).$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №18

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^3} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

Вычислит

$$\iint_D (6xy + 24x^3y^3) dxdy; D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 4.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №19

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy.$$

Вычислить

$$\iint_D (4xy + 16x^3y^3) dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = 6 - \sqrt{36 - x^2}, y = \sqrt{36 - x^2}, x = 0, (x \geq 0).$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №20

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx.$$

Вычислить

$$\iint_D (4xy + 16x^3y^3) dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y=\frac{25}{4}-x^2, y=x-\frac{5}{2}.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №21

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy\int_{-0}^{y} fdx+\int_1^e dy\int_{\ln y}^{1} fdx.$$

Вычислит

$$\iint_D (44xy+16x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}(x\geq 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y=\sqrt{x}, y=\frac{1}{x}, x=16.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №22

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} fdy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} fdy.$$

Вычислить

$$\iint_D (4xy+176x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3(x\geq 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y=\frac{2}{x}, y=7e^x, y=2, y=7.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №23

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\pi/4} dx\int_0^{\sin x} fdy+\int_{\pi/4}^{\pi/2} dx\int_0^{\cos x} fdy.$$

Вычислить

$$\iint_D (xy-4x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y=27-y^2, x=-6y.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №24

Изменить порядок интегрирования

$$1\int_{-\sqrt{2}}^{1} dy\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx+\int_{-1}^{0} dy\int_{y}^{0} fdx.$$

Вычислить

$$\iint_D (4xy + 176x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^3.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$x = \sqrt{72 - y^2}, 6x = y^2, y = 0 (y \geq 0).$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №25

Изменить порядок интегрирования

$$1 \int_0^1 dx \int_0^{x^3} fdy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} fdy.$$

Вычислить

$$\iint_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^3y^3\right)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \sqrt{6 - x^2}, y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2}.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №26

Изменить порядок интегрирования

$$1 \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} fdy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} fdy.$$

Вычислить

$$\iint_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 4.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №27

Изменить порядок интегрирования

$$1 \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 fdy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 fdy.$$

Вычислит

$$\iint_D \left(3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \sin x, y = \cos x, x = 0 (x \leq 0.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №28

Изменить порядок интегрирования

$$1\int_0^1 dx\int_0^x fdy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} fdy.$$

Вычислить

$$\iint_D (9x^2y^2+25x^4y^4)dxdy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=\frac{1}{x}, y=6e^x, y=1, y=6.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №29

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} fdx+\int_1^{\sqrt{2}} dy\int_0^{\sqrt{2-y^2}} fdx.$$

Вычислить

$$\iint_D (54x^2y^2+150x^4y^4)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}(x\geq 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=3\sqrt{x}, y=\frac{3}{x}, x=94.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №30

Изменить порядок интегрирования

$$1\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} fdy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2-x}} fdy.$$

Вычислить

$$\iint_D (xy-9x^5y^5)dxdy; D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2(x\geq 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=11-x^2, y=-10x.$$

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 1

1. На сельскохозяйственные работы из трех бригад выделяют по одному человеку. Известно, что в первой бригаде 15 человек, во второй – 12, в третьей – 10 человек. Определить число возможных групп по 3 человека, если известно, что на сельскохозяйственные работы может быть отправлен каждый рабочий.
2. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «песня». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «песня». В ответ

записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, равны соответственно 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены две камеры. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. 20 % приборов монтируется с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодулей – 0,9, интегральных схем – 0,8. Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он был исправен. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 54 раза в 243 испытаниях. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(1)=0{,}2420,\ \varphi(1{,}2)=0{,}1942$

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 2

1. Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из 10 вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.

2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, равны соответственно 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включено не более одной камеры. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, равными соответственно 0,2; 0,3; 0,5. Вероятность брака на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01. Найти: а) вероятность того, что случайно взятая после обработки деталь – стандартная; б) вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 144 испытаниях событие наступит 120 раз. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(1)=0{,}2420,\ \varphi(1{,}3)=0{,}1714$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 3

1. Студенты данного курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?

2. Из 10 билетов лотереи выигрышными являются 3. Найти вероятность того, что взятые наудачу 2 билета – выигрышные. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. На железобетонном заводе изготавливают панели, 90 % из которых – высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей хотя бы одна панель будет высшего сорта? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. Среди поступивших на сборку деталей 30 % – с завода № 1, остальные – с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1 равна 0,02, для завода № 2 – 0,03. Найти: а) вероятность того, что наугад взятая деталь стандартная; б) вероятность изготовления наугад взятой детали на заводе № 1, если она оказалась стандартной. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 25 раз в 100 испытаниях. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$, $\varphi(1) = 0{,}2420$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 4

1. Восемь человек договорились ехать в одном поезде, состоящем из восьми вагонов. Сколькими способами можно распределить этих людей по вагонам, если в каждый вагон сядет по одному человеку

2. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выйдет на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. На железобетонном заводе изготавливают панели, 90 % из которых – высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей будет не более одной панели высшего сорта? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. Комплектовщик получает для сборки 30 % деталей с завода № 1, 20 % – с завода № 2, остальные – с завода № 3. Вероятность того, что деталь с завода № 1 – высшего качества, равна 0,9, для деталей с завода № 2 – 0,8, для деталей с

завода № 3 – 0,6. Найти вероятность того, что: а) случайно взятая деталь – высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе № 2. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит 1470 раз. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(0) = 0{,}3989,\ \varphi(1) = 0{,}2420$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 5

1. В шахматном турнире участвовало 14 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего сыграно партий

2. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ремонт». Карточки с отдельными буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «море»? В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них равны соответственно 0,3; 0,2; 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя не менее двух радиоламп. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. Три автомата изготавливают однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата – высшего качества, равна 0,8, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 2 бракованных. Ответ записать с двумя знаками после запятой без округления, учитывая, что $e = 2{,}72$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 6

1. На конференцию из трех групп студентов одной специальности выбирают по одному делегату. Известно, что в первой группе 25, во второй – 28 и в третьей - 20 человек. Определить число возможных делегаций, если известно, что каждый студент из любой группы с одинаковой вероятностью может войти в

состав делегации.
2. В группе спортсменов 7 лыжников и 3 конькобежца. Из нее случайным образом выделены три спортсмена. Найти вероятность того, что все выбранные спортсмены окажутся лыжниками. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.
3. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них равны соответственно 0,3; 0,2; 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдет из строя хотя бы одна радиолампа? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.
4. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2 %, на втором – 3 %. Найти вероятность того, что: а) наугад взятое после обработки изделие – стандартное; б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.
5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 20 раз в 100 испытаниях. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(0) = 0{,}3989,\ \varphi(1) = 0{,}2420$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 7

1. Из девяти значащих цифр составляются трехзначные числа. Сколько различных чисел может быть составлено?
2. Из восьми книг две художественные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех книг хотя бы одна художественная. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления
3. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль будет обнаружен не менее чем двумя станциями. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.
4. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем на станке № 2. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя

знаками после запятой без округления

5. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение часа равна 0,002. Найдите вероятность того, что за час откажут 4 элемента. Ответ записать с двумя знаками после запятой без округления, учитывая, что $e = 2{,}72$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 8

1. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью девяти значащих цифр, из которых ни одна не повторяется

2. На полке 6 радиоламп, из которых две негодные. Случайным образом отбираются две радиолампы. Какова вероятность того, что они годны для использования? В ответ записать число, имеющее один знак после запятой без округления.

3. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль будет обнаружен двумя станциями. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, – первого типа. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округл

5. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 100 деталей 55 окажутся отполированными, если в общей массе деталей имеется поровну отполированных и неотполированных. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(0) = 0{,}3989$, $\varphi(1) = 0{,}2420$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 9

1. В пассажирском поезде 5 вагонов. Сколькими способами можно размещать вагоны, составляя этот поезд?

2. В запасе ремонтной мастерской 10 поршневых колец, три из них восстановленные. Определить вероятность того, что среди взятых наугад четырех колец два окажутся восстановленными? В ответ записать число, имеющее один знак после запятой без округления

3. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, высшего качества, равна 0,7, вторым – 0,8,

третьим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что будут ровно два подшипника высшего качества? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. Вероятность того, что во время работы ЭВМ возникнет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. а) Найти вероятность того, что возникший в ЭВМ сбой будет обнаружен. б) Во время работы ЭВМ был обнаружен сбой. Найти вероятность того, что он возник в оперативной памяти. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.

5. Семена содержат 0,1 % сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 2000 семян обнаружить 5 семян сорняков. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $e = 2{,}72$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 10

1. Из 10 кандидатов на одну и ту же должность должно быть выбрано 3. Определить все возможные варианты результатов выборов.

2 .Шесть студентов условились ехать определенным рейсом электропоезда с 6 вагонами, но не договорились о номере вагона. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если возможности в размещении студентов по вагонам равновероятны? В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления

3. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, высшего качества, равна 0,7, вторым – 0,8, третьим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что будет хотя бы один подшипник высшего качества? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. По линии связи передано два сигнала типов А и В с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60 % сигналов типа А и 70 % типа В. Найти вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал – типа А. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность останова для каждой машины равна 0,2. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(2{,}5) = 0{,}0175$, $\varphi(3) = 0{,}0044$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 11

1. Бригадир должен отправить на работу звено из 5 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 12 человек бригады?

2. Билеты лотереи выпущены на общую сумму 10 000 у.е. Цена билета 0,5 у.е. Ценные выигрыши падают на 50 билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. Первый станок-автомат дает 10 % брака, второй – 15 %, а третий – 20 %. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Какова вероятность того, что стандартной окажется ровно одна деталь? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, равны соответственно 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, второго – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии, б) Индикатор сработал. Найти вероятность того, что он принадлежит первому типу. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Вероятность того, что при автоматической штамповке изделий отдельное изделие окажется бракованным (т.е. с отклонениями от стандарта) постоянна и равна 0,05. Какова вероятность того, что в партии из 1000 изделий встретится ровно 40 бракованных? Ответ записать с двумя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(0) = 0{,}3989$, $\varphi(1{,}45) = 0{,}1394$

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 12

1. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, если известно, что любые три из них не лежат на одной прямой?

2. В группе из 8 спортсменов шесть мастеров спорта. Найти вероятность того, что из двух случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один – мастер спорта. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. Первый станок-автомат дает 10 % брака, второй – 15 %, а третий – 20 %. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Какова вероятность того, что стандартной окажется хотя бы одна деталь? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. Резистор, поставленный в телевизор, может принадлежать к одной из двух

партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятности того, что резистор проработает гарантийное число часов, для этих партий равны соответственно 0,8 и 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад резистор проработает гарантийное число часов, б) Резистор проработал гарантийное число часов. Найти вероятность того, что он принадлежит ко второй партии. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.

5. Найти вероятность поражения мишени 75 раз при 100 выстрелах, если вероятность поражения при одном выстреле равна 0,8. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$, $\varphi(2{,}5) = 0{,}0175$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 13

1. Сколькими способами можно составить патруль из трех солдат и одного офицера, если имеется 20 солдат и 3 офицера?

2.Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления

3. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, соответственно равна 0,2; 0,3; 0,1. Найти вероятность того, что включены ровно два электродвигателя. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. При отклонении от штатного режима работы поточной линии срабатывают сигнализатор типа Т-1 с вероятностью 0,9 и сигнализатор типа Т-2 с вероятностью 0,8. Вероятности того, что линия снабжена сигнализаторами типов Т-1 и Т-2, равны соответственно 0,7 и 0,3. а) Найти вероятность того, что при отклонении от штатного режима работы сигнализатор сработает, б) Сигнализатор сработал. Найти вероятность того, что он принадлежит к первому типу. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Станок состоит из 2000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение года равна 0,0005. Найти вероятность отказа в течение года двух узлов. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $e = 2{,}72$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 14

1. Сколькими способами 3 награды могут быть распределены между 10 участниками соревнования?

2.Из 25 билетов, пронумерованных числами от 1 до 25, наугад вынимают один. Найти вероятность того, что номер извлеченного билета есть число, не делящееся ни на 2, ни на 3, ни на 5. В ответ записать число, имеющее два знака после запятой без округления

3. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, соответственно равна 0,2; 0,3; 0,1. Найти вероятность того, что включен хотя бы один электродвигатель. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы – 0,7. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную института. б) Студент попал в сборную института. Найти вероятность того, что он учится во второй группе. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.

5. Промышленная телевизионная установка содержит 2000 транзисторов. Вероятность выхода из строя каждого из транзисторов равна 0,0005. Найти вероятность выхода из строя хотя бы одного транзистора. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $e = 2{,}72$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 15

1. Сколькими различными способами можно избрать из 15 человек делегацию в составе трех человек?

2.Буквенный замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 3 сектора с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления

3. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6. Найти вероятность успешного преодоления не менее двух препятствий. Ответ записать с одним знаком после запятой без округления.

4. На сборку поступают детали с трех конвейеров. Первый дает 25 %, второй – 30 % и третий – 45 % деталей, поступающих на сборку. С первого конвейера в среднем поступает 2 % брака, со второго – 3 %, с третьего – 1 %. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступила бракованная деталь; б) поступившая на сборку бракованная деталь – со второго конвейера. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с одной знаком после запятой

без округления.
5. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12. Вычислить вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров 36 выдержат гарантийный срок. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(2{,}04)=0{,}0498$, $\varphi(2{,}8)=0{,}0079$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 16

1. Сколькими различными способами собрание, состоящее из 20 человек, может выбрать председателя собрания, его заместителя и секретаря
2. Партия из 100 деталей проверяется контролером, который наугад отбирает 10 деталей и определяет их качество. Если среди выбранных контролером деталей нет ни одной бракованной, то вся партия принимается. В противном случае ее посылают на дополнительную проверку. Какова вероятность того, что партия деталей, содержащая 5 бракованных, будет принята контролером? В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.
3. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6. Найти вероятность успешного преодоления двух препятствий. Ответ записать с двумя знаками после запятой без округления.
4. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй – 10, из них 3 неисправных. а) Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию. б) Наугад взятый конденсатор оказался годным. Найти вероятность того, что конденсатор взят из первой коробки. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления
5. Вероятность появления события в каждом из 2000 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит 1400 раз. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(0)=0{,}3989$, $\varphi(1)=0{,}2420$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 17

1. Сколькими способами можно выбрать два карандаша и три ручки из пяти различных карандашей и пяти различных ручек?
2. За выполнение контрольной работы 24 студента получили следующие оценки: 8 студентов – «отлично», 6 – «хорошо», 6 – «удовлетворительно», 4 – «неудовлетворительно». Найти вероятность того, что работа наугад взятого

студента оценена положительно. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,7, третий –0,6. Вычислить вероятность того, что студент сдаст два экзамена. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. В телевизионном ателье имеется 2 кинескопа первого типа и 8 второго типа. Вероятность выдержать гарантийный срок для кинескопов первого типа равна 0,9, а для второго типа – 0,6. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад кинескоп выдержит гарантийный срок; б) взятый наугад кинескоп, выдержавший гарантийный срок, первого типа. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.

5. Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 11 раз. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(1{,}76)=0{,}4608$, $\Phi(1)=0{,}3413$, $\Phi(2{,}18)=0{,}4854$, $\Phi(3)=0{,}49865$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 18

1. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений)?

2. Подбросили 3 монеты. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпал герб. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,6. Вычислить вероятность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. У сборщика 16 деталей, изготовленных на заводе № 1, и 10 деталей, изготовленных на заводе № 2. Вероятности того, что детали выдержат гарантийный срок, равны соответственно для деталей с завода № 1 – 0,8; с завода № 2 – 0,9. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь выдержит гарантийный срок. б) Взятая наугад деталь выдержала гарантийный срок. Найти вероятность того, что деталь изготовлена на заводе № 2. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на шести веретенах. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $e=2{,}72$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 19

1. Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из трех

горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?
2.Из коробки, содержащей карточки с буквами «о», «н», «к», «ь», наугад вынимают одну карточку за другой и располагают в порядке извлечения. Какова вероятность того, что в результате получится слово «конь»? В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления
3. Самолет противника обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,8; 0,7; 0,5. Какова вероятность обнаружения самолета двумя радиолокаторами? Ответ записать с двумя знаками после запятой без округления.
4. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире», они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении $5:3$. Статические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что: а) передаваемый сигнал принят; б) принятый сигнал – «тире». В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.
5. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что событие наступит 450 раз. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(0)=0{,}3989,\ \varphi(2)=0{,}0540.$

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 20

1. Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать 3 студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?
2. Из пруда, в котором плавают 40 щук, выловили 5 щук, пометили их и пустили обратно в пруд. Во второй раз выловили 9 щук. Какова вероятность, что среди них окажутся только две помеченные щуки? В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.
3. Самолет противника обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,8; 0,7; 0,5. Какова вероятность обнаружения самолета хотя бы одним радиолокатором? Ответ записать с двумя знаками после запятой без округления.
4. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат. б) Вертолет обнаружил спускаемый аппарат. Найти вероятность того, что он принадлежит к первому типу. В ответ

записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Вероятность того, что изделие – высшего сорта, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 – высшего сорта. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(0)=0{,}3989$, $\varphi(1)=0{,}2420$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)
Вариант № 21

1. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом?

2. Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5). В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления

3. Три команды спортивного общества А состязаются соответственно с тремя командами общества В. Вероятности выигрышей первой, второй и третьей команд из общества А у соответствующих команд из общества В равны 0,7; 0,6; 0,4. Команды провели по одной встрече. Какова вероятность того, что команды общества А выиграют две встречи? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. Прибор состоит из двух узлов одного типа и трех узлов второго типа. Надежность работы в течение времени Т для узла первого типа равна 0,8, а для узла второго типа – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный узел проработает в течение времени Т. б) Узел проработал гарантийное время Т. Найти вероятность того, что он принадлежит ко второму типу. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с одним знаком после запятой без округления.

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие наступит не менее 70 и не более 80 раз. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(0)=0$, $\Phi(2{,}5)=0{,}4938$, $\Phi(1)=0{,}3413$, $\Phi(2)=0{,}4772$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)
Вариант № 22

1. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь?

2. Из пяти карточек с буквами «а», «б», «в», «г», «д» наугад одну за другой выбирают две и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получится слово «да»? В ответ записать число, имеющее два знака после запятой без округления

3. Три команды спортивного общества А состязаются соответственно с тремя командами общества В. Вероятности выигрышей первой, второй и третьей команд из общества А у соответствующих команд из общества В равны 0,7; 0,6; 0,4. Команды провели по одной встрече. Какова вероятность того, что команды общества А выиграют хотя бы две встречи? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала А или в одну из пяти касс вокзала В. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала А имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала В – 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет. б) Пассажир купил билет. Найти вероятность того, что он купил билет в кассе вокзала В. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.

5. Вероятность того, что изделие – высшего качества, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 400 изделий число изделий высшего качества составит от 194 до 208. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(0,8) = 0,2881$; $\Phi(0,6) = 0,2257$, $\Phi(0,77) = 0,2794$, $\Phi(1,1) = 0,3643$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 23

1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета», чтобы все они начинались с буквы «р»?

2. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что извлеченные наугад два шара окажутся черными? В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления

3. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1, второй – 0,2 и третий – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя не менее двух станков. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала А или в одну из пяти касс вокзала В. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала А имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала В – 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет. б) Пассажир купил билет. Найти вероятность того,

что он купил билет в кассе вокзала B. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.

5. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится 200 раз, если вероятность его наступления в каждом независимом испытании равна 0,2. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(0) = 0{,}3989,\ \varphi(3) = 0{,}0044.$

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 24

1. Профсоюзное бюро факультета, состоящее из 9 человек, на своем заседании должно избрать председателя, его заместителя и казначея. Сколько различных случаев при этом может быть

2. Мальчик забыл две последние цифры номера телефона одноклассника и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечетны и различны. Найти вероятность того, что номер набран правильно. В ответ записать число, имеющее два знака после запятой без округления

3. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1, второй – 0,2 и третий – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя ровно два станка. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. В вычислительной лаборатории 40 % микрокалькуляторов и 60 % компьютеров. Во время расчета 90 % микрокалькуляторов и 80 % компьютеров работают безотказно. а) Найти вероятность того, что наугад взятая вычислительная машина проработает безотказно во время расчета. б) Выбранная машина проработала безотказно во время расчета. Найти вероятность того, что это был компьютер. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.

5. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(0{,}15) = 0{,}0596$, $\Phi(1{,}2) = 0{,}3849$, $\Phi(2{,}22) = 0{,}4868$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 25

1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета», чтобы все они начинались с буквы «р»?

2. В урне 5 шаров: красный, желтый, синий, зеленый и белый. Случайным образом их вынимают из урны. Найти вероятность того, что они будут извлечены в следующем порядке: белый, синий, желтый, красный, зеленый. В

ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, высшего качества, равна 0,9, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей две высшего качества. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления

4. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 10 второго. Гарантийный срок обычно выдерживают 80 % радиоламп первого типа и 90 % второго типа. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая радиолампа выдержит гарантийный срок; б) радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с одним знаком после запятой без округления.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,5. Найти вероятность того, что из 1000 рождающихся детей мальчиков будет не менее 500, но не более 550. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(0)=0;\ \Phi(3{,}16)=0{,}499,\ \Phi(0{,}44)=0{,}17,\ \Phi(1{,}16)=0{,}3770.$

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 26

1. Сколькими способами можно рассадить 5 человек за круглым столом? (Рассматривается только расположение сидящих относительно друг друга.)

2. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошел между 50-м и 55-м километрами линии? В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

3. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, – высшего качества, равна 0,9, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей хотя бы одна высшего качества. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. Имеется 6 коробок диодов типа А и 8 коробок диодов типа В. Вероятность безотказной работы диода типа А равна 0,8, типа В – 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад диод проработает гарантийное число часов. б) Взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. Найти вероятность того, что он относится к типу А. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с одним знаком после запятой без округления.

5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Используя теорему Муавра-Лапласа, найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не более 75 раз. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(0)=0;\ \Phi(0{,}1)=0{,}0398,$

$\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 27

1. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было 5 черных?

2. В мастерскую для ремонта поступило 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер берет любые 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в настройке? В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления

3. Инженер выполняет расчет, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем справочниках, равны соответственно 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что интересующие инженера данные содержатся только в одном справочнике. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнения нормы мастера спорта равны для студентов первой группы – 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Найти вероятность того, что: а) наугад взятый студент выполнит норму мастера спорта; б) студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. По мишени проводится 100 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,75. Найти вероятность того, что число попаданий будет не менее 80. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(5{,}77) = 0{,}5$; $\Phi(1{,}15) = 0{,}3749$, $\Phi(0{,}8) = 0{,}2881$; $\Phi(2{,}02) = 0{,}4783$.

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 28

1. Известно, что 7 студентов сдали экзамен по теории вероятностей на «хорошо» и «отлично». Сколькими способами могли быть поставлены им оценки?

2. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которых по жребию распределяют в две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что два сильнейших шахматиста будут играть в разных группах. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления

3. Инженер выполняет расчет, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем справочниках, равны соответственно 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что интересующие инженера данные содержатся только в двух справочниках. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. На участке, изготавливающем болты, первый станок производит 25 %, второй – 35 %, третий – 40 % всех изделий. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5 %, 4 %, 2 %. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт – с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Вероятность получения с конвейера изделий 1-го сорта равна 0,75. Принята партия в 1000 изделий. Определить вероятность того, что изделий первого сорта окажется от 720 до 800. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(3{,}65)=0{,}49998;$, $\Phi(2{,}19)=0{,}4861;$ $\Phi(0)=0;$ $\Phi(1{,}33)=0{,}4082.$

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 29

1. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности председателя и заместителя

2. В партии, состоящей из 20 радиоприемников, 5 неисправных. Наугад берут 3 радиоприемника. Какова вероятность того, что в число выбранных войдут 1 неисправный и 2 исправных радиоприемника? В ответ записать число, имеющее два знака после запятой без округления

3. Для аварийной сигнализации установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,5. Найти вероятность того, что при аварии сработают два сигнализатора. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

4. Приборы изготавливаются двумя заводами. Первый изготавливает 2/3 всех изделий, второй – 1/3. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом равна 0,9, вторым 0,8. а) Определить полную надежность прибора, поступившего в производство. б) Прибор проработал безотказно. Найти вероятность того, что он изготовлен первым заводом. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления

5. Вероятность выхода за время Т одного конденсатора равна 0,2. Найти вероятность того, что из 100 конденсаторов за время Т выйдет из строя более 12, но менее 26 конденсаторов. Ответ записать с двумя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(1{,}5)=0{,}4332;$ $\Phi(2)=0{,}4772,$ $\Phi(1{,}67)=0{,}4525;$ $\Phi(2{,}7)=0{,}4965.$

Индивидуальное задание № 2 (теория вероятности)

Вариант № 30

1. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?
2. В автобусе 4 пассажира. Найти вероятность того, что на четырех оставшихся до конечной остановках будет выходить по одному человеку, если каждый из пассажиров с равной вероятностью может выйти на любой остановке. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.
3. Для аварийной сигнализации установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,5. Найти вероятность того, что при аварии не сработает ни один сигнализатор. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.
4. Три машины производят болты, причем первая машина производит 30 % всей продукции, вторая машина – 45 % и третья – 25 %. Доля брака в продукции первой машины 4 %, в продукции второй машины – 3 %, в продукции третьей – 5 %. а) Чему равна вероятность того, что наудачу взятый болт окажется дефектным? б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он произведен первой машиной. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с одним знаком после запятой без округления.

5. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,2. Определить вероятность того, что среди 50 наудачу отобранных деталей бракованных окажется не менее 6. Ответ записать с двумя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(14{,}14)=0{,}5;\ \Phi(1{,}41)=0{,}4207, \Phi(0{,}8)=0{,}2881;$

Краткая теория с разобранными примерами

(к индивидуальному заданию 2)

§1. Элементы комбинаторики

Пусть a и b – элементы конечного множества.

Правило 1 (сложения). Если элемент a может быть выбран n_1 способами, а элемент b – n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из элементов (a или b) можно выбрать n_1+n_2 способами.

Правило 2 (умножения). Если элемент a может быть выбран n_1 способами, а элемент b – n_2 способами, то оба элемента (a и b) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Схема выбора без возвращений

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Размещением из n элементов по m элементов $\left(0 \le m \le n\right)$ называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов.
Два размещения различны, если они отличаются друг от друга либо составом элементов либо порядком их расположения, и обозначаются A_n^m.
Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Число перестановок из n элементов обозначается P_n.
Сочетанием из n элементов по m $\left(0 \le m \le n\right)$ называется любое подмножество данного множества, которое содержит m элементов.
Два сочетания различны, если они отличаются хотя бы одним элементом, и обозначаются C_n^m.

Схема выбора с возвращением

Если при упорядоченной выборке m элементов из n элементов возвращаются обратно, то получаем размещения с повторениями. Число всех размещений с повторениями из n элементов по m обозначается $\hat{A}_n^m$.
Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания (то есть одни и те же элементы могут выниматься несколько раз, поэтому повториться), то полученные выборки есть сочетания с повторениями. Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по m обозначается $\hat{C}_n^m$.

Пусть в множестве из n элементов есть m различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй – n_2 раз, …, m-ый – n_m раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$. Тогда перестановки элементов данного множества представляют собой перестановки с повторениями и обозначаются $P_n\left(n_1,...,n_m\right)$
Формулы для вычислений приведены в таблице (первая строка без повторений, вторая с повторениями).

	Размещения	Перестановки	Сочетания
1	$A_n^m = \dfrac{n!}{\left(n-m\right)!}$	$P_n = n!$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$
2	$\hat{A}_n^m = n^m$	$P_n\left(n_1,...,n_m\right) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}$	$\hat{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

Пример 1. В ящике 100 деталей. Известно, что 50 из них – 1 сорта, 20 – 2-го, остальные – 3-го сорта. Сколько существует способов извлечения из ящика одной детали 1-го или 2 -го сорта?
Решение. Деталь 1-го сорта может быть извлечена $n_1 = 50$ способами, 2-го сорта

– $n_2 = 20$ способами. По правилу суммы существует $n_1 + n_2 = 50 + 20 = = 70$ способов извлечения одной детали первого или второго сорта.

Пример 2. Порядок вступления 12 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?
Решение. Каждый вариант отличается только порядком участников, т.е. перестановкой

$$P_{12} = 12! = 479001600.$$

Пример 3. Сколькими способами можно переставить буквы в слове ЛИМПОПО?
Решение. Букв всего 7, но среди них 2 буквы О и 2 буквы П, поэтому вычисляем по формуле перестановок с повторениями

$$P_7(2,2) = \frac{7!}{2!2!} = 1260.$$

Пример 4. В магазине есть 7 видов тортов. Сколькими способами можно составить набор, содержащий три торта?
Решение. Имеем выборку с повторением из 7 элементов по 3, причем важен только состав.

$$\hat{C}_7^3 = C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84.$$

Пример 5. Пять человек вошли в лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?
Решение. Каждый из 5 пассажиров может выйти на любом из 8 этажей. Имеем выборку с повторением, где важен и порядок и состав. Итак,

$$\hat{A}_8^5 = 8^5.$$

Пример 6. В отборочных соревнованиях принимают участие 10 человек, из которых в финал выходят трое. Сколько может быть различных троек финалистов?
Решение. Имеем выборку без повторения из 10 элементов по 7, в которой важен только состав. То есть

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120.$$

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Дальневосточный государственный университет

Г. И. Батурин

МАТЕМАТИКА
для студентов нематематических специальностей высших учебных заведений
(издание второе, переработанное и дополненное)

Учебное пособие

Рекомендовано Дальневосточным региональным учебно-методическим центром (УМО)»

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2006

ББК 22.11
Б 28

Рецензенты: Г.К. Пак – заведующий кафедрой алгебры и логики ДВГУ, к.ф.-м.н.;
А.А. Степанова – профессор кафедры алгебры и логики ДВГУ, д.ф.-м.н.

Содержание пособия

Следующие учебные пособия есть в библиотеке ДВФУ и на кафедре

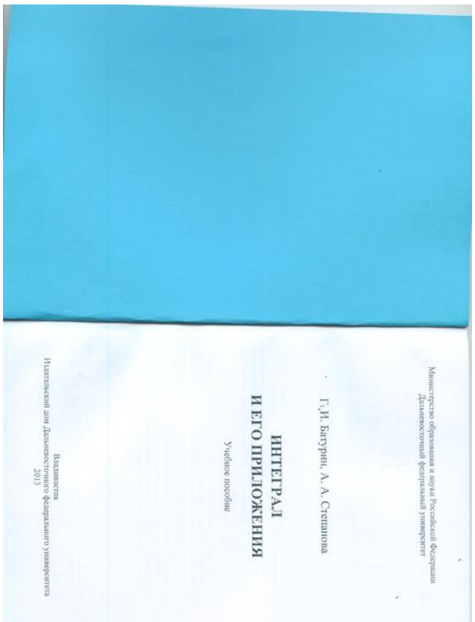
Министерство образования и науки Российской Федерации
Дальневосточный федеральный университет

Г. И. Батурин, С. Г. Чеканов

Производная и ее приложения

Учебное пособие

Владивосток
Издательский дом Дальневосточного федерального университета
2013



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Математика»
Направление подготовки 04.03.01 «Химия»
Профиль «Фундаментальная химия»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

Паспорт фонда оценочных средств
По дисциплине «Математика»

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**	
ОПК-3 Способность использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности **(ОПК-3)**	Знает	основные понятия и инструменты алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики; основные законы естественнонаучных (математических) дисциплин и их роль в профессиональной деятельности.
	Умеет	применять полученные знания для решения математических задач, использовать математический язык и символику при построении моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные. применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.
	Владеет	Математическими и количественными методами решения химических, научных и производственных задач в профессиональной деятельности.

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства - наименование	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Определители 2-го и 3-го порядка. Действия над определителями. Системы линейных неоднородных уравнений. Матрицы.	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы №5,8,10,11.
			умеет	Решение задач по изучаемой теме на практических занятиях(ПР-2)	Экзам вопросы №16,17,21,26,27,31
			владеет	Выполнение к/р на 4 неделе (ПР-2)	Экзам вопросы№20,21,37,41,45,47
2	Векторная алгебра. Действия над векторами. Прямая на плоскости	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№1,3,6,7,9,14.
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№28,29,32,33,34,35,46,51,52
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача	Экзам вопросы№15,18,19,23,25.

				индивидуальных домашних заданий на 5 неделе. Срок сдачи 6 неделя) (ПР-2).	
3	Кривые второго порядка	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№2,4,12,22.
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№24,30,36,
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача индивидуальных домашних заданий на 7 неделе). Срок сдачи8 неделя. (ПР-2).	Экзам вопросы№42,43,50.
4	Предел функции. Предел переменной	ОПК-**3**	знает	Собеседование (УО-1)	Экзам вопросы№54,55,56,57
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№58,59,60,61,62.
			владеет	Выполнение к/р на 10 неделе. (ПР-2).	Экзам вопросы№63,66,67.
5	Производная функции	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№64,65
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзвопросы №66.
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача индивидуальных домашних заданий на 12 неделе). Срок сдачи 13 неделя (ПР-2).	Экзам вопросы№68,69,70.
6	Первообразная	ОПК-**3**	знает	Собеседование	Экзам

	функции. Неопределенный интеграл			(Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	вопросы№71,72
			умеет	Собеседование (УО-1)	Экзам вопросы№74,75
			владеет		Экзам вопросы№75.
7	Неопределенный интеграл. Свойства, методы интегрирования	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№73,75
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№76.
			владеет	Выполнение к/р на 20 неделе. (ПР-2).	Экзам вопросы№76,77
8	Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Функции многих переменных	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№79-84.
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№85-90.
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача индивидуальных домашних заданий на 22 неделе). Срок сдачи 23 неделя. (ПР-2). Тестовый контроль(ПР-1).	Экзам вопросы№91-96.
9	Функции многих переменных. Дифференциальные уравнения. Методы решения	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№97-105
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№106-109
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1) К/р (Сдача индивидуальных домашних заданий	Экзам вопросы№110.

				на 28 неделе). Срок сдачи 29 неделя (ПР-2).	
10	Ряды. Свойства. Применение	**ОПК-3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№111
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№111-112
			владеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№112-113, 114
11	Двойные интегралы	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам вопросы№115-119.
			умеет	Собеседование (УО-1).	Экзам/Зач вопросы№120
			владеет	Контрольная работа по теме «Двойные интегралы (ПР-2).	Экзам /Зач вопросы№121
12	Тройные интегралы	ОПК-**3**	знает	Собеседование (УО-1).	Экзам/Зач вопросы№122
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам /Зач вопросы№123
			владеет	Контрольная работа по теме «Тройные интегралы» (ПР-2).	Экзам/Зач вопросы№124
13	Поверхностные интегралы	ОПК-**3**	знает		Экзам/Зач вопросы№124
			умеет	Собеседование (УО-1).	Экзам/Зач вопросы№124
			владеет	Контрольная работа по теме «Поверхностные интегралы (ПР-2).	Экзам/Зач вопросы№122-124
14	Теория вероятности	ОПК-**3**	знает	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам/Зач вопросы№125-128.
			умеет	Собеседование (Проверка и разбор домашних заданий) (УО-1)	Экзам/Зач вопросы№128-131.
			владеет	Итоговая контрольная	Экзам/Зач

				работа по теме «Теория вероятности» (ПР-2).Тестовый контроль(ПР-1).	вопросы№132-134.

II. Шкала оценивания уровня сформированности компетенций по дисциплине «Математика»

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		Критерии	Показатели
ОПК-3 - Способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.	знает (пороговый уровень)	основные понятия и инструменты алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики; основные законы естественнонаучных (математических) дисциплин и их роль в профессиональной деятельности,	Знать определений, основных понятий алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей; основных законов естественнонаучных (математических) дисциплин и их роли в профессиональной деятельности.	Знание определений основных понятий алгебры, геометрии и математического анализа, теории вероятности, законов естественнонаучных (математических) дисциплин и их роли в профессиональной деятельности.
	умеет (продвинутый)	применять полученные знания для решения математических задач, использовать математический язык и символику при построении моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные. применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментально	Уметь применять полученные знания для решения математических задач, использовать математический язык и символику при построении моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные. применять методы математического анализа и моделирования,	- способность самостоятельно применять доказательство некоторых понятий математики; -способность применять знание для решения математических задач в области химии; - способность обосновать выбранный метод решения.

		го исследования	теоретического и экспериментального исследования	
	владеет (высокий)	Математическими и количественными методами решения химических, научных и производственных задач в профессиональной деятельности.	Владеть математическими и количественными методами решения типовых химических, научных и производственных задач в профессиональной деятельности	способностьуверенно владеть математическими и количественными методами решения типовых химических, научных и производственных задач в профессиональной деятельности; -способность бегло и точно применять терминологический аппарат математики в устных ответах на вопросы и в письменных работах.

1. **Промежуточная аттестация.** Промежуточная аттестация обучающихся по профессиональному модулю в целом осуществляется в форме экзамена (квалификационного) и позволяет определить готовность к выполнению соответствующего вида профессиональной деятельности и обеспечивающих его профессиональных компетенций

Примерный перечень оценочных средств (ОС)

I. Устный опрос

1. Зачет (Средство промежуточного контроля) – Вопросы к зачету.
2. Экзамен (Средство промежуточного контроля) – Вопросы к экзамену.

Вопросы к зачету

1. Определения двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.
2. Основные свойства двойных и тройных интегралов.
3. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.
4. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).
5. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).
6. Замена переменных в двойном интеграле.

7. Якобиан, его геометрический смысл.
8. Двойной интеграл в полярных координатах.
9. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
10. Тройной интеграл в сферических координатах
11. Виды и примеры событий. Алгебра событий
12. Непосредственный расчет вероятностей
13. Вероятность произведения и вероятность суммы событий
14. Формула полной вероятности и формула Байеса
15. Последовательные независимые испытания
16. Дискретные распределения
17. Непрерывные распределения
18. Нормальное распределение
19. Критерий согласия хи-квадрат
20. Построение доверительного интервала

Программа семестровых экзаменов
Экзаменационные вопросы
1 семестр

21. Векторы: определение, равенство, единичные вектора, сложение векторов, умножение вектора на число.
22. Фокальный радиус, эксцентриситет и директрисы гиперболы.
23. Координаты вектора. Свойства координат. Коллинеарность и компланарность векторов.
24. Фокальный параметр. Уравнение эллипса и гиперболы в полярных координатах.
25. Определители 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей.
26. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, угол между векторами.
27. Векторное произведение. Свойства векторного произведения.
28. Правило Крамера. Метод Гаусса.
29. Прямая в пространстве. Способы задания. Угол между прямыми
30. Миноры и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки (столбца).
31. Перемножение матриц. Свойства умножения матриц.
32. Эксцентриситет и фокальные радиусы эллипса.
33. Асимптоты гиперболы. Парабола, вывод уравнения параболы.
34. Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения.
35. Прямая на плоскости, неполные уравнения прямой.

36. Ранг матрицы. Способы вычисления ранга матрицы.

37. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матрицы на число.

38. Плоскость в пространстве. Неполные уравнения плоскости.

39. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

40. Обратная матрица. Решения системы уравнений в матричной форме.

41. Вырожденная матрица, левая и правая обратная матрица, присоединенная или взаимная матрица.

42. Уравнения эллипса ,гиперболы и параболы в полярных координатах.

43. Параметрическое представление линии, уравнение линии в полярных координатах.

44. Вычисление расстояния от директрисы до соответствующего фокуса в случае эллипса и гиперболы.

45. Угол между прямыми, между прямой и плоскостью (для различных видов задания прямой).

46. Линейные операции над матрицами.

47. Свойства ранга матрицы .Элементарные преобразования над матрицами.

48. Базис, свойства базиса (линейная зависимость и независимость)

49. Прямая на плоскости, неполное уравнение прямой, различные способы задания прямой.

50. Вывод канонического уравнения параболы.

51. Методы решения систем линейных неоднородных уравнений (общий обзор)

52. Расстояние от точки до прямой в пространстве

53. Расположение прямой относительно системы координат(на плоскости).Угловой коэффициент, геометрический смысл.

54. Уравнение прямой в нормальной форме. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду.

55. Вектор, определение, модуль, равенство, свойства отношения «равно» векторов.

56. Окружность. Определение, общая теория.

57. Векторное произведение векторов. Свойства, выражение векторного произведения через координаты сомножителей.

58. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Угловые соотношения между прямыми, между прямой и плоскостью.

59. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

60. Коллинеарные и компланарные векторы. Необходимые и достаточные условия. Угол между векторами.

61. Структура общего решения линейной неоднородной системы (случай $r<n$.).

62. Исследование канонического уравнения гиперболы и эллипса.

63. Фокальный параметр эллипса и гиперболы.

64. Вектора. Действие над векторами. Разложение вектора по базису.

65. Линейные операции над матрицами.

66. Вывод общего уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой в отрезках.

67. Решение системы линейных неоднородных уравнений в матричной форме.

68. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

69. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

70. Фокальные радиусы гиперболы.

71. Свойства векторного и смешанного произведения векторов.

72. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.

73. Понятия числа. Числовая ось.

74. Величины постоянные и переменные. Понятие числовой последовательности. Монотонные величины.

75. Определение предела последовательности. Геометрическая интерпретация.

76. Предел последовательности (на примере).

77. Величины бесконечно малые и бесконечно большие. Теорема о сжатой переменной.

78. Предел функции.

79. Основные теоремы о пределах.

80. Ограниченные функции. Теоремы.

81. Функции, стремящиеся к бесконечности.

82. Теоремы о бесконечно малых функциях.

83. Сравнение бесконечно малых функций.

84. Непрерывность функции.

85. Теоремы о непрерывных функциях.

86. Тригонометрические неопределенности. Первый замечательный предел.

87. Раскрытие некоторых типов неопределенностей.

88. Понятие производной функции. Геометрический и физический смысл производной.

89. Производная сложной функции. Производные различных порядков.

90. Дифференциал функции. Дифференциалы различных порядков.

2 семестр

91. Первообразная и неопределенный интеграл: общее определение, основные свойства. Таблица интегралов.

92. Неопределенный интеграл: интегрирование по частям, замена переменной (метод подстановки, теорема).

93. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

94. Некоторые сведения об алгебраических многочленах.

95. Интегрирование рациональных функций (в зависимости от корней знаменателя дроби).

96. Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера.

97. Интегрирование тригонометрических функций (все случаи).

98. Определенный интеграл: задача о вычислении площади криволинейной трапеции, общее определение.

99. Свойства определенного интеграла.

100. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о существовании производной у непрерывной функции по переменному верхнему пределу (с доказательством).

101. Формула Ньютона-Лейбница и ее доказательство для случая непрерывной на отрезке функции.

102. Замена переменных в определенном интеграле (теорема с доказательством), интегрирование по частям для определенного интеграла.

103. Приложения определенного интеграла: вычисление площади если кривая задана параметрически. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах, вывод формулы.

104. Приложения определенного интеграла :длина дуги кривой в прямоугольной системе координат ,если функция задана параметрически , в полярной системе координат. Приложения определенного интеграла: объем тела вращения, площадь поверхности тела вращения.

105. Приложения определенного интеграла: вычисление объема тел по площади параллельных сечений.

106. Приближенное вычисление определенного интеграла: формула трапеций, прямоугольников.

107. Приближенное вычисление определенного интеграла: формула парабол (Симпсона).

108. Несобственный интеграл: несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (I рода), признаки сходимости несобственных интегралов I рода.

109. Несобственный интеграл: несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода), признаки сходимости несобственных интегралов II рода.

110. Функции многих переменных: определение, открытость, заскнутость, ограниченность и т.д. (общая теория).

111. Функции многих переменных: дифференцируемость, частные производные. Отыскание частных производных.

112. Полный дифференциал функции нескольких переменных функции в точке. Дифференцируемость функции многих переменных: необходимое и достаточное условия.

113. Дифференцирование сложной функции (когда $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$).

114. Дифференцирование сложной функции (когда $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$). Частные случаи.

115. Производная функций, заданных неявно.

116. Частные производные различных порядков. Дифференциалы высших порядков.

117. Инвариантность формы дифференциала I-го порядка.

118. Экстремум функции многих переменных: общая теория, необходимое условие экстремума.

119. Экстремум функции многих переменных: общая теория, достаточное условие экстремума.

120. Дифференциальные уравнения: общая теория, задача о движении свободно падающего тела, задача Коши.

121. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения.

122. Дифференциальные линейные уравнения 1-го порядка (оба метода решения).

123. Уравнение Бернулли.

124. Уравнение в полных дифференциалах.

125. Интегрируемый множитель.

126. Приближенные решения дифференциальных уравнений. Метод Эйлера-Коши.

127. Особые точки и особые решения. Виды особых точек.

128. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка, определитель Вронского, общее решение.

129. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (общее решение).

130. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения: отыскание частного решения по виду правой части.

131. Числовые ряды. Сходимость числового ряда, необходимое условие.

132. Функциональные ряды. Признаки сравнения.

133. Ряды Фурье. Формулы отыскания коэффициентов ряда Фурье.

134. Применение рядов для решения дифференциальных уравнений.

3 семестр

135. Определения двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.

136. Основные свойства двойных и тройных интегралов.

137. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.

138. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).

139. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).

140. Замена переменных в двойном интеграле.

141. Якобиан, его геометрический смысл.

142. Двойной интеграл в полярных координатах.

143. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

144. Тройной интеграл в сферических координатах

145. Виды и примеры событий. Алгебра событий

146. Непосредственный расчет вероятностей

147. Вероятность произведения и вероятность суммы событий

148. Формула полной вероятности и формула Байеса

149. Последовательные независимые испытания

150. Дискретные распределения

151. Непрерывные распределения

152. Нормальное распределение

153. Критерий согласия хи-квадрат

154. Построение доверительного интервала

2. Текущая аттестация. Текущий контроль успеваемости осуществляется в ходе повседневной учебной работы по курсу дисциплины, МДК, учебной практики по индивидуальной инициативе преподавателя, мастера производственного обучения.

I. **Устный опрос**

1. Собеседование (УО-1) (Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.) - Вопросы по темам/разделам дисциплины.

Вопросы для собеседования

1 семестр

1. Векторы: определение, равенство, единичные вектора, сложение векторов, умножение вектора на число.
2. Фокальный радиус, эксцентриситет и директрисы гиперболы.
3. Координаты вектора. Свойства координат. Коллинеарность и компланарность векторов.
4. Фокальный параметр. Уравнение эллипса и гиперболы в полярных координатах.
5. Определители 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей.
6. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, угол между векторами.
7. Векторное произведение. Свойства векторного произведения.
8. Правило Крамера. Метод Гаусса.
9. Прямая в пространстве. Способы задания. Угол между прямыми
10. Миноры и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки (столбца).
11. Перемножение матриц. Свойства умножения матриц.
12. Эксцентриситет и фокальные радиусы эллипса.
13. Асимптоты гиперболы. Парабола, вывод уравнения параболы.
14. Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения.
15. Прямая на плоскости, неполные уравнения прямой.
16. Ранг матрицы. Способы вычисления ранга матрицы.
17. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матрицы на число.
18. Плоскость в пространстве. Неполные уравнения плоскости.
19. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
20. Обратная матрица. Решения системы уравнений в матричной форме.
21. Вырожденная матрица, левая и правая обратная матрица, присоединенная или взаимная матрица.

22. Уравнения эллипса ,гиперболы и параболы в полярных координатах.

23. Параметрическое представление линии, уравнение линии в полярных координатах.

24. Вычисление расстояния от директрисы до соответствующего фокуса в случае эллипса и гиперболы.

25. Угол между прямыми, между прямой и плоскостью (для различных видов задания прямой).

26. Линейные операции над матрицами.

27. Свойства ранга матрицы .Элементарные преобразования над матрицами.

28. Базис, свойства базиса (линейная зависимость и независимость)

29. Прямая на плоскости, неполное уравнение прямой, различные способы задания прямой.

30. Вывод канонического уравнения параболы.

31. Методы решения систем линейных неоднородных уравнений (общий обзор)

32. Расстояние от точки до прямой в пространстве

33. Расположение прямой относительно системы координат(на плоскости).Угловой коэффициент, геометрический смысл.

34. Уравнение прямой в нормальной форме. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду.

35. Вектор, определение, модуль, равенство, свойства отношения «равно» векторов.

36. Окружность. Определение, общая теория.

37. Векторное произведение векторов. Свойства, выражение векторного произведения через координаты сомножителей.

38. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Угловые соотношения между прямыми, между прямой и плоскостью.

39. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

40. Коллинеарные и компланарные векторы. Необходимые и достаточные условия. Угол между векторами.

41. Структура общего решения линейной неоднородной системы (случай $r<n$.).

42. Исследование канонического уравнения гиперболы и эллипса.

43. Фокальный параметр эллипса и гиперболы.

44. Вектора. Действие над векторами. Разложение вектора по базису.

45. Линейные операции над матрицами.

46. Вывод общего уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой в отрезках.

47. Решение системы линейных неоднородных уравнений в матричной форме.

48. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

49. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

50. Фокальные радиусы гиперболы.

51. Свойства векторного и смешанного произведения векторов.

52. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.

53. Понятия числа. Числовая ось.

54. Величины постоянные и переменные. Понятие числовой последовательности. Монотонные величины.

55. Определение предела последовательности. Геометрическая интерпретация.

56. Предел последовательности (на примере).

57. Величины бесконечно малые и бесконечно большие. Теорема о сжатой переменной.

58. Предел функции.

59. Основные теоремы о пределах.

60. Ограниченные функции. Теоремы.

61. Функции, стремящиеся к бесконечности.

62. Теоремы о бесконечно малых функциях.

63. Сравнение бесконечно малых функций.

64. Непрерывность функции.

65. Теоремы о непрерывных функциях.

66. Тригонометрические неопределенности. Первый замечательный предел.

67. Раскрытие некоторых типов неопределенностей.

68. Понятие производной функции. Геометрический и физический смысл производной.

69. Производная сложной функции. Производные различных порядков.

70. Дифференциал функции. Дифференциалы различных порядков.

2 семестр

71. Первообразная и неопределенный интеграл: общее определение, основные свойства. Таблица интегралов.

72. Неопределенный интеграл: интегрирование по частям, замена переменной (метод подстановки, теорема).

73. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

74. Некоторые сведения об алгебраических многочленах.

75. Интегрирование рациональных функций (в зависимости от корней знаменателя дроби).

76. Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера.

77. Интегрирование тригонометрических функций (все случаи).

78. Определенный интеграл: задача о вычислении площади криволинейной трапеции, общее определение.

79. Свойства определенного интеграла.

80. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о существовании производной у непрерывной функции по переменному верхнему пределу (с доказательством).

81. Формула Ньютона-Лейбница и ее доказательство для случая непрерывной на отрезке функции.

82. Замена переменных в определенном интеграле (теорема с доказательством), интегрирование по частям для определенного интеграла.

83. Приложения определенного интеграла: вычисление площади если кривая задана параметрически. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах, вывод формулы.
84. Приложения определенного интеграла :длина дуги кривой в прямоугольной системе координат ,если функция задана параметрически , в полярной системе координат. Приложения определенного интеграла: объем тела вращения, площадь поверхности тела вращения.
85. Приложения определенного интеграла: вычисление объема тел по площади параллельных сечений.
86. Приближенное вычисление определенного интеграла: формула трапеций, прямоугольников.
87. Приближенное вычисление определенного интеграла: формула парабол (Симпсона).
88. Несобственный интеграл: несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (I рода), признаки сходимости несобственных интегралов I рода.
89. Несобственный интеграл: несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода), признаки сходимости несобственных интегралов II рода.
90. Функции многих переменных: определение, открытость, заскнутость, ограниченность и т.д. (общая теория).

91. Функции многих переменных: дифференцируемость, частные производные. Отыскание частных производных.
92. Полный дифференциал функции нескольких переменных функции в точке. Дифференцируемость функции многих переменных: необходимое и достаточное условия.
93. Дифференцирование сложной функции (когда $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$).
94. Дифференцирование сложной функции (когда $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$). Частные случаи.
95. Производная функций, заданных неявно.
96. Частные производные различных порядков. Дифференциалы высших порядков.
97. Инвариантность формы дифференциала I-го порядка.
98. Экстремум функции многих переменных: общая теория, необходимое условие экстремума.
99. Экстремум функции многих переменных: общая теория, достаточное условие экстремума.
100. Дифференциальные уравнения: общая теория, задача о движении свободно падающего тела, задача Коши.
101. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения.
102. Дифференциальные линейные уравнения 1-го порядка (оба метода решения).
103. Уравнение Бернулли.
104. Уравнение в полных дифференциалах.
105. Интегрируемый множитель.
106. Приближенные решения дифференциальных уравнений. Метод Эйлера-Коши.
107. Особые точки и особые решения. Виды особых точек.
108. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка, определитель Вронского, общее решение.
109. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (общее решение).
110. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения: отыскание частного решения по виду правой части.
111. Числовые ряды. Сходимость числового ряда, необходимое условие.
112. Функциональные ряды. Признаки сравнения.

113. Ряды Фурье. Формулы отыскания коэффициентов ряда Фурье.
114. Применение рядов для решения дифференциальных уравнений.

3 семестр

115. Определения двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.
116. Основные свойства двойных и тройных интегралов.
117. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.
118. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).
119. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).
120. Замена переменных в двойном интеграле.
121. Якобиан, его геометрический смысл.
122. Двойной интеграл в полярных координатах.
123. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
124. Тройной интеграл в сферических координатах
125. Виды и примеры событий. Алгебра событий
126. Непосредственный расчет вероятностей
127. Вероятность произведения и вероятность суммы событий
128. Формула полной вероятности и формула Байеса
129. Последовательные независимые испытания
130. Дискретные распределения
131. Непрерывные распределения
132. Нормальное распределение
133. Критерий согласия хи-квадрат
134. Построение доверительного интервала

II. Письменные работы

1. Тест (ПР-1) (Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося) - Фонд тестовых заданий.
2. Контрольная работа (ПР-2)(Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу) - Комплект контрольных заданий по вариантам

Задания для тестирования

Тема: Матрицы.

1. A=$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда матрица 2A-3B равна

1)$\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$ 2)* $\begin{pmatrix} -11 & -29 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ 3)$\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ 4)$\begin{pmatrix} -11 & -29 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

2. A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда произведение матриц A·B равно

1)*$\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ 2)$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ 3)$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ 4)$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

3. A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, тогда A^2 равна

1)*$\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ 2)$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$ 3)$\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ 4)$\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$

4. A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, тогда $A^{т}$ равна

1)$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2)$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ 3)$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 4)*$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

5. Матрица $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ называется

1)вырожденной 2)невырожденной 3)*нулевой 4)пустой

6. A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда произведение матриц B·A равно

1)*$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$ 2)$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ 3)$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ 4)$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

7. A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, тогда A^2 равна

1)*$\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2)$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 3)$\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ 4)$\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$

8. A=$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда матрица 2A-3B равна

1) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$ 2)* $\begin{pmatrix} -11 & -23 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$

Тема: Определители.

1. Определитель $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ равен

1)49 2)40 3)59 4)*58

2. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ равен

1)*-17 2)17 3)-13 4)13

3. Для определителей не справедливо свойство:
1)при транспонировании матрицы ее определитель не изменяется
2)определитель квадратной матрицы равен нулю, если у нее есть две одинаковые строки
если все элементы определителя умножить на число m, то определитель умножится на число m
4)определитель равен нулю, если у него есть нулевой столбец

4. Минор M_{23} элемента a_{23} матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ равен

1)*- 4 2)4 3)0 4)5

5. Разложением определителя третьего порядка по первой строке является выражение

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{21}(-1)^{1+2}A_{21} + a_{31}(-1)^{1+3}A_{31}$

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

3)* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13}$

4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} A_{11} + (-1)^{1+2} A_{12} + (-1)^{1+3} A_{13}$

6. Определитель $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен

1)0 2)21 3)*-15 4)15

7. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1)2 2)3 3)4 4)*5

8. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1)2 2)*0 3)1 4)4

9. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1)2 2)*0 3)1 4)4

Тема: Система линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

1. Сумма корней системы $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$ равна

1)9 2)3 3)*17 4)-17

2). Система $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

1)имеет единственное решение
2)*имеет множество решений
3)не имеет решений
4)несовместна

3. Система $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

1)не имеет решений
2)имеет единственное решение
3)несовместна
4)*имеет множество решений

4. Система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ является

1)определенной 2)неопределенной 3)совместной 4)*несовместной

5. Сумма корней системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ равна

1)3   2)*0   3)бесконечность   4)6

6. Базисными переменными системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ могут быть

1)x_1 2)* x_1, x_2 3)x_1, x_2, x_3 4)x_1, x_2, x_3, x_4

7. Сумма корней системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ равна

1)*6   2)4   3)7   4)3

8. Систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ можно решать

1)методом Крамера
2)матричным методом
3)*методом Гаусса
4)методом обратной матрицы

9. Система $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

1)имеет единственное решение

2)имеет множество решений
3)*не имеет решений
4)несовместна

10. Базисными переменными системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ могут быть

1)x_1 2) x_1, x_2 3)*x_1, x_2, x_3 4)x_1, x_2, x_3, x_4

Тема: Системы координат на плоскости и в пространстве. Векторная алгебра.

1. Точка М задана полярными координатами
2. Векторы a=(1; 2; 0), b=(3;-1;1), c=(0;1;1) являются
1)линейно зависимыми
2)*линейно независимыми
3)коллинеарными
4)компланарными
3. Линейно зависимыми являются векторы
1) $\bar{a}(1,3), \bar{b}(3,1)$
2) $\bar{a}(1,3), \bar{b}(3,2)$
3)* $\bar{a}(-6,4), \bar{b}(3,-2)$
4) $\bar{a}(6,4), \bar{b}(3,-2)$
4. Даны векторы $\vec{a}$ = (2; -1; - 2) и $\vec{b}$= (8; - 4; 0), вектор $\vec{c} = 2\vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$, тогда угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ равен

1)*58^0 2)56^0 3)52^0 4)50^0

5. Векторы $\bar{a}_1$=(l, 3, 1, 3), $\bar{a}_2$ =(2, 1, 1, 2) и $\bar{a}_3$ =(3,-1, 1, 1) являются
1)базисными
2)*зависимыми
3)независимыми
4)равными
6. $\vec{a}$ = (5; -1; 6) и $\vec{b}$= (6; 3; -3), тогда проекция вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ равна

1) $\frac{\sqrt{54}}{9}$ 2)* $\frac{9}{\sqrt{54}}$ 3) $\frac{9}{6}$ 4) $\frac{6}{\sqrt{54}}$

7. Вершины пирамиды находятся в точках A(2,3,4), B(4,7,3), C(1,2,2), D(-2,0,-1), тогда площадь грани ABC равна

1) $\sqrt{110}$ 2)10 3) $\frac{2}{\sqrt{110}}$ 4)* $\frac{\sqrt{110}}{2}$

8. Вершины пирамиды находятся в точках A(2,3,4), B(4,7,3), C(1,2,2), D(-2,0,-1), тогда объем пирамиды равен

1)10 2)*11 3)12 4)13

Тема. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Угол между прямыми находится по формуле

1)$\varphi = -\frac{1}{k_2}$ 2)$\varphi = k_2$ 3)*$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ 4)$\varphi = \pi/2$

2. Острый угол между прямыми y = -3x + 7 и y = 2x + 1 равен

1) $\frac{\pi}{3}$ 2)* $\frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{\pi}{12}$ 4) $\frac{\pi}{6}$

3. Уравнение прямой, проходящей через точки M (-1;3); N (2;5) имеет вид

1) $2x + 3y - 11 = 0$

2) $x + 3y + 4 = 0$

3)* $2x - 3y + 11 = 0$

4) $2x - y + 11 = 0$

4. Расстояние от точки M (1,2) до прямой 20x - 21y - 58 = 0 равно

1)3 2) $2\frac{1}{2}$ 3)* $1\frac{1}{2}$ 4) $\frac{80}{29}$

5. Координаты центра окружности $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$

1)(2;1) 2)(-1;-2) 3)*(1;2) 4)(3;0)

6. Радиус окружности $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$

1)2 2)*1 3)3 4)4

7. Уравнение прямой, проходящей через точку M (-2;-5) параллельно прямой 3x + 4y + 2 = 0 имеет вид

1) $3x - 4y + 3 = 0$ 2) $3x + 4y + 14 = 0$ 3)* $3x + 4y + 26 = 0$ 4) $4x + 3y + 26 = 0$

8. Уравнение прямой, проходящей через точку M (-2;-5) перпендикулярно прямой 3x + 4y + 2 = 0 имеет вид

1) $4x + 3y - 7 = 0$ 2)* $4x - 3y - 7 = 0$ 3) $3x - 4y + 7 = 0$ 4) $4x - 3y - 8 = 0$.

9. Кривая $16x^2 + 25y^2 = 9$ является

1)*эллипсом 2)гиперболой 3)параболой 4)окружностью

10. Кривая $3x^2 - y^2 - 12 = 0$ есть

1)эллипс 2)*гипербола 3)парабола 4)окружность

11. Кривая $y^2 = 8x$ есть

1)эллипс 2)гипербола 3)*парабола 4)окружность

12. Кривая $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$ есть

1)эллипс 2)гипербола 3)парабола 4)*окружность

13. Параметрические уравнения эллипса имеют вид

1)x=acost, y=asint

2)*x=acost, y=bsint

3)x=r(t-sint), y=r(1-cost)

4)x=$\frac{a}{\cos t}$, y=btgt

14. Параметрические уравнения окружности имеют вид

1)*x=acost, y=asint

2)x=acost, y=bsint

3)x=r(t-sint), y=r(1-cost)

4)x=$\frac{a}{\cos t}$, y=btgt

Тема: Аналитическая геометрия в пространстве.

1. Плоскость 3x-4y+5z-60=0 отсекает на осях координат «отрезки»

1)*a=20, b=-15, c=12

2)a=10, b=-1, c=12

3)a=20, b=-15, c=1

4)a=30, b=-10 c=12

2. Расстояние от точки M(4,3,6) до плоскости 2x-y-2z-8=0 равно

1)10 2)7 3)*5 4)3

3. Расстояние между плоскостями x+2y-2z-1=0 и x+2y-2z+5=0 равно

1)5 2)4 3)3 4)*2

4. Расстояние между плоскостями 2x+y-2z-1=0 и 2x+y-2z+5=0 равно

1)5 2)4 3)3 4)*2

5. Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость x+2y-2z-1=0 равна

Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость 2x+y-2z-1=0 равна

1)*$\frac{1}{3}$ 2)$\frac{2}{3}$ 3)1 4)2

6. Система уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ определяет

1)три взаимно параллельные плоскости

2)три взаимно перпендикулярные плоскости
3)*три плоскости, пересекающиеся в одной точке
4)три плоскости, пересекающиеся по прямой

7. Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость x+2y-3z-1=0 равна

1)* $\frac{1}{\sqrt{14}}$ 2) $\frac{2}{\sqrt{14}}$ 3)1 4)14

8. Плоскость 3x-4y+5z-120=0 отсекает на осях координат «отрезки»
1)a=20, b=-15, c=12
2)*a=40, b=-30, c=24
3)a=20, b=-15, c=1
4)a=30, b=-10 c=12

9. Расстояние от точки M(4,3,1) до плоскости 2x-y-2z-8=0 равно

1)3 2)5 3)* $\frac{5}{3}$ 4) $-\frac{5}{3}$

10. Плоскость 2x-4y+5z-120=0 отсекает на осях координат «отрезки»
1)a=20, b=-15, c=12
2)a=40, b=30, c=24
3)a=20, b=-15, c=1
4)a=60, b=-30 c=24

11. Расстояние от точки M(4,3,9) до плоскости 2x-y-2z-8=0 равно
1)10 2)*7 3)5 4)3

12. Уравнение плоскости, проходящей через точки A(9,-11,5), B(7,4,-2), C(-7,13,-3) имеет вид
1)*x+2y+4z-7=0 2)x-2y+4z-7=0 3)x+2y-4z-7=0 4)x+2y+4z+7=0

Тема:Пределы

1. Значение предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{6x}$ равно:

а) 0; б) 3; в) $\frac{1}{3}$; г) 1.

2.Значение предела $\lim\limits_{x \to 8} \frac{x(x-8)}{x^2-64}$ равно:

а) -0,5; б) 0,5; в) ∞; г) 0.

3.Значение предела $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1-2x^2+3x}{4-3x+x^2}$ равно:

а) -2; б) $\frac{1}{4}$; в) 0; г) ∞.

Тема:Производная функции

1 Производная функции y= ln(sinx) равна:

1) 1/sinx. 2) 1/cosx. 3) ctgx. 4) tgx. 5) cosx. 6) ln(cosx)

2. Как называется главная, линейная часть приращения функции?

1.производная;

2.дифференциал (dy);

3.функция;

4.бесконечно малая;

5.бесконечно большая.

3. Какие виды неопределенностей можно раскрыть при помощи правила Лопиталя?

1.{0};

2.

3. c·0;

4. c·∞;

5. ∞·∞.

4. Является ли условие y′=0 в т. x=a достаточным условием существования экстремума?

1.да;

2.нет;

3.не всегда;

4.иногда;

5.нет правильного ответа.

5.Производная функции $y = x^2 tgx$ имеет вид:

а) $y' = 2x\frac{1}{\cos^2 x}$;

б) $y' = 2xtgx + x^2\frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $y' = 2x + \frac{1}{\cos^2 x}$;

г) $y' = 2xtgx - x^2\frac{1}{\cos^2 x}$.

6. Вторая производная функции $y = 1 - 2x + 4x^2$ имеет вид:

а) $y'' = -2x + 8$;

б) $y'' = 3$;

в) $y'' = 8$;

г) $y'' = 0$.

7.Абсциссой точки перегиба графика функции $y = 6x^2 - 2x^3 - 3$ является:

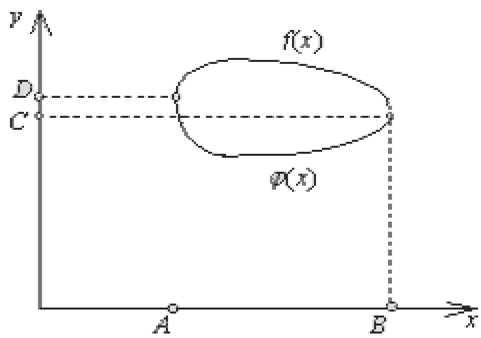
а) -1; б) 0; в) $\frac{3}{2}$; г) 1.

Тема:Теория вероятности

1. В классе20 учеников. Сколько имеется способов выбрать из класса двух дежурных?
1) 380. 2) 20. 3) 40. 4) 190. 5) 200. 6) 400
2. Бросаются два игральных кубика. Вероятность того, что сумма выпавших очков окажется7, равна:
1) 1/7. 2) 0,7. 3) 7/36. 4) 1/6. 5) 2/7. 6) 2/36…

Тема: Интегралы

1. Чему равна площадь фигуры на рисунке?



1. $\int_A^B f(x)dx$

2. $\int_C^D (f(x) - \varphi(x))dx$

3. $\int_A^B f(x)dx - \int_A^B \varphi(x)dx$

4. $\int_C^D f(x)dx - \int_A^B \varphi(x)dx$

5. $\int_A^B f(x)dx - \int_B^A \varphi(x)dx$

2. Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin \alpha x\,dx$$

и выбрать правильный ответ:

1. $\frac{1+3}{\alpha}$

2. $\frac{3}{\alpha^2}$

3. $\frac{1+3\alpha}{\alpha^2}$

4. $\frac{1+3\alpha}{\alpha}$

5. $\frac{1+3}{\alpha^2}$

3. Вычислить интеграл, используя правило замены переменных $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

1. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

4. $\frac{\pi}{3}$

5. $\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}$

4. Не производя вычислений, укажите интеграл, равный нулю.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$

2. $\int_{-a}^{a} x^4 e^{x^2} dx$

5. Чему равен интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^3}$?

1. 1/8

2. интеграл расходится

3. 0

4. 2

5. 1/4

6. Определённый интеграл $\int_{1}^{2} 4x^3 dx$ равен:

а) x^4; б) 15; в) 36; г) 17.

7.Используя свойства определённого интеграла, интеграл $\int_{0}^{2\pi} (\cos(5x-1) + 2x^3)dx$ можно привести к виду:

а) $2\int_{0}^{2\pi} (\cos(5x-1) + x^3)dx$;

б) $\int_{0}^{\pi} \cos(5x-1)dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2x^3 dx$;

в) $\int_{2\pi}^{0} (\cos(5x-1) + 2x^3)dx$;

г) $\int\limits_0^{2\pi}\cos(5x-1)dx+2\int\limits_0^{2\pi}x^3dx$.

Тема: Дифференциальные уравнения

1. Какое из дифференциальных уравнений не является однородным?

1. $\left(xy-y^2\right)dx-\left(x^2-2xy\right)dy=0$

2. $y'=\dfrac{xy-y^2}{x^2-2xy}$

3. $xy'=y$

4. $xy'=y+1$

5. $y'=\dfrac{x^2}{y^2}$

2. Какое из уравнений не является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными?

1. $x(y+1)dx-(x^2+1)ydy=0$;

2. $dy/dx=f_1(x)/f_2(y)$;

3. $dy/y=ctgxdx$;

4. $y'+p(x)y=q(x)$

5. $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{u-u^2}{1-2u}-u\right)$

3. Какой величине пропорциональна скорость радиоактивного распада**?**
1.Массе распавшегося вещества;
2.Общей массе радиоактивного вещества;
3.Массе нераспавшегося вещества;
4.Температуре радиоактивного вещества;

5. Произведению температуры и массы вещества.
4. Какое из дифференциальных уравнений нельзя свести к линейному?

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

2. $dy - \sin x dx = 0$

3. $ydy - dx = 0$

4. $\frac{1}{y}y' = x$

5. $y' = x^2$

Примеры контрольных работ

Контрольная работа № 1 (системы)

Вариант № 1

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

Вариант № 2

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,
методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант № 3

Исследовать и решить систему
по формулам Крамера,
методом Гаусса,

методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 14, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Контрольная работа № 2 (прямая и плоскость)

Вариант № 1

1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси *Oz* и проходящей через точки *A(2; 3; -1)* и *B (-1; 2; 4)*.

2. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x+3y-4z+5=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую *x=3t+1* , *y=2t+3, z= –t–2* параллельно прямой $2x-y+z-3=0, \quad x+2y-z-5=0$.

Вариант № 2

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A(2; -3; 2)* и *B(7; 1; 0)* и параллельной оси *Ox*.

2. Уравнения прямой $\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+3y+z+9=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду и определить углы, образуемые этой прямой с координатными осями.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

Вариант № 3

1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси *Oy* и проходящей через точки *A(2; 1; -2)* и *B(-7; -2; 1)*.

2. Привести к каноническому виду Общие уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 2x+3y-4z+5=0 \end{cases}$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; 2; -3)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}, \qquad \frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

Контрольная работа № 3 (кривые 2-го порядка)

Вариант № 1

1. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$.

2. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями. Изобразить эти линии на чертеже

a) $y = +\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$; b) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$;

c) $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$; d) $y = +\frac{1}{7}\sqrt{49 - x^2}$ /

3. Из точки $C(1;-10)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

4. Составить уравнения касательных к параболе $y^2 = 36x$, проведенных из точки *A(2; 9).*

Вариант № 2

1. Найти множество середины хорд окружности $x^2 + y^2 = 4(y+1)$, проведенных через начало координат.

2. Вычислить расстояние от фокуса $F(c;0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ до односторонней с этим фокусом директрисы.

3. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$, проведенных из точки A(-1; -7).

4. К параболе $y^2 = 2px$ проведена касательная. Доказать, что вершина этой параболы лежит посередине между точкой пересечения касательной с осью *OX* и проекцией точки касания на ось *OX*.

Вариант № 3

1.Составить уравнение касательных к окружности $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, проведенных в точках пересечения окружности с прямой $x - y + 2 = 0$.

2. Через фокус эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{15} = 1$ проведен перпендикуляр к его большой оси. Определить расстояния от точек пересечения этого перпендикуляра с эллипсом до фокусов.

3. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, параллельных прямой $10x - 3y + 9 = 0$.

4. Из точки *A(5; 9)* проведены касательные к параболе $y^2 = 5x$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

Контрольная работа № 4 (производные)

Вариант № 1

найти производные y'_x :

1. $y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$,

2. $y=5tg\frac{x}{5}+tg\frac{\pi}{8}$,

3. $y=\frac{2}{3}arctg\,x+\frac{1}{3}arctg\frac{x}{1-x^2}$,

4. $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$,

5. $y=e^{ax}(a\sin x-\cos x)$,

6. $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=c$,

7. $\begin{cases} x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$

8. $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(в 8 применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 2

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt{1+\sqrt{2px}}$,

2. $y=\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x$,

3. $y=arctg(x^2-3x+2)$,

4. $y=x\cdot e^{1-\cos x}$,

5. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

7. $\begin{cases} x=2t+3t^2, \\ y=t^2+2t^3; \end{cases}$

8. $y=\frac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 3

найти производные y'_x:

1. $y=\sqrt[3]{x^6-8}$,

2. $y=\sin^2\frac{x}{3}\cdot ctg\frac{x}{3}$,

3. $y=\arccos\sqrt{1-3x}$,

4. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$,

5. $y=e^x\cdot(\sin 3x-3\cos 3x)$,

6. $\sin(xy)+\cos(xy)=tg(x+y)$,

7. $\begin{cases} x=\frac{1}{t+1}, \\ y=\left(\frac{t}{t+1}\right)^2; \end{cases}$

8. $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Контрольная работа № 5(Интегралы)

Вариант №1

1. Найти интеграл

$$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int\ln\left(1+x^2\right)dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin x \cdot \sin 3xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Вариант №2

1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \ln\left(1+x^2\right)dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin x \cdot \sin 3xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Вариант №3

1. Найти интеграл

$$\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x^2 e^x \sin xdx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^6 xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{2xdx}{x^2+3x-4}$$

Контрольная работа № 6 (теория вероятности)
Вариант № 1

1. Восемь человек договорились ехать в одном поезде, состоящем из восьми вагонов. Сколькими способами можно распределить этих людей по вагонам, если в каждый вагон сядет по одному человеку
2. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выйдет на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.
3. На железобетонном заводе изготавливают панели, 90 % из которых – высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей будет не более одной панели высшего сорта? Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления
4. Комплектовщик получает для сборки 30 % деталей с завода № 1, 20 % – с завода № 2, остальные – с завода № 3. Вероятность того, что деталь с завода № 1 – высшего качества, равна 0,9, для деталей с завода № 2 – 0,8, для деталей с завода № 3 – 0,6. Найти вероятность того, что: а) случайно взятая деталь – высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе № 2. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления
5. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит 1470 раз. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varphi(0)=0{,}3989,\ \varphi(1)=0{,}2420$.

Критерии оценки знаний умений и навыков при текущей проверке

I. Оценка устных ответов:

Отметка "Отлично"

1. Дан полный и правильный ответ на основе изученных теорий.
2. Материал понят и изучен.
3. Материал изложен в определенной логической последовательности, литературным языком.
4. Ответ самостоятельный.

Отметка "Хорошо"

1, 2, 3, 4 – аналогично отметке "Отлично".

5. Допущены 2-3 несущественные ошибки, исправленные по требованию учителя, наблюдалась "шероховатость" в изложении материала.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Учебный материал, в основном, изложен полно, но при этом

допущены 1-2 существенные ошибки (например, неумение применять законы и теории к объяснению новых фактов).

2. Ответ неполный, хотя и соответствует требуемой глубине, построен несвязно.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Незнание или непонимание большей или наиболее существенной части учебного материала.
2. Допущены существенные ошибки, которые не исправляются после уточняющих вопросов, материал изложен несвязно.

II. Оценка умения решать задачи:

Отметка "Отлично"

1. В решении и объяснении нет ошибок.
2. Ход решения рациональный.
3. Если необходимо, решение произведено несколькими способами.
4. Допущены ошибки по невнимательности (оговорки, описки).

Отметка "Хорошо"

1. Существенных ошибок нет.
2. Допущены 1-2 несущественные ошибки или неполное объяснение, или использование 1 способа при заданных нескольких.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Допущено не более одной существенной ошибки, записи неполны, неточности.
2. Решение выполнено с ошибками в математических расчетах.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Решение осуществлено только с помощью учителя.
2. Допущены существенные ошибки.
3. Решение и объяснение построены не верно.

III. Оценка письменных работ:

Критерии те же. Из оценок за каждый вопрос выводится средняя итоговая оценка за письменную работу.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине «Математика»
Направление подготовки 04.03.01 «Химия»
«Бакалавр»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

ПРОГРАММА КУРСА

1. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

1. Определители второго и третьего порядков. Решение системы линейных уравнений по формулам Крамера. Системы декартовых координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами и их свойства. Проекция вектора на ось, свойства проекций. Понятие о базисе, разложение вектора по базису. Длина и направляющие косинусы вектора. Операции над векторами, заданными в декартовых координатах. Скалярное, векторное и смешанное произведение, их свойства и вычисление в координатной форме.

2. Основные задачи на плоскости. Уравнение линии на плоскости. Различные виды уравнений прямой. Угол между двумя прямыми, взаимное расположение двух прямых, расстояние от точки до прямой. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола. Их канонические уравнения и основные свойства.

3. Понятие об уравнении поверхности и уравнениилинии и точки в пространстве. Основные уравнения плоскости и прямой в пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей, двух прямых, прямой и плоскости. Расстояние от точки до плоскости и до прямой.

Введение в анализ. Дифференциальное исчисление

1. Постоянные и переменные величины. Множества, обозначения и символы теории множеств, числовые множества. Функция и способы ее задания. Простейшие, сложные и элементарные функции.

2. Предел функции в точке и в бесконечности, односторонние пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и ограниченные функции; их основные свойства. Теоремы о функциях, имеющих предел. Неопределенности различных видов. Первый замечательный предел. Основные понятия о числовой последовательности и ее пределе. Второй замечательный предел. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Формулировки основных свойств функций, непрерывных на отрезке. Классификация точек разрыва.

3. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной, уравнение касательной к плоскости кривой. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. Производная сложной функции. Определение и дифференцирование обратной функции. Произ-

водные обратных тригонометрических функций. Формулы и правила дифференцирования элементарных функций.
4. Дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства. Параметрическое задание функции; производная функции, заданной параметрическими уравнениями. Производные и дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления: теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, правило Лопиталя.
5. Исследование функций и построение их графиков.

Функции нескольких переменных

Функции двух и трех переменных, основные понятия и обозначения. Частные приращения и частные производные. Полное приращение и полный дифференциал. Частные производные высших порядков. Экстремум функции двух переменных. Понятие об эмпирических формулах и методе наименьших квадратов.

Интегральное исчисление

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Непосредственное интегрирование, интегрированиезаменой переменной, интегрирование по частям. Специальные приемы интегрирования некоторых триго-нометрических выражений и функций, содержащих квадратный трехчлен.
Интегрирование простейших видов иррациональностей. Понятие о «неберущихся» интегралах и неэлементарных функциях.
2. Определение и основные свойства определенного интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы от непрерывной функции по бесконечному промежутку. Интеграл Пауссона.
3.Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Вычисление площадей плоских фигур, объемов тел вращения и длин дуг плоских кривых.

5.Дифференциальные уравнения

1. Понятие о дифференциальном уравнении, его порядке и решении. Дифференциальные уравнения первого порядка: понятие решения; постановка задачи Коши, ее геометрический и механический смысл; понятия общего и частного решений. Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и линейных уравнений первого порядка.
2. Дифференциальные уравнения второго порядка: понятие решения; постановка задачи Коши, ее геометрический и механический смысл; понятия общего и частного решений. Общие свойства решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Понятие о комплексных числах и комплексных функциях действительного аргумента, формула Эйлера. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные диффе-ренциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами
со специальной правой частью и их решение методом неопределенных ко-эффициентов.

6. Ряды

1. Числовые ряды, основные понятия. Исследование сходимости геометрического и гармонического рядов. Необходимые условия сходи-мости. Основные свойства сходящихся рядов. Достаточные признаки схо-димости рядов с положительными членами: первый признак сравнения, признак Даламбера. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. При-знак Лейбница, оценка остатка сходящегося знакочередующегося ряда. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.
2. Понятие о функциональном ряде. Степенной ряд. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости. Свойства сходящихся степенных рядов. Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд Маклоре-на. Условия сходимости ряда Маклорена к разлагаемой функции. Приме-нение рядов Маклорена к приближенным вычислениям значений функций и к вычислению определенных интегралов.

7. Криволинейные интегралы.

1. Криволинейные интегралы первого рода, вычисление.
2. Криволинейные интегралы второго рода, вычисление, приложения. Независимость криволинейного интеграла от формы пути интегрирования, криволинейный интеграл от полного дифференциала, восстановление функции по полному дифференциалу

.

8. Кратные интегралы.

1 Двойной интеграл, условия существования и свойства. Вычисление двойного
интеграла в декартовой и полярной системах координат.
2 Тройной интеграл, его свойства. Вычисление тройного интеграла в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Приложение
кратных интегралов к решению геометрических, механических и физических задач.
3 Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода, вычисление. Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса.
4 Скалярное поле и его характеристики. Векторное поле. Векторные линии и трубки, их дифференциальные уравнения. Поток векторного поля через открытую и
замкнутую поверхность, его свойства, вычисление.
5 Дивергенция векторного поля, физический смысл, свойства, вычисление. Теорема Остроградского.
6 Ротор векторного поля. Физический смысл, свойства, вычисление. Линейный
интеграл, циркуляция вектора поля по контуру, вычисление. Теорема Стокса.

9. Теория вероятностей

1. Определение события. Случайные, достоверные и невозможные события. Основные операции над событиями. Основные свойства операций над событиями. Определение поля событий. Определение совместимых, несовместимых событий. Определение полной группы событий. Понятие вероятности события. Три аксиомы теории вероятностей. Принцип сложения вероятностей несовместимых событий. Условная вероятность одного случайного события относительного другого события. Принцип умножения вероятностей несовместимых событий. Три следствия из акси-ом теории вероятностей. Классическое и статистическое определение вероятности случайного события. Элементы комбинаторики. Правило суммы и правило произведения. Размещения, перестановки и сочетания. Формулы для их вычисления. Теорема сложения вероятностей совместимых событий. Зависимые и независимые события. Правило умножения вероятностей независимых событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
2. Определение дискретной случайной величины. Закон распределения

дискретной случайной величины. Способы задания дискретной случайной величины. Геометрический закон распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение вероятностей дискретной случайной величины. Формула Бернулли. Распределение Пуассона дискретной случайной величины. Формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа, теорема Пуассона. Определение математического ожидания дискретной случайной величины. Основные свойства математического ожидания. Формула для вычисления. Определение дисперсии дискретной случайной величины. Основные свойства дисперсии. Формула для вычисления. Определение среднего квадратического отклонения.

3. Непрерывные случайные величины. Определение интегральной функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Основные свойства. Определение дифференциальной функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Основные свойства. Определение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения непрерывной случайной величины. Закон равномерного распределения непрерывной случайной величины на отрезке. Показательное распределение непрерывной случайной величины. Нормальный закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Закон больших чисел.

Методические указания к решению задач по теории матриц и определителей .

<u>Прямоугольной матрицей</u> называется совокупность m· n чисел, расположенных в таблице из m строк и n столбцов

$$A_{mn}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Числа $\boldsymbol{a_{ji}}$ **, *i=1,m, j=1,n,*** входящие в данную таблицу, называются матричными элементами, а индексы i и j элемента $\boldsymbol{a_{ji}}$ указывают (соответственно) номера строки и столбца, в которых расположен элемент. Если m=n, то матрица называется квадратной. Квадратная матрица из n строк и n столбцов, называется матрицей n-го порядка. Каждой матрице порядка n ставится в соответствие число, которое называется определителем или детерминантом этой матрицы и обозначается одним из следующих символов

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left| A_n \right| = \det A_n = \Delta_n \qquad (1.1.1)$$

Числа a_{ij} **(*i, j=1,n*)** называются элементами определителя.

Если определитель матрицы равен 0, то матрица называется особенной (вырожденной), а если определитель отличен от 0 - то матрица неособенная (невырожденная).

Квадратная матрица называется <u>симметрической,</u> если $a_{ij} = a_{ji}$,
т.е. равны элементы, симметричные относительно главной диагонали (главная диагональ образована элементами a_{ji} , ***i=1,n***

<u>Диагональной</u> называется матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали равны 0.

<u>Единичная матрица</u> - это диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1. Обозначается единичная матрица буквами Е или I.

Пример 1.1.1.

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ - симметрическая матрица третьего порядка

б) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка

в) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - единичнаяматрица третьего порядка

Две матрицы *A* и *B* называются равными, если они имеют одинаковые размерности и равные соответствующие элементы.

Матрица A^T , полученная из данной матрицы *A* заменой
каждой её строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной относительно *A* . Если матрица *A* имеет размеры m· n, то
матрица A^T имеет размеры n·m.

Пример

а) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $A^T=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 3 & 5 & 2\end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $A^T=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$.

Линейными операциями над матрицами называются операции сложения (вычитания)
и умножения на число. Сложение и вычитание определяется только для матриц одинаковых размеров.

<u>Суммой</u> (разностью) двух матриц $A=\{\boldsymbol{a_{ij}}\}_{mn}$ и $B=\{\boldsymbol{b_{ij}}\}_{mn}$ называется матрица $C=\{\boldsymbol{c_{ij}}\}_{mn}$, для которой $\boldsymbol{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$, $\boldsymbol{i=1,m,\ j=1,n}$.

<u>Произведением</u> матрицы $A=\{\boldsymbol{a_{ij}}\}_{mn}$ на число $\boldsymbol{\alpha}$ называется матрица $\boldsymbol{B=\alpha}\ \{\boldsymbol{a_{ij}}\}_{mn}$ для которой $\boldsymbol{b_{ij} = \alpha\, a_{ij}}$, $\boldsymbol{i=1,m,\ j=1,n}$.

Пример

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 7 & 0\end{bmatrix}$$

Даны матрицы
и число $\boldsymbol{\alpha} = 4$. Вычислить матрицы: C=A+B, *D=A-B, M = a4*

а) $$C=A+B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 7 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 7 & 1 & 11\end{bmatrix};$$

б) $$D=A-B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 7 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 3\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix};$$

в) $$M=4\cdot A=4\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 8\\ 12 & 16 & 4\end{bmatrix}$$

Умножение матриц *A* и B, т.е. получение произведения этих матриц C = AB , возможно лишь в том случае, когда число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B* . Такие матрицы называются согласованными.

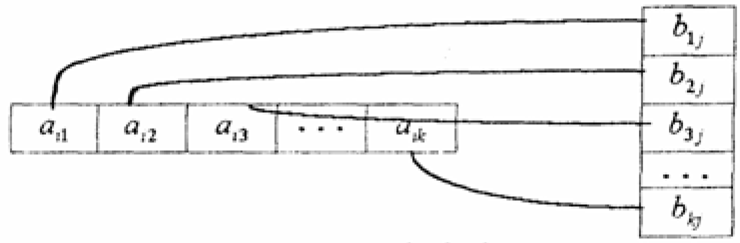


Рис. 1.1.1.

Произведением двух согласованных матриц $A_{mk}=\{\boldsymbol{a_{ij}}\}_{mk}$ и $B_{kn}=\{\boldsymbol{b_{ij}}\}_{kn}$ называется такая третья матрица $C_{mn}=\{\boldsymbol{c_{ij}}$
$\}_{mn}$ для которой каждый элемент $\boldsymbol{c_{ij}}$
, $i=1,m$, $j=1,n$.вычисляется по формуле (рис. 1.1.1.)

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} dpj = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Пример 1.1.4. Вычислить произведение матриц

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{B}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Можно ли получить произведение *BA* ?
Число столбцов матрицы A(3) равно числу строк матрицы *B(3).*
Поэтому произведение *AB*= C определено. Матрица C имеет размерность 2x4, а её элементы вычисляются по формуле (1.1.2)

$$C_{23} = A_{23} \cdot \mathrm{B}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 10 & 8 & 20 \end{bmatrix},$$

$$\text{где} \quad c_{11} = \sum_{p=1}^{3} a_{1p} b_{p1} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = -3;$$

$$c_{12} = \sum_{p=1}^{3} a_{1p} b_{p2} = 1 \cdot (1) + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 3;$$

$$c_{13} = \sum_{p=1}^{3} a_{1p} b_{p3} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 3 \text{ и т.д.}$$

Произведение B·A не определено, т.к. число столбцов матрицы B(4) не равно числу строк матрицы A(2).

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Определителем (1.1.1) матрицы второго порядка называется число

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}+a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}-$$
$$-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число

Студенту следует обратить внимание на правила треугольника и Сильвестра вычисления определителей третьего порядка. Пример 1.1.5. Вычислить определитель

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot3+3\cdot4\cdot(-1)+0\cdot2\cdot1-(-1)\cdot1\cdot1-0\cdot3\cdot3-2\cdot4\cdot2=$$
$$=6-12+1-16=-21$$

<u>Минором</u> M_{ij} ***(i, j=1,n)*** элемента a_{ij} определителя называется определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

<u>Алгебраическим дополнением</u> A_{ij} ***(i, j=1,n)*** элемента a_{ij} определителя называется его минор взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \qquad (1.1.3)$$

Пример 1.1.6. Записать миноры и алгебраические дополнения элементов определителя примера 1.1.5.

$$a_{11}=2;\ M_{11}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-8=-5; \qquad A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-5;$$
$$a2=3;\ M_{12}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}=0-(-4)=-4; \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-4;$$
$$a_{13}=1;\ M_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=0-(-1)=1; \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=1;$$
$$a_{21}=0;\ M_{21}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=9-2=7; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-7;$$

и т.д. Всего можно записать 9 миноров и 9 алгебраических дополнений элементов и определителя матрицы третьего порядка.

<u>Замечание</u> Определители матриц n-го порядка (n =1,2...) короче называют определителями n-го порядка.

Свойства определителей:

1) определитель не изменится, если транспонировать матрицу определителя;

2) при перестановке двух соседних строк (столбцов) определитель меняет знак;

3) определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен 0;

4) общий множитель для элементов строки (столбца) можно вынести за знак

определителя;

5) определитель равен 0 , если все элементы строки (столбца) равны нулю;

6) определитель не изменится, если к элементам строки (столбца), прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель;

7) определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$
$$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Например:

Пример 1.1.7. Вычислить определитель примера 1.1.5., используя свойство 7 определителей (разложение произвести по элементам первого столбца)

По аналогии с формулой (1.1.4) вводятся определители n-го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{ki}, \quad i = \overline{1,n} \qquad (1.1.5)$$

Пример 1.1.8. Используя свойства 1-7 определителей, вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{используя свойство 2} \\ \text{переставим местами} \\ \text{первую и вторую} \\ \text{строки} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{используя свойство 6} \\ \text{в 1-ом столбце элементы} \\ a_{21}, a_{31}, a_{41} \\ \text{сделаем нулевыми} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \text{используя формулу 1.1.5} \\ \text{(свойство 7) разложим} \\ \text{определитель по} \\ \text{элементам столбца} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{дальнейшие преобра-} \\ \text{зования аналогичны} \\ \text{вышеуказанным} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 8 & -1 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -15 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= \left\| \begin{matrix} -7 & -6 \\ -15 & -2 \end{matrix} \right\| = 14 - 90 = 76$$

Матрицей, <u>обратной к матрице</u> *A,* называется квадратная матрица A^{-1}, такая что $A^{-1} A = E$

Если матрица *A* невырожденная **(det A^{1}O)**, то обратная матрица A^{-1} находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

где A_{ij} ($i, j = \overline{1,n}$

1,n) $\overline{1,n}$

$\overline{1,n}$

- алгебраические дополнения элементов a_{ij} (1.1.3)

Пример 1.1.9. Найти матрицу, обратную к данной матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

По формуле (1.1.6) находим (вычисление алгебраических дополнений элементов матрицы A рассмотрено в примере 1.1.6) :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Проверка :

$$A^{-1}A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Студентам рекомендуется провести вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований.

Рангом матрицы A размерности mxn называется наибольший из порядков её миноров, отличных от нуля. Если ранг матрицы A равен r, то это означает, что в матрице A имеется отличный от нуля минор порядка r , но всякий минор порядка большего, чем r**,** равен 0.

Ранг матрицы обозначается $r(A)$.

Свойства ранга матрицы A размерности $m\,´\,n$

1) $0 \le r \le \min(m,n)$;

2) r =0 тогда и только тогда, когда матрица нулевая;

3) для квадратной матрицы n-го порядка r=n тогда и только тогда, когда матрица невырожденная;

4) ранг транспонированной матрицы равен рангу исходной матрицы;

5) ранг матрицы не изменится, если вычеркнуть (дописать) нулевую строку (столбец);

6) ранг матрицы не изменится, если к элементам строки матрицы прибавить элементы другой строки матрицы, предварительно умноженные на некоторое число;
7) ранг матрицы не изменится, если переставить любые строки (столбцы) матрицы.
Пример 1.1.9. Найти ранг матрицы *A*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 9 & -4 & -7 \\ 3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 15 & 5 & -10 \\ 0 & -6 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{разделим элементы} \\ \text{3 - й 4 - й строк на их} \\ \text{общий множитель} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

RgA=2 т.к. имеется отличный от нуля определитель второго порядка,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

например
Студент должен уметь решать системы линейных алгебраических уравнений (в дальнейшем СЛАУ)
1) по формулам Крамера и матричным методом (в случае, когда матрица *A* системы невырожденная) ;
2) произвольные СЛАУ с использованием теоремы Кронекера-Капелли методом Гаусса.
Рассмотрим примеры на применение этих методов.
1) Предположим СЛАУ имеет невырожденную матрицу порядка *n*.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \det A \neq 0,\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{1,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{1,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Правило Крамера. Если главный определитель СЛАУ отличен от нуля ($\Delta \neq O$), то СЛАУ имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_i=\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta},\ i=\overline{1,n} \qquad (1.1.7)$$

<u>Матричный метод.</u> Если матрица СЛАУ невырожденная, то решение СЛАУ может

быть найдено по формуле

$$X = A^{-1}B$$

(1.1.8)

где матрица A^{-1} вычисляется по формуле (1.1.6), либо методом элементарных преобразований.

Пример 1.1.10. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ 3x_1+x_3=2 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}$$

а) по формулам Крамера;

б) методом обратной матрицы

Запишем матрицу системы *A,* матрицу-столбец неизвестных X и матрицу-столбец свободных членов *X :*

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

$$a)\Delta=\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=4;$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 0\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=4;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 3 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5 & 3\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-(20-12)=-8;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-(12-8)=-4;$$

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=4/4=1;\qquad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=-8/4=-2\qquad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=-4/4=-1$$

б)Воспользуемся формулой $X=A^{-1}B$, где матрица A^{-1} вычислена в примере 1.1.9.

$$X=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 4 & -5\\ -3 & 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1+0+3\\ -1+8-15\\ -3+8-9\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\\ -8\\ -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -1\end{bmatrix}$$

$$T.o.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -1\end{bmatrix}\qquad \text{или}\qquad \begin{bmatrix}x_1=1\\ x_2=-2\\ x_3=-1\end{bmatrix}$$

2) Предположим, что матрица СЛАУ имеет размерность mxn. В этом случае СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы A.

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix}$$

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных .алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы.

Для решения произвольных СЛАУ применяется метод Гаусса. Сущность метода состоит в том, что расширенная матрица СЛАУ приводится к ступенчатому виду.

Пример 1.1.11. Решить систему

$$\begin{cases} x_1+7x_2+3x_3+2x_4=6 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+3x_4=4 \\ 7x_1+4x_2+x_3+9x_4=2 \end{cases}$$

В этой системе **m=3** - количество уравнений; **n=4** - количество неизвестных.

Запишем расширенную матрицу системы A и преобразуем ее к ступенчатому виду

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & -4 & -1 & -8 \\ 0 & -45 & -20 & -5 & 40 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 9 & 4 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & 4 & 1 & 8 \\ & & & & \end{array}\right]$$

$Rg\overline{A}=2$, $rgA=2$. По теореме Кронекера-Капелли СЛАУ совместна. Укороченная СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1+7x_2+3x_3+2x_4=6 \\ 9x_2+4x_3+x_4=8 \end{cases}$$

В качестве базисных неизвестных выберем неизвестные x_1 и x_2, а неизвестные, x_3, x_4 примем за свободные, полагая $x_3=C_1$, $x_4=C_2$.

Тогда СЛАУ может быть записана в виде

$$\begin{cases} x_1+7x_2=6-3C_1-2C_2 \\ 9x_2=8-4C_1-C_2 \\ x_3=C_1 \\ x_4=C_2 \end{cases}$$

Откуда находим

$$x_2=\frac{8-4C_1-C_2}{9}$$

$$x_1=6-3C_1-2C_2-\frac{7}{9}(8-4C_1-C_2)=\frac{54-27C_1-18C_2-56+28C_1+7C_2}{9}=\frac{-2+C_1-11C_2}{9}$$

или окончательно получим

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{9} + \frac{C_1}{9} - \frac{11C_2}{9} \\ x_2 = \frac{8}{9} + \frac{4C_1}{9} - \frac{C_2}{9}, \qquad C_1, C_2 \in R \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$$

Пример 1.1.12. Решить систему

$x_1+2x_2-3x_3+x_4=-4$

$2x_1-x_2+x_3-x_4=2$

$-x_1+3x_2-x_3+3x_4=0$

$2x_1+4x_2-3x_3+2x_4=3$

Система линейных алгебраических уравнений несовместна.

Замечание. Однородные СЛАУ всегда совместны, т.к. ранги расширенной матрицы системы и матрицы системы совпадают.

Вопросы для самопроверки

1. Какие матрицы называются равными?
2. В каких случаях возможно перемножение двух матриц ?
3. В каких случаях существуют произведения как AB так и BA?
4. Что называется минором и алгебраическим дополнением элементов матрицы ? В чем отличие между ними ?
5. Сформулируйте правило Крамера.
6. Как осуществляется транспонирование матрицы ?
7. В чем суть метода элементарных преобразований получения обратной матрицы ?
8. Что такое ранг матрицы ?
9. Что такое основная и расширенная матрицы системы ?
10. Сформулируйте и поясните на примерах теорему Кронекера-Капелли

. Методические указания к решению задач векторной алгебре

Для отвлеченного изображения конкретных векторных величин используются векторы. Вектором (геометрическим) называется направленный отрезок прямой. Два вектора называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину

. Положение начальной точки таких векторов не играет никакой роли. Поэтому геометрические векторы называются свободными.

При изучении темы «Векторная алгебра» студенту следует обратить внимание на ниже рассмотренные вопросы.

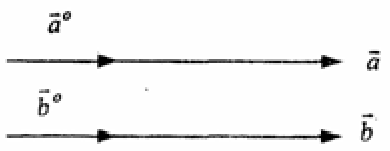
1. <u>Линейные операции над векторами</u> (сложение, вычитание, умножение на число). Векторы необходимо уметь складывать как по правилу треугольника, так и по правилу параллелограмма.

2. <u>Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Базисные векторы. Декартов базис.</u>

Пример 1.2.1. Указать при каких значениях α и β возможно равенство

$\boldsymbol{\alpha a + \beta b = 0}$, где $a°$ и $b°$ единичные векторы

($a^0=a\,/\,|a|$, $b^0=b\,/\,|b|$). Для решения приведенной задачи необходимо рассмотреть возможное расположение векторов a и b :



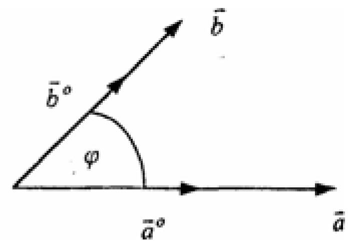


Рис .1.2.1 Рис .1.2.2

Рис .1.2.3

a) векторы a и b **сонаправлены (Рис. 1.2.1), тогда α=-β**;

b) векторы a и b имеют противоположное направление (рис.1.2.2). В этом случае **α=β** ;

c) векторы a и b образуют между собой угол φ. При этом угол φ отличен от 0 и π радиан (рис.1.2.3). Приведенное в условии равенство возможно лишь при α=β=0.

Рассмотренный пример дает представление о линейной зависимости и независимости векторов (важнейшее положение темы «Векторная алгебра»).

Линейной комбинацией n векторов x_i (i=1,n) называется сумма произведений этих векторов на действительные числа a_i (i=1,n), а именно

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

(В рассмотренном примере записана линейная комбинация 2^x единичных векторов $a°$ и b°) .

Векторы x_i (i=l,n) называются линейно-зависимыми, если их линейная комбинация (1.2.1) равна нулю, а среди коэффициентов a_i (i=l,n) имеется хотя бы один отличный от нуля. На рис. 1. 2 .1-1. 2 . 2 изображены два линейно зависимых вектора. Они могут быть расположены на одной

прямой, либо на параллельных прямых.
Два вектора, расположенные на одной либо на двух параллельных прямых, называются
<u>коллинеарными</u>.
Условие коллинеарности векторов $a = \lambda b$ *, где* λ*ÎR.*
Если три вектора расположены в одной либо в параллельных плоскостях, то они называются <u>компланарными</u>.
Компланарные векторы линейно зависимы. Необходимое и достаточное условие - компланарности векторов:
$c = \alpha a+\beta b$.
Векторы x_i (i=l,n) называются линейно-независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации (1.2.1) возможно лишь в том случае, когда коэффициенты a_i(i=l,n) одновременно равны 0.
Случай двух линейно-независимых векторов представлен на рис. 1.2.3 (линейная комбинация $\alpha a+\beta b$ равна нулю лишь при одновременном обращении в ноль α и β) .
Пример 1.2.2. Векторы *a,b,c* некомпланарны (линейно независимы).
Доказать, что векторы $m=a+2b-c$, $n=3a-b+c$ и $p=a+5b-3c$ компланарны и найти их линейную зависимость.
Приравняем к нулю линейную комбинацию векторов *m,n,p* ($\alpha m+ \beta n+\gamma k = 0$) и подставим в равенство разложения векторов *m,n,p* по векторам *a, b,c* .

$$\alpha(a+ 2b- c)+\beta(3a- b+ c)+\gamma(-a+5b-3c)=(\alpha+3\beta - \gamma)a+(2 \alpha - \beta+5 \gamma)b+(- \alpha+ \beta-3 \gamma)c=0$$

Равенство нулю линейной комбинации векторов *a,b,c* возможно лишь в том случае, когда коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Из этого условия получаем систему линейных алгебраических уравнений, которую решим методом Гауса
(пример 1.1.11)

$$\begin{cases}\alpha+3\beta-\gamma=0\\ 2\alpha-\beta+5\gamma=0\\ -\alpha+\beta-3\gamma=0\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&5\\-1&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-7&7\\0&4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

$$rgA=2;\begin{cases}\alpha=3\beta=\gamma\\ -\beta=-\gamma\\ \gamma=C\end{cases};\begin{cases}\alpha=-2C\\ \beta=C\\ \gamma=C\end{cases},C\in R$$

Коэффициенты равной нулю линейной комбинации векторов *m,n,p* могут быть отличны от нуля, следовательно векторы *m,n,p* линейно зависимы

(компланарны). Подставляя α, β, γ в равенство
$\alpha m+\beta n+\gamma p=0$ и сокращая на С, получим $-2m+ n+k = 0$.
С понятием линейной независимости векторов тесно связано такое фундаментальное
понятие как <u>базис</u>.
Базисом на плоскости Q называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов, параллельных плоскости Q. Любой вектор с,
параллельный плоскости Q, можно представить в виде $c= \alpha a+ \beta b$.
Базисом в трехмерном пространстве называется любая упорядоченная тройка некомпланарных (линейно-независимых) векторов. Если a,b,c- базис в пространстве, то любой вектор d пространства можно единственным образом разложить по этому базису по формуле:

$$d= \alpha a+ \beta b+\gamma c$$

Декартовым базисом на плоскости (рмс 1.2.4) называются два единичных, взаимно-перпендикулярных вектора i и j ($|i| = |j| =1$,
i^j), совпадающих с положительным направлением осей ОХ и ОУ соответственно.

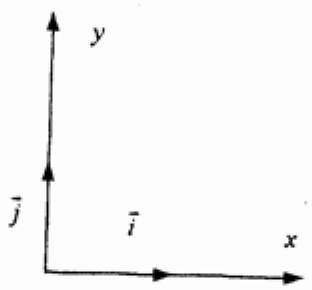


рис.1.2.4

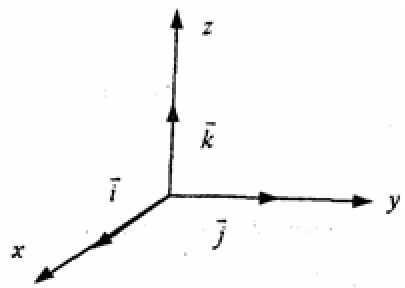


рис.1.2.5

Любой вектор плоскости a может быть единственным образом представлен в виде $a=a_x i+a_y j$, где числа a_x
и a_y называются координатами вектора a .
Декартовым базисом в пространстве (рис.1.2.5.) называются три единичных взаимноперпендикулярных вектора i,j,k, совпадающих с положительным направлением осей OX,OY и OZ соответственно. Любой вектор a может быть единственным образом представлен в виде

$$a=a_x i+a_y+a_z k$$, где числа a_x
, a_y , a_z называются координатами вектора a.
Если вектор $a=AB$ задается координатами начальной точки $A(x_a$
, $y_a, z_a)$ и конечной $B(x_b, y$
$_b, z_b)$, то его координаты имеют вид:

$$a=(x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a).$$

Два вектора a и b равны в том и только в том случае, когда

координаты их равны, т.е. $a_x=b_x$, $a_y=b$
$_y$, $a_z=b_z$.

3.<u>Скалярное произведение векторов</u>. Скалярным произведением векторов a и b называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$a\ b=|a||b|\cos(a,b)$
(1.2.2)

Из формулы (1.2.2) для ненулевых векторов можно вычислить косинус угла между векторами

$$\cos(a,b)=\frac{ab}{|a||b|} \qquad (1.2.3)$$

Длина вектора $|a|$ определяется по формуле

$|a|=\sqrt{aa}$
(1.2.4)

Из свойств скалярного произведения следует обратить внимание на коммутативный (перестановочный) закон $ab=ba$.

Пример 1.2.3. Вычислить угол между векторами a и b, если $a=2m+3n$, $b=m-2n$, $|m|=2$, $|n|=3$, $(m,n)=\pi/3$. Угол между векторами вычисляется по формуле (1.2.3).

$(2m+3n)(m-2n)=2mm-4-mn+3nm-6nn=2mm-mn-6nn=2\cdot2\cdot3\cdot\cos0-2\cdot3\cdot\cos(\pi/3)--6\cdot3\cdot3\cdot\cos0=12-3-54=-45;$

$$|a|=\sqrt{aa}=\sqrt{(2m+3n)^2}=\sqrt{4m^2+12mn+9n^2}=\sqrt{4\cdot4+12\cdot6\cdot\tfrac{1}{2}+9\cdot9}=\sqrt{133};$$
$$|b|=\sqrt{bb}=\sqrt{(m-2n)^2}=\sqrt{m^2-4mn+4n^2}=\sqrt{4-4\cdot6\cdot\tfrac{1}{2}+4\cdot9}=\sqrt{28};$$
$$\text{Таким образом,}\cos(ab)=\frac{-45}{\sqrt{28\cdot133}}=\frac{-45}{\sqrt{4724}};(ab)=\pi-\arccos\left(45/\sqrt{4724}\right).$$

Предположим в пространстве задан декартов базис $\{\ i,\ j,\ k\ \}$ и два вектора

$a=a_x\,i+a_y\,j+a_z\,k$, $b=b_x\,i+b_y\,j+b_z\,k$.

В декартовом базисе скалярное произведение векторов и длина вектора вычисляются по формулам:

$a\ b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb$
$_z$
(1.2.5)

$$|a|=\sqrt{aa}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \qquad (1.2.6)$$

Условие перпендикулярности векторов: ab=0 или

$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
$=0$
(1.2.7)
Условие коллинеарности векторов:

$a=\lambda b$ или $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$
(1.2.8)

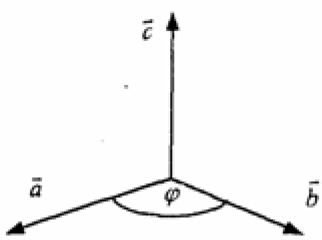
Пример 1.2.4. При каком значении α векторы $a(2,3,4)$ и $b(3, \alpha,-1)$ перпендикулярны?
Используя (1.2.7), имеем $ab=6+3\alpha -4=0$ или $3\alpha =-2$, $\alpha =-2/3$
Пример1.2.5.При каких значениях α и β векторы $a(2,4, \alpha)$ и $b(4,\beta,1)$коллинеарны?
Используя условие коллинеарности векторов (1.2.8), имеем: $2/4=4/\beta=\alpha/1$. Откуда $4/\beta =1/2$ или $\alpha/1=1/2$, $\beta = 8$, а $\alpha =1/2$
Пример 1.2. 6. Найти вектор b, коллинеарный вектору $a(1,-2,-2)$ образующий с ортом j острый угол и имеющий длину $|b| =15$.
Пусть вектор b имеет координаты b_x, b_y, b_z, Из условия коллинеарности (1.2.8) имеем $b = \lambda a$ или $b_x = \lambda a_x = \lambda$, $b_y = \lambda a_y =-2\lambda$, $b_z= \lambda a_z=-2\lambda$.
По формуле (1.2.6) вычисляем

$$|b|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}=\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda^2}=\sqrt{9\lambda^2}=3|\lambda|=15.$$

Откуда $|\lambda|=5$ или $\lambda=\pm5$. Получаем два вектора b; b_1 (5,-10,-10) и b_2 (-5,10,10). Так угол между вектором b и ортом j острый, то $\cos(b,j)>0$ и координата $b_y >0$. Поэтому в качестве вектора b выбираем вектор b_2 т.е. $b =-5\, i+10\, j+10k$.

4. Векторное произведение векторов.

Необходимо обратить внимание студентов на определение правой и левой троек векторов (рис.1.2.6 и 1.2.7).



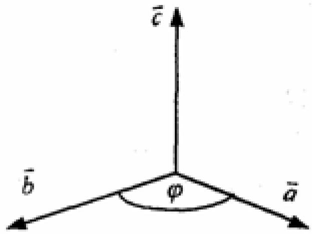


Рис.1.2.6

Рис.1.2.7

Тройка некомпланарных векторов *a,b,c* называется правой (рис.1.2.6) или левой (рис.1.2.7), если будучи приведены к общему началу, эти векторы располагаются так, как могут быть расположены соответственно большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

Векторным произведением векторов *a* и *b* называется вектор *c,* который обозначается символом *c=a´b* и удовлетворяет следующим трем условиям:

1) вектор *c* перпендикулярен плоскости векторов *a* и *b;*

2)образует с векторами *a и b* правую тройку;

3)длина вектора *c* численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах *a* и *b,* т.е.

|c|= |*a*| ×|*b*|sin(*a b*)

(1.2.9)

Из свойств векторного произведения следует обратить внимание на антикоммутативность, т.е. *a´b=-b´a*

Пример 1. 2.7. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах *a=2m+n* и *b = m- n ,* если |*m*|=2, |n|=1, (m,n)= π/6

Вычислим векторное произведение векторов *a*, и *b* и воспользуемся формулой (1.2.9)

*a´b =(2m+ n)-(m- n)= 2m´m- 2m´n+n´*m-*n´n =0-3m´*n*-0=-3m´n*

$$S_{пар} = \frac{1}{2}|\,a \times b\,| = \frac{3}{2}\,2\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\,(ед^2)$$

$$S_{тр} = \frac{1}{2}S_{пар} = \frac{3}{4}\,(ед^2)$$

В декартовом базисе { *i,j,k*} векторное произведение векторов $a(a_x,a_y,a_z)$ и $b(b_x, b_y, b_z)$ вычисляется по формуле

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1.2.10)}$$

Пример1.2.8. Найти координаты вектора $b=(b_x,b_y,b_z)$, если он перпендикулярен векторам a_1 (2,-3,1) и a_2 (1,-2,3) и удовлетворяет условию;

b(i +2j-7k) = 10.

Вектор *b* перпендикулярен векторам a_1 и a_2. Поэтому его можно искать в виде:

$$b = \lambda(a_1 \times a_1) = \lambda\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \lambda(-7i - 5j - k); b = -7\lambda i - 5\lambda j - \lambda k$$

Удовлетворим условию $b(i + 2j - 7k) = 10$; $-7\lambda - 10\lambda + 7\lambda = 10$; $-10\lambda = 10$, $\lambda = -1$.

Таким образом вектор имеет вид: $b = 7i + 5j + k$.

Пример 1.2.9.Вычислить площадь треугольника, вершины которого расположены в точках A(1,2,3), B(2,1,-1), C(3,-1,1).

$S_{\Delta ABC} = 1/2\ |AB \times AC|$.Вычислим координаты векторов AB и AC и векторное произведение $AB'AC$.

$$AB = AB(1,-1,-4); AC = AC(2,-3,-2); AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -10i - 6j - k;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 6^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{137}\ (ed^2)$$

5.Смешанное произведение трех векторов.

Смешанным произведением трех векторов *a,b,c* называется число, которое обозначается символом $a \times b \cdot c$ (смешанное произведение иногда называют векторно-скалярным).

Если векторы *a,b,c* некомпланарны, то смешанное произведение $a\,'b \cdot c$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах *a,b,c,* взятому со знаком "+", если упорядоченная тройка векторов *a,b,c* -правая, и со знаком "-", если эта тройка - левая.

Из свойств смешанного произведения трех векторов следует отметить следующие:

1)при круговой перестановке векторов смешанное произведение не меняется, т.е. $(a \times b) \times c = (c \times a) \times b = (b \times c) \times a$;

2)если в смешанном произведении поменять местами два соседних сомножителя, то произведение изменит знак, т.е. $(a \times b) \times c = -(a \times c) \times b$;

3) смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны, т.е. условием компланарности векторов является равенство нулю смешанного произведения этих векторов.

Смешанное произведение векторов в декартовом базисе $\{i,j,k\}$.Если $a(a_x, a_y, a_z)$, $b(b_x, b_y, b_z,)$ и $c(c_x, c_y, c_z)$, то

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1.2.11)}$$

Условие компланарности векторов $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$ (1.2.12)

Наиболее распространенные задачи, решаемые при помощи смешанного произведения:

1)найти объем параллелепипеда, построенного на векторах *a,b,c:*

V = |*a* x *b*× *c*|**,**

2) найти объем тетраэдра, построенного на векторах *a,b,c:*

V=1/6 (|*a* x *b*× *c*|*)*

3) проверить компланарны ли векторы *a,b,c,* если *a* x *b*× *c=0,* то векторы компланарны, если *a* x *b*× *c¹ 0,* то векторы некомпланарны;

4)проверить правую или левую тройку образуют векторы *a,b,c,*

>0 -тройка векторов - правая ,

a x *b*× *c*=.

<0 - тройка векторов левая.

Замечание: смешанное произведение векторов *a,b,c,* как правило, записывают в виде *a*× *b*× *c* .

Пример1.2.10. Вычислить длину высоты тетраэдра *ABCD*, проведенную из вершины *D* к основанию *ABC,* если вершины тетраэдра имеют координаты:

A (1,2,0), B(2,1,1), C(0,-3,-1), D(3,3,4). Найдем координаты векторов, выходящих из вершины *A:*

AB(1,-1,1), AC(-1,-5,-1), AD(2,1,4), $V_{тетр}$=1/6(|*AB*×*AC*×*AD*|); $V_{тетр}$ =1/3(S_{DABC}×H_D);

S_{DABC}=1/2 (|AB´AC|); $H_D = \dfrac{3V}{S_{\Delta ABC}}$. Отсюда

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left| -6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right| = 2(ед^3)$$

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 6i - 6k; S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}6\sqrt{1+1} = 3\sqrt{2}(ед^2)$$

$$H_D = \frac{3\cdot 2}{3\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}(ед)$$

Вопросы для самопроверки

1.Сформулируйте правила треугольника и параллелограма сложения векторов.

2.Укажите принципиальное различие в формулах для вычисления длины вектора в произвольном и декартовом базисах.
3. Чему равно скалярное произведение базисных векторов в декартовом базисе?
4.Чему равно векторное произведение базисных векторов в декартовом базисе?
5.Запишите условие компланарности векторов. Приведите пример.
6.Можно ли построить треугольник на векторах *a,b,a+b* ?
7.Приведите пример условия, при выполнении которого из трех векторов *a, b,c* можно образовать треугольник.

8. Докажите, что объем тетраэдра вычисляется по формуле V=$\frac{1}{6}$| $a\times b\times c$|
9. Вычислите угол между векторами, совпадающими со скрещивающимися ребрами тетраэдра.
10.Как Вы считаете, произведение векторов axbxc
(двойное векторное) является векторной величиной или скалярной?

. Методические указания к решению задач по аналитической геометрии,

При изучении аналитической геометрии в пространстве возникают затруднения, связанные с недостаточностью пространственных представлений. В таких случаях полезно пользоваться пространственными моделями (тетрадь-плоскость; карандаш, ручка-прямая, отрезок прямой) и использовать их при разборе теоретического материала наравне с рисунками, приведенных в задачниках.

Различные виды уравнения плоскости

1.Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0$ $,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору n(A,B,C) :
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
(1.3.1)
Пример 1.3.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 2, 3), перпендикулярно вектору n(2,-1,4). Используя уравнение (1.3.1), получим 2(x-l)-l(y-2)+4(z-3)=0 или 2x-y+4z-l2-0.
Пример 1. 3 . 2.Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1,2,3) пареллельно векторам *a*(3,-1.,0) и *b*(2,l,2).
Плоскость пареллельна векторам *a* и *b*, поэтому вектор нормали к плоскости n(A,B,C) равен векторному произведению векторов)
a и *b* и находится по формуле (1.2.10):

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 6j + 5k$$

Уравнение искомой плоскости (1.3.1) имеет вид

-2(x-l)-6(y-2)+5(z-3)=0 или -2x-6y+5z-l=0 .

2.Общее уравнение плоскости:

Ax+By+Cz+D=0

(1.3.2)

В этом уравнении коэффициенты *A, B,C* -координаты вектора *n(A,B,C)* перпендикулярного плоскости.

3.Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Числа *a,b,c* равны величинам направленных отрезков, отсекаемых на осях координат.

4.Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1$

$,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2$

$)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не

лежащие на одной прямой

Пример 1.3.3.Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки ***M_1(1,2,3), M_2(-1,1,1) , M_3(0,2,1) .***

В соответствии с уравнением (1.3.4) получаем

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(x-1) - 2(y-2) - (z-3) = 2x - 2y - z + 5 = 0$$

т.е. *2x-2y-z+5=0*

и есть уравнение искомой плоскости.

Различные видах уравнений прямой в пространстве

1.Общее уравнение прямой $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (1.3.5)

Прямая задана пересечением двух плоскостей с нормалями $n_1(A_1, B_1, C_1)$ и $n_2(A_2, B_2, C_2)$

2.Канонические (стандартные) уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) и имеющей направляющий вектор *a(m,n,p)*

Пример 1.3.4.Перейти от общих уравнений прямой

2x+3y-z+2=0
x-y-3z+6=0 к каноническим уравнениям. Прежде всего выберем какую-нибудь точку M_0, например M_0 (0,0,2), удовлетворяющую общим уравнениям прямой. Если сразу не удается подобрать координаты точки M_0, то эту точку можно найти из решения системы линейных уравнений (см. пример 1.1.11), которой задаются общие уравнения прямой.

Направляющий вектор прямой *a* может быть выбран в виде $a=n_1 x n_2$ (см. 1.3.5), где $n_1(2,3,-1)$ и $n_2(1,-1,-3)$ -нормальные векторы к плоскостям, пересечением которых и задается прямая

$$a=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -5i+5j-5k$$

'Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x}{-5}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{-5} \qquad \text{или} \qquad \frac{x}{-1}=y=\frac{z-2}{-1}$$

3. Параметрические уравнения прямой

$$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + pt,\ z = z_0 + ut,$$
$$t \in R \qquad (1.3.7)$$

Пример 1.3.5.В примере 1.3.4 от канонических уравнений прямой перейти к параметрическим уравнениям.

Ряд равных отношений в канонических уравнениях прямой примера 1.3.4 приравняем к t:

$$t=\frac{x}{-1}=y=\frac{z-2}{-1}$$

Откуда получим параметрические уравнения $x=-t$, $y=t$, $z=2-t$, $t \in R$.

4.Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (1.3.8)$$

Замечание. В уравнениях прямой (1.3.6) и (1.3.8) допускаете равенство нулю одной или двух координат вектора ***a(m,n,p).*** В этом случае нуль в знаменателе воспринимается только лишь как информация о координатах вектора *a* .

Задачи, относящиеся к плоскостям

Пусть заданы две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

1.Взаимное расположение двух плоскостей:

а)условие перпендикулярности плоскостей:

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$
$=0$
(1.3.9)
б)условие параллельности плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (1.3.10)$$

$$\cos\varphi=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (1.3.11)$$

2.Угол между плоскостями:
3. Расстояние от точки M_0 (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (1.3.12)$$

Пример 1. 3 . 6 . Найти расстояние между параллельными плоскостям
$2x+3y\text{-}z+1=0$ $\qquad$ $2x+3y\text{-}z+4=0.$
Это расстояние равно расстоянию от любой точки одно плоскости до другой. Выберем на первой плоскости произвольную точку, например M_0 (0, 0,1). По формуле (1.3.12) находим

$$d=\frac{|2\cdot 0+3\cdot 0-1+4|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Пример 1.3.7.Найти угол между плоскостями x- 3y+z-1= 0 и y+z+2=0. По формуле (1.3.11) находим

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot 0-3\cdot 1+1\cdot 1|}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{0+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{11}}$$

Замечание. Как правило, вычисляется острый угол между плоскостями.

Задачи относящиеся к прямым в пространстве

Пусть заданы две прямые в пространстве
1.Взаимное расположение двух прямых:
а) условие перпендикулярности прямых:
$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2$
$=0$
(1.3.14)
б) условие параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (1.3.15)$$

2.Угол между прямыми :

$$\cos\varphi=\frac{|a_1\cdot a_2|}{|a_1|\cdot|a_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (1.3.16)$$

3. Расстояние от точки $M\ (x_1,y_1,z_1)$ до прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad \mathbf{d}=\frac{\left|a\times\overline{M_0M_1}\right|}{|a|}, \qquad (1.3.17)$$

$$\text{где } \bar{a}(m,n,p), \qquad \overline{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0),$$

а векторное произведение вычисляется по формуле (1.2.10).

4. Условие пересечения

прямых. Прямые задаются уравнениями (1.3.13). Рассмотрим смешанное произведение $a_1\, a_2\, M_1M_2$,

$a_1 \neq \lambda a_2$

Если $a_1\, a_2$

$M_1M_2\ = 0$

(1.3.18)

то прямые пересекаются, если

$a_1\, a_2\, M_1M_2\ \neq 0$

(1.3.19)

то прямые скрещиваются. Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле (1.2.11).

5. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Прямые заданы уравнениями (1.3.13). Если $a_1\, a_2\, M$

$_1M_2\ \neq 0$ то расстояние d между прямыми вычисляется по

формуле

$$d=\frac{\left|a_1\cdot a_2\times M_1M_2\right|}{\left|a_1\times a_2\right|} \qquad (1.3.20)$$

Пример 1.3.8.Исследовать взаимное расположение прямых

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$$

Первая прямая проходит через точку $M_1(1,-1,-2)$, а вторая прямая через точку $M_2(2,1,1)$. Направляющие векторы прямых a_1

(2,3,4) и $a_2(3,-1,1)$.

Вычислим смешанное произведение $a_1\, a_2\, M_1M_2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -7 & -8 \end{vmatrix}=8-14=-6\neq 0$$

Так как выполняется условие (1.3.19), то прямые скрещиваются.

Пример 1.3.9.Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми примера 1.3.8. Используем формулу (1.3.20).

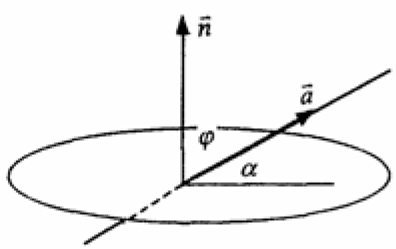
$$a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7i + 10j - 11k; \quad a_1 a_2 M_1 M_2 = -6$$

$$d = \frac{|-6|}{\sqrt{49+100+121}} = \frac{6}{\sqrt{170}}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть плоскость задана уравнением (1.3.2), а прямая-уравнением (1.3.6) , либо уравнением (1.3.7), тогда n*(A,B,C)*— нормаль к плоскости,

a(m,n,p) направляющий вектор прямой.



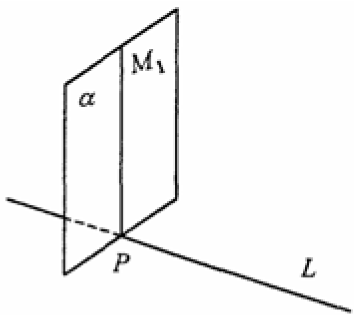


Рис.1.3.1 Рис.1.3.2

1.Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$n = \lambda a \qquad \text{или} \qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (1.3.21)$$

2.Условие параллельности прямой и плоскости:

$na = 0$ или $Am + Bn + Cp = 0$.

(1.3.22)

3.Угол между прямой и плоскостью (рис.1.3.1)

$$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\cos\varphi| = \frac{|an|}{|a||n|} \qquad (1.3.23)$$

4.Координаты точки пересечения прямой и плоскости находятся из системы уравнений (1.3.2) и (1.3.7), а именно

$$\begin{cases} A_x + B_y + C_z + D = 0 \\ x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (1.3.24)$$

5. Проекция точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$

на прямую (рис. 1.3.2). Координаты точки Р определяются из системы

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \\ m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0 \end{cases} \qquad (1.3.24)$$

где плоскость (α) проведена через точку M_1 перпендикулярно прямой L.

Прямая линия на плоскости

Уравнение прямой линии на плоскости может быть получено из канонических уравнений прямой в пространстве (1.3.6), если положить $z_0 =$
0 и p=0

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z}{0} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n} \\ z=0 \end{cases} \qquad (1.3.26)$$

В зависимости от условий задачи уравнение прямой на плоскости может быть записано в виде:

а)y=kx+b-
(1.3.27)
уравнение прямой с угловым коэффициентом;

б)ax+by+c=0 -
(1.3.28)
общее уравнение прямой

в)$y=y_0+k(x-x_0)$-
(1.3.29)
уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k;

$$\text{г)} \quad \frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}- \qquad (1.3.30)$$

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между двумя прямыми $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+ b_2$
определяется по формуле

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| \qquad (1.3.31)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых имеет вид:
$k_1 = k_2$
(параллельности) (1.3.32)
$k_2 = -1/k_1$ (перпендикулярности) (1.3.33)

Пример 1. 3.10. Треугольник задан координатами вершин $A_1(1,2)$, $A_2(4,0)$, $A_3(6,3)$. Написать уравнения:

1) стороны A_1A_3 ;
2) медианы, проведенной из вершины A_2 ;

3) высоты, проведенной из вершины A_2

1) Воспользуемся уравнением (1.3.30)

$$\frac{y-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\quad;\qquad \frac{y-2}{3-2}=\frac{x-1}{6-1}\quad;\qquad y-2=\frac{1}{5}(x-1);$$

$$y=\frac{1}{5}x+\frac{9}{5}-\text{уравнение стороны } A_1A_3.$$

2) Пусть точка K -точка пересечения медианы треугольника, проведенной из A_2 *со* стороной A_1A_3 . Точка K-середина отрезка A $_1A_3$. Поэтому ее координаты равны полусумме координат концов отрезка, а именно

$$K(\frac{7}{2},\frac{5}{2}).$$

Воспользуемся уравнением (1.3.30)

$$\frac{y-y_2}{y_k-y_2}=\frac{x-x_2}{x_k-x_2};\quad \frac{y-0}{\frac{5}{2}-0}=\frac{x-4}{\frac{7}{2}-4};\quad \frac{2}{5}y=-2(x-4);$$

$$y=-5(x-4);\qquad y=-5x+20-\text{уравнение медианы } A_2K$$

3)Высота, проведенная из вершины A_2 перпендикулярна стороне A_1A_3, поэтому угловой коэффициент k определяется из условия (1.3.33):

$$k=-\frac{1}{k_{A_1A_3}}=-\frac{1}{1/5}=-5$$

Воспользуемся уравнением (1.3.29):

$y = y_2 + k(x-x_2)$; $y=0-5(x-4)$;

$y=-5x+20$, т.е. высота треугольника $A_1A_2A_3$,

проведенная из вершины A_2 совпадает с медианой, проведенной из этой вершины.

Вопросы для самопроверки

1.Запишите условия перпендикулярности и параллельности:

а)прямых;

б)плоскостей;

в)прямой и плоскости.

2.Получите координаты точки K делящей данный отрезок AB в отношении

$$\frac{|AK|}{|KB|}=\lambda.$$

3.Какие особенности имеет уравнение плоскости, если она:

а)параллельна осям координат OX; OУ; OZ;

б)перпендикулярна осям координат OX; OУ; OZ;

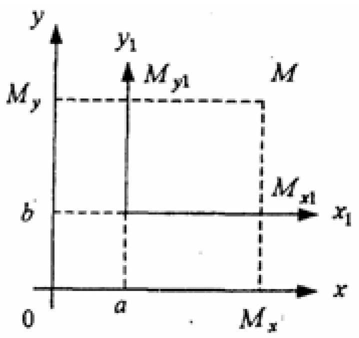
в)параллельна плоскостям OXУ; OXZ; OYZ .

4. Как найти точку, симметричную точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ относительно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.
5. Составьте уравнение плоскости , проходящей через точку M_0 (x_0,y_0,z_0) параллельно двум прямым с направляющими векторами a_1 и a_2 , причем $a_1 \neq a_2$
6.Получите нормальное уравнение плоскости.
7.Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 , параллельно вектору a .
8.Выведите формулы для нахождения расстояния от точки до прямой, между двумя скрещивающимися прямыми.
9.Получите уравнение биссектрисы угла треугольника.
10.Получите формулу для нахождения угла между прямыми, лежащими в плоскости XOУ.

. Элементарная теория линий второго порядка Тема выносится на самостоятельное изучение

Преобразование координат на плоскости

Простейшими преобразованиями координат на плоскости есть преобразование поворота и параллельного переноса. Одна и та же точка имеет различные координаты в разных системах декартовых координат. Существует связь между координатами точки в различных системах координат.



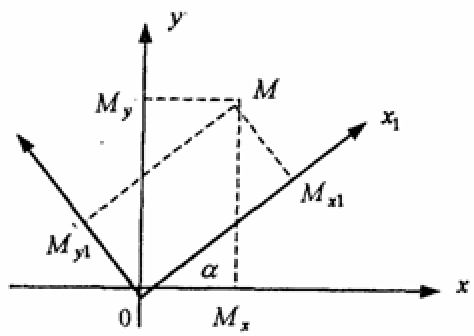


Рис.1.4.1 Рис.1.4.2

<u>Параллельный перенос</u>. Заданы две системы координат: старая OXУ и новая $O_1X_1У_1$ (рис . 1. 4 .1) . Начало новой системы координат находится в точке $O_1(a,в)$.
Старые координаты x, y точки M через новые координаты $x_1 y_1$ выражаются формулами

$$x=x_1+a,\ y=y_1+b \qquad (1.4.1)$$

откуда $x_1=x-a,\ y_1=y-b,$
(1.4.2)

Поворот координатных осей. Новая система координат OX_1Y_1 получена поворотом старой на угол α вокруг точки О (рис.1.4.2).Старые координаты x, y точки М через новые координаты x_1, y_1 выражаются формулами

$$x=x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha$$
$$y=x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha$$

(1.4.3)

В общем случае, когда заданы преобразования параллельного переноса и поворота осей координат, связь между старыми и новыми координатами имеет вид:

$$x=x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha+a$$
$$y=x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha+b$$

(1.4.4)

Студент должен уметь общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + c_1x + c_2y + d = 0, \qquad (1.4.5)$$

путем преобразования системы координат (параллельный перенос, поворот) приводить к простейшему (каноническому) уравнению. В новой системе координат уравнением кривой (1.4.5) будет одно из следующих канонических уравнений:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \text{ – эллипс;} \qquad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \text{ – гипербола;}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=0 \text{ - точка;} \qquad \frac{y_1}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}=1 \text{ - сопряженная гипербола;} \quad (1.4.6)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=-1 \text{ - мнимый эллипс;} \qquad y_1^2=2px_1,\ x_1^2=2py_1 \text{ – параболы;}$$

$$y_1^2=a^2 \text{ – пара прямых;} \qquad y_1^2=-a^2 \text{ – мнимая пара прямых}$$

Общее уравнение второй степени (1.4.5) при повороте осей координат на угол α преобразуется в уравнение

$$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}y_1^2 + c'_1x_1 + c'_2y_1 + d' = 0 \qquad (1.4.7)$$

формулы преобразования координат имеют вид (1.4.3), угол α определяется по формуле

$$ctg\,2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}, \qquad (1.4.8)$$

причём

$$2\sin^2\alpha=1-\cos2\alpha; \quad 2\cos^2\alpha=1+\cos2\alpha; \quad \cos2\alpha=\frac{ctg\,2\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\,2\alpha}} \qquad (1.4.9)$$

Уравнение (1.4.7) приводится к каноническим уравнениям (1.4.6) выделением полных квадратов и применением формул параллельного переноса

(1.4.1) .

Пример 1.4.1.Кривая второго порядка задана уравнением $3x^2 +4xy-4x-8y= 0$ Записать каноническое уравнение этой линии. В данном случае a_{11} = 3, $2a_{12} = 4$, $a_{22} = 0$. По формуле (1.4.8) находим ctg2α=3/4 > 0 **.** Следовательно,

$$2\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{либо} \quad 2\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Откуда } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{либо} \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

В дальнейшем считаем, что $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Тогда sinα >0 и cosα >0, cos2α >0. По формулам (1.4.9) вычисляем

$$\cos 2\alpha = \frac{ctg 2\alpha}{\sqrt{1+ctg^2 2\alpha}} = \frac{3/4}{\sqrt{1+9/16}} = \frac{3/4}{5/4} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Замечание: если предположить, что

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

то sinα > 0, cosα < 0, cos2α < 0 и по формулам (1.4.9) имеем:

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Вычисленные значения sinα и cosα подставляем в (1.4.3):

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 - y_1)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2y_1)$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение и преобразуем его.

$$\frac{3}{5}(4x_1^2 - 4x_1y_1 + y_1^2) + \frac{4}{5}(2x_1^2 + 3x_1y_1 - 2y_1^2) - \frac{4}{\sqrt{5}}(2x_1 - y_1) - \frac{8}{\sqrt{5}}(x_1 + 2y_1) = 0;$$

$$4x_1^2 - y_1^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}y_1 = 0.$$

В последнем уравнении выделим полные квадраты

$$4(x_1^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x_1) - (y_1^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}y_1) = 0; \quad 4\left[\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5}\right] - \left[\left(y_1 + \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{36}{5}\right] = 0;$$

$$4(x^1 - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - \frac{16}{5} - (y_1 + \frac{6}{\sqrt{5}})^2 + \frac{36}{5} = 0; \quad 4(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - (y_1 + \frac{6}{\sqrt{5}})^2 + 4 = 0$$

Используя формулы (1.4.1), положим

$$x_2 = x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y_2 = y_1 + \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

В новых координатах последнее уравнение имеет вид

$$4x_2^2 - y_2^2 = -4 \quad \text{или} \quad \frac{y_2^2}{4} - x_2^2 = 1$$

Это уравнение определяет сопряженную гиперболу (действительная ось ОУ) с полуосями *a=1, b=2.*

Построим гиперболу в новой системе координат $O_1X_2У_2$.

Вначале вычислим старые координаты точки O_1 в которой находится центр гиперболы.

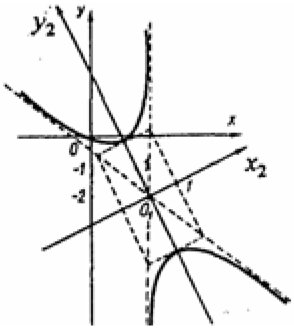


Рис.1.4.3

Для этой точки $x_2 = 0$; $y_2 = 0$.По формулам (1.4.1) находим

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \; y_1 = -\frac{6}{\sqrt{5}}.$$

С помощью формул (1.4.3) вычисляем

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = 2, \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}}\right) = -2$$

Так, точка O_1 имеет координаты O_1 (2,-2).Через точку О $_1$ проводим ось ОХ $_2$, для которой $tg\alpha = 1/2$ и ось OY_2 перпендикулярно оси OX_2. Строим гиперболу

$$\frac{y_2^2}{4} - x_2^2 = 1 \text{ в системекоординат } OX_2Y_2 \text{ (рис.1.4.3).}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

до ее асимптот есть величина постоянная. *a Ь*

Методические указания к решению задач по пределам, непрерывности, производным ,интегралам.

Пусть какая-либо выколотая окрестность точки a лежит в области определения функции $y = f(x)$.

Определение 1. Число B называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|x-a| < \delta \text{ и } x \neq a \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon.$$

Обозначение предела: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 2}(2x+1) = 5$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Нам надо найти такое $\delta > 0$, что $|x-2| < \delta \Rightarrow |(2x+1)-5| < \varepsilon$. Начнем преобразовывать последнее неравенство:

$$|(2x+1)-5| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x+4| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь легко понять, что если мы возьмем $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, то получим требуемое соотношение: $|x-2| < \delta \Rightarrow |(2x+1)-5| < \varepsilon$.

Сформулируем основные теоремы теории пределов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1. Если в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то в этой точке существует и предел суммы $f(x) + g(x)$, причем

$$\lim_{x \to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x).$$

Теорема 2. Пусть $f(x) = C$, тогда в любой точке a существует предел $f(x)$, причем $\lim\limits_{x \to a} C = C$.

Теорема 3. Пусть в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = C$, тогда функция $f(x) \cdot g(x)$ также имеет в точке a предел причем

$$\lim_{x \to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = B \cdot C.$$

Теорема 4. Если в точке a существует предел функции $f(x)$, то в этой точке существует и предел функции $C \cdot f(x)$, причем

$$\lim_{x \to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

Теорема 5. Пусть в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = C$, $C \neq 0$, тогда функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также имеет в точке a предел, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{B}{C}$.

Перейдем к вычислению некоторого класса пределов, связанных с тригонометрическими, показательными и логарифмическими функциями.

Теорема 6. (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=\begin{bmatrix} ax=y \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y/a}=a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=a$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\begin{bmatrix} \arcsin x=y \\ x=\sin y \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x\cdot\cos ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}:\lim\limits_{x\to 0}\cos ax=a:1=a$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin ax):x}{(\sin bx):x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx}{x}=a:b$.

Теорема 7. (Второй замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Примеры.

3.. Прологарифмируем равенство $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$:

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln e$ или $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=\begin{bmatrix} ax=y \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y:a}=a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=a$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\begin{bmatrix} e^x-1=y \\ x=\ln(1+y) \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=1:\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=1$.

3.2. Непрерывность функции

Определение 1. Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки a. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Если $f(x)$ не является непрерывной в точке a, то говорят, что она разрывна в этой точке.

Определение 2.

А) Функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества;

б) $f(x)$ непрерывна в области , если она непрерывна в каждой точке области определения функции $f(x)$;

в) $f(x)$ всюду непрерывна, если $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной оси.

Теорема 1. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ также непрерывны в этой точке. Если, кроме того, $g(a)\neq 0$, то $f(x):g(x)$ непрерывна в точке a.

Теорема 2. (Теорема о сложной функции). Пусть $y=f(x)$, $z=g(y)$, $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$, тогда функция $z=g(f(x))$ непрерывна в точке x_0

Теорема 3. (Больцано-Коши). Пусть $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a;b]$ и на концах промежутка $f(x)$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f(c)=0$.

Теорема 4. (Вторая теорема Больцано-Коши). Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, причем $A<B$. Тогда для любого C, $A<C<B$, существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f(c)=C$.

Производная функции

Определение 1. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения ее приращения в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Обозначают производную в точке x_0 так: $f'(x_0)$. Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Если предел существует для всех x из некоторого промежутка, то правило определяет функцию, которую называют производной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$. Нахождение производной называют дифференцированием функции $f(x)$.

Часто употребляются и другие обозначения производной:

$$\frac{df(x)}{dx},\quad \frac{dy}{dx},\quad y'$$

Пример 1. Вычислить производную функции $f(x)=x$

Решение. Для данной функции $f(x+\Delta x)=x+\Delta x$, а потому

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)-x=\Delta x$$

тогда

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

Итак, $x'=1$

Пример 2. Вычислить производную функции $f(x)=x^2$

Решение. Для этой функции имеем :

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тогда $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$

Итак, $(x^2)'=2x$

Теорема 1. если существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, то:

1. функция Cf производную и $(C f(x))'=C f'(x)$
2. функция $f\pm g$ имеет производную и $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
3. функция fg имеет производную и $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. функция $\frac{f}{g}$ имеет производную и $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. суперпозиция (сложная функция) функций f и g , т.е. функция $f(g(x))$ имеет производную, и она находится по правилу

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Пример 1. Найти производную функции $y=\sin(x^2+x+1)$

Решение. Функция $\sin(x^2+x+1)$ – суперпозиция двух функций $f(u)=\sin u$ и $u=g(x)=x^2+x+1$.. Согласно правилу 5 имеем:

$[\sin(x^2+x+1)]'=\sin'(x^2+x+1)\,(x^2+x+1)'=\cos(x^2+x+1)(2x+1)$

Таблица производных простейших функций

1. $C' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$;
4. $\left(e^x\right)' = e^x$;
5. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$;
6. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$;
8. $\left(\sin x\right)' = \cos x$;
9. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;
10. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
11. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
12. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
13. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
14. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
15. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Сформулируем несколько теорем о дифференцируемых функциях. Отметим только, что функция называется дифференцируемой в точке или на промежутке, если она имеет производную в этой точке или на этом промежутке.

Теорема 8. (Ферма). Если функция определена, дифференцируема в промежутке $[a;b]$ и в точке $C \in (a;b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение, то $f'(C) = 0$.

Теорема 9. (Ролля). Пусть $f(x)$ определена на промежутке $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $C \in (a;b)$ такая, что $f(C) = 0$.

Теорема 10. (Лагранжа или теорема о среднем). Пусть $f(x)$ определена, непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, тогда существует $c \in (a;b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Наряду с производной, которую часто называют производной первого порядка, рассматриваются производные высших порядков. Так, производная от производной функции $f(x)$ называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)$. Аналогично определяется $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ и т.д. Для примера вычислим $\left(x \sin x\right)'''$:

$$\left(x\sin x\right)' = x \cdot \cos x + \sin x;\ \left(x\sin x\right)'' = -x \cdot \sin x + 2\cos x;\ \left(x\sin x\right)''' = -3\sin x - x\cos x.$$

Определение 2. Дифференциалом функции $f(x)$ называется выражение $df(x)=f'(x)\cdot dx$, где $dx=\Delta x$. Аналогично таблице производных строится и таблица дифференциалов. Приведем лишь некоторые примеры из этой таблицы:

$$dC=0;\ dx^2=2xdx;\ d\operatorname{tg}x=\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Роль дифференциалов прояснится при изучении интегралов и дифференциальных уравнений.

3.4. Исследование функций с помощью производных

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке $[a;b]$, если для любых $x_0, x_1 \in [a;b]$ имеет место:

$$x_0<x_1 \Rightarrow f(x_0)<f(x_1)\ \left(f(x_0)>f(x_1)\right).$$

Теорема 1. Пусть $f(x)$ имеет производную в каждой точке из $[a;b]$. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a;b]$ в том и только в том случае, когда для любого $x\in[a;b]$ $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой максимума $f(x)$, если существует окрестность $O(\varepsilon,x_0)$ такая, что $f(x)$ определена в этой окрестности и для любого $x\in O(\varepsilon,x_0)$

$$f(x_0)>f(x)$$

Аналогично определяется точка минимума. Точка минимума или максимума называется точкой экстремума.

Определение 3. Точка x_0 называется критической точкой функции $f(x)$, если $f'(x)$ не определена в этой точке или $f'(x_0)=0$.

Теорема 2.

1) Если x_0 - точка экстремума функции $f(x)$, то она является критической точкой этой функции;

2) Если x_0 - критическая точка функции $f(x)$, причем для $x<x_0$ $f'(x)<0$, а для $x>x_0$ $f'(x)>0$ в некоторой окрестности $O(\varepsilon,x_0)$, то x_0 - точка минимума;

3) Если x_0 - критическая точка функции $f(x)$, причем для $x<x_0$ $f'(x)>0$, а для $x>x_0$ $f'(x)<0$ в некоторой окрестности $O(\varepsilon,x_0)$, то x_0 - точка максимума.

Определение 3.

а) Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх на промежутке $[a;b]$, если для любого $x\in[a;b]$ касательная, проведенная к графику $y=f(x)$ в точке x, лежит над графиком функции $f(x)$;

б) Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на промежутке $[a;b]$, если для любого $x \in [a;b]$ касательная, проведенная к графику $y = f(x)$ в точке *x*, лежит под графиком функции $f(x)$.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в каждой точке $x \in [a;b]$. Тогда:

а) $f(x)$ выпукла вниз на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда $f''(x) > 0$ для любого $x \in [a;b]$;

б) $f(x)$ выпукла вверх на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда $f''(x) < 0$ для любого $x \in [a;b]$.

Определение 4. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции $f(x)$, если она определена в выколотой окрестности точки x_0, а левый или правый пределы $f(x)$ в этой точке равны ∞.

Определение 5. Прямая $y = kx + b$ называется правой (левой) наклонной асимптотой функции $f(x)$, если имеет место

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - kx - b \right) = 0.$$

Если прямая является одновременно и правой, и левой наклонной асимптотой, о ее называют просто наклонной асимптотой. Если $k = 0$, то наклонную асимптоту иногда называют горизонтальной асимптотой.

Схема исследования функции $y = f(x)$:

1. Область определения функции.
2. Вертикальные асимптоты.
3. Наклонные асимптоты.
4. Исследование по первой производной – промежутки убывания, возрастания, экстремумы (для удобства строится таблица первой производной).
5. Исследование по второй производной - промежутки выпуклости вверх и вниз (строится таблица второй производной).
6. Специальные свойства – четность, нечетность, периодичность (если какого-либо или нескольких свойств их перечисленных нет, то о них упоминать не следует).
7. Исследование завершается построением графика функции.

Пример: $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

1. Область определения: $3 - x^2 \neq 0$ или $x \neq \pm\sqrt{3}$

2. $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-0}\dfrac{x^3}{3-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}+0}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-\infty$,

$x_1=-\sqrt{3}$ - вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}-0}\dfrac{x^3}{3-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+0}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-\infty$,

$x_1=\sqrt{3}$ - вертикальная асимптота.

3. $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-1$, $b_1=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}+x\right)=0$,

$x=-y$ - правая асимптота.

$k_2=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-1$, $b_2=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k_2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}+x\right)=0$,

$x=-y$ - левая асимптота.

4. $y'=\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right)'=\dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2}$.

Критические точки: $x_1=-3$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=0$, $x_4=\sqrt{3}$, $x_5=3$

Составляем таблицу первой производной:

x	$(\infty;-3)$	-3	$\left(-3;-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3};0\right)$	0	$\left(0;\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};3\right)$	3	$(3;\infty)$
y'	–	0	+	нет	+	0	+	нет	+	0	-
y	убыв.	4,5	возр.	нет	возр.	0	возр.	нет	возр.	-4,5	возр.
		min								max	

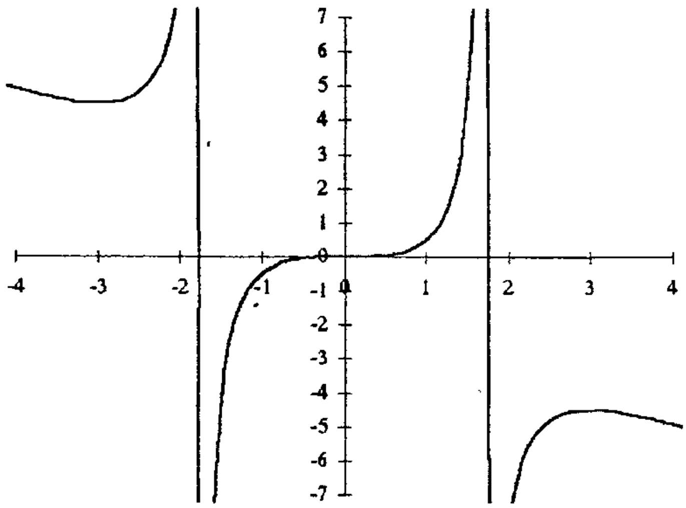
5. $y''=\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right)=\dfrac{-2x\left(x^2+27\right)}{\left(x^2-3\right)^3}$, $x=-\sqrt{3};0;\sqrt{3}$ - точки изменения знака второй производной.

Составляем таблицу второй производной:

x	$\left(\infty;-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3};0\right)$	0	$\left(0;\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};\infty\right)$
y''	+	нет	-	0	+	нет	-
y	$\cup$	нет	$\cap$	0	$\cup$	нет	$\cap$

6. Функция нечетная, так как $f(-x)=-f(x)$.

7. Строим график:



3.5. Функция нескольких переменных. Частные производные

Определение 1. Отображение $f : R^n \to R$ называется функцией n переменных и обозначается: $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В частности, $f : R^2 \to R$ называется функцией двух переменных и обозначается: $z = f(x, y)$.

Определение 2. Круг радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется окрестностью точки M_0 радиуса ε и обозначается $O(\varepsilon, M_0)$.

Определение 3. Функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых точек $M(x; y)$ $M(x, y) \in 0(\varepsilon, M_0) \Rightarrow \left| f(x, y) - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon$.

Определение 4. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности $O(\varepsilon, M_0)$. Частной производной $f'_x(M_0)$ называется число $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$. Аналогично определяется частная производная $f'_y(M_0)$.

Пример:

$z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $M(1, 2)$

$$z_x' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)_x' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)_x' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$z_x'(M) = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$z_y' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)_y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)_y' = \frac{y}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$z_y'(M) = \frac{2}{\left(1 + \sqrt{5}\right)\sqrt{5}}.$$

Функции z_x', z_y' можно в свою очередь рассматривать как функции от x, y и от них мы можем вычислять частные производные, которые называются частными производными второго порядка: z_{xx}'', z_{yy}'', z_{yx}'', z_{xy}''. Последние называются смешанными производными.

Теорема 1. Пусть в окрестности точки M_0 существуют f_x', f_x', f_{yx}'', f_{xy}'', причем смешанные производные непрерывны в точке M_0. Тогда $f_{yx}''(M_0) = f_{xy}''(M_0)$.

3.5. Экстремумы. Задачи на наибольшее и наименьшее значения

Начнем с наиболее простого случая – функции одной переменной.

Определение 1. Точкой наибольшего (наименьшего) значения $f(x)$ на промежутке $[a;b]$ называется такое $x_0 \in [a;b]$, что для любого $x \in [a;b]$ $f(x_0) \geq f(x)$ $\left(f(x_0) \leq f(x)\right)$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений $f(x)$ весьма прост:

1. Находим критическое значения $f(x)$ на $[a;b]$;
2. Вычисляем значения $f(x)$ в найденных критических точках и точках a и b;
3. Из всех найденных точек выбираются те, в которых f принимает наибольшее или наименьшее значения. Они и будут искомыми.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ на промежутке $[0;1]$.

1) Вычисляем производную $y' = \frac{4x - 1}{\left(1 + x - x^2\right)^2}$. Критическая точка $x = \frac{1}{2}$.

Критические точки, которые обращают в 0 знаменатель, для нас интереса не представляют, т.к. $y(x)$ в этих точках не определена.

2) $y(0)=1$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}$, $y(1)=1$.

Ответ записывается так: $\max\limits_{[0;1]} y=1$ при $x=0;1$; $\min\limits_{[0;1]} y=\frac{3}{5}$ при $x=\frac{1}{2}$.

Аналогично определяются экстремумы функции нескольких переменных.

Определение 2. Точка M_0 называется точкой максимума (минимума) функции f, если существует окрестность $O(\varepsilon,M_0)$ такая, что для любых $M\in O(\varepsilon,M_0)$

$$f(M_0)>f(M)\ \ (f(M_0)>f(M))$$

Точки минимума или максимума называются точками *экстремума функции* f.

Теорема 1. Если M_0 - точка экстремума функции f, то либо $f_x'(M_0)=f_x'(M_0)=0$, либо одна или обе частных производных не существуют.

Определение 3. Точка M_0 называется точкой наибольшего (наименьшего) значения функции f на множестве D, если для любых $M\in D$

$$f(M_0)>f(M)\ \ (f(M_0)>f(M))$$

Точки наибольшего и наименьшего значения находятся по следующему алгоритму:

1) находятся все критические точки внутри области D;

2) находятся все точки наибольшего и наименьшего значений на границе области D;

3) из всех найденных точке выбираются те, в которых f принимает наибольшее или наименьшее значения. Они и будут искомыми.

Пример. Найти наибольшее значение функции $z=4x^2y-x^3y-x^2y^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Решение. Точки $O(0;0)$, $A(6;0)$, $B(0;6)$ – вершины данного треугольника.

1) Найдем критические точки: $z_x'=8xy-3x^2y-2xy^2$, $z_y'=4x^2-x^3-2x^2y$.

Получаем систему: $\begin{cases} xy(8-3x-2y)=0 \\ x^2(4-x^2-y)=0 \end{cases}$

а) $x=0$, тогда y - любое из промежутка (0;6), и эта задача относится к граничной.

б) $y=0$, тогда x - любое из промежутка (0;6), и эта задача относится к граничной.

в) $\begin{cases} 8-3x-2y=0 \\ 4-x^2-y=0 \end{cases}$, тогда $x=0$ (граничная задача) или $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{7}{4}$, точка

$M_1\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)\in D$.

Найдем наибольшее значение на каждом из трех отрезков границы области D.

2) Промежуток $OA: y=0, x\in[0;6]$, тогда $z=0$, наибольших значений нет.

3) Промежуток $AB: y=6-x, x\in[0;6]$, тогда $z=2x^3-12x^2$, $z_x{}'=6x^2-24x$, отсюда $x=4, y=2$. Получаем еще одну "подозрительную" точку $M_2(4;2)$.

4) Промежуток $BO: x=0, y\in[0;6]$, тогда $z=0$, критических точек нет.

5) Вычисляем значения функции z в точках $O(0;0), A(6;0), B(0;6)$, $M_1\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$, $M_2(4;2)$: $z(O)=0$, $z(A)=0$, $z(B)=0$, $z(M_1)=\frac{189}{64}$, $z(M_2)=-64$.

Ответ: $\max\limits_D z=\frac{189}{64}$ при $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{7}{4}$, $\min\limits_D z=-64$ при $x=4, y=2$.

3.6. Тренировочные задания

Найти указанные пределы.

22. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$

23. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{5x}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

32. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x - e}{x-1}$

Найти производные.

33. $y = 3x^2 - 5x + 2$

34. $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + 7$

35. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

36. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$

37. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

38. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

39. $y = \sin^2(\cos 3x)$

40. $y = \dfrac{\arccos x}{x}$

41. $y = \arcsin \dfrac{2}{x}$

42. $y = \dfrac{\ln x}{x^n}$

43. $y = \sqrt[3]{\ln \sin \dfrac{x+3}{4}}$

44. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$

45. $y = e^{\arcsin 2x}$

46. $y = \dfrac{\sin 3x}{2\sin^2 x \cos x}$

47. $y = e^{ax}(a \sin x - \cos x)$

Исследовать методами дифференциального исчисления функции и на основе результатов исследования построить их графики.

48. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

49. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

50. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$

51. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$

Найти частные производные z_x' и z_y'.

52. $z = x^3y - y^3x$

53. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

54. $z = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}$

55. $z = x^y$

56. $z = \sin(xy)$

57. $z = (1 + xy)^y$

Найти наибольшее и наименьшее значения данных функций в указанных областях.

58. $y = x^4 - 2x^2 + 5$; $[-2;2]$

59. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; $[0;4]$

60. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x$; $\left[0;\pi/2\right]$

61. $y = x^2 + 2xy + 4x - 8y$; прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$

62. $z = e^{-x^2-y^2}$; круг $x^2 + y^2 \le 4$

63. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$; прямоугольник $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если $F(x)' = f(x)$.

Определение 2. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ и C – символ константы, тогда выражение $F(x)+C$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, то есть $\int f(x)dx = F(x) + C$. В выражении $\int f(x)dx$ функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

На основании таблицы производных составим таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int kdx = kx + C$
2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \ne -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
5. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

9. $\int e^x dx = e^x + C$

10. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

11. $\int \cos x dx = \sin x + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

13. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

Сформулируем ряд свойств неопределенных интегралов, необходимых для их вычисления:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$

4. $\int df(x) = f(x) + C$

5. $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx + C$

6. $\int (f(x) + g(x)dx) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

7. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$

4.2. Основные приемы вычисления неопределенных интегралов

1. Метод интегрирования по частям.

Этот метод основан на формуле $\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)dx$

Пример 1.

$$\int x\cdot e^x dx = \begin{vmatrix} f(x) = x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 1 & g(x) = e^x \end{vmatrix} = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C$$

Пример 2.

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} f(x) = \ln x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} & g(x) = x \end{vmatrix} = x\cdot\ln x - \int dx = x\cdot\ln x - x + C$$

2. Метод подстановки.

Теорема 1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + C/$

Сама теорема формулируется и доказывается довольно просто, но применение ее, в чем и заключается метод подстановки, довольно затруднительно, так как нелегко сразу определить, что взять за функцию $\phi(x)$, а что – за $f(x)$. Рассмотрим это на примерах.

Пример 1.

$$\int \sin^2 x\cdot\cos x dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Пример 2.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}dx = \begin{vmatrix} t^2 = \sin x \\ dx = 2\,\mathrm{t}\,dtx \end{vmatrix} = \int \frac{t\cdot 2tdt}{t^2+1} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = 2\int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} + C =$$

$$= 2t - 2\operatorname{arctg}\left(t\right) + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$$

4.3. Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение 1. Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены, называется дробно-рациональной функцией. Мы будем рассматривать, как правило, правильные дроби, то есть дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена в числителе меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Начнем с дробей, в которых в знаменателе стоит квадратный трехчлен. Обычно дробно-рациональные функции интегрируются с помощью разложения на простейшие дроби. Проиллюстрируем этот метод несложными примерами.

Пример 1. $\int \frac{x^2+x-2}{x(x+1)(x-2)}dx$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+x-2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Найдем неизвестные коэффициенты *A, B, C* исходя из того, что после приведения правой части к общему знаменателю коэффициенты при одинаковых степенях левой и правой частей равенства должны совпадать:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2\left(A+B+C\right) + x\left(-A-2B+C\right) + \left(-2A+C\right)}{x(x+1)(x-2)}$$

Получаем равенство: $x^2+x-2 = x^2\left(A+B+C\right) + x\left(-A-2B+C\right) + \left(-2A+C\right)$, из которого получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-2B+C=1 \\ -2A+C=-2 \end{cases}$$

Решая эту линейную систему, получаем $A=\frac{9}{7}$, $B=-\frac{6}{7}$, $C=\frac{4}{7}$. Поэтому

$$\int \frac{x^2+x-2}{x(x+1)(x-2)}dx = \frac{9}{7}\int \frac{dx}{x} - \frac{6}{7}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{4}{7}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{9}{7}\ln|x| - \frac{6}{7}\ln|x+1| + \frac{4}{7}\ln|x-2| + C$$

Пример 2. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$

Здесь подынтегральная функция следующим образом раскладывается на простейшие дроби:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ A-C=1 \end{cases}$$

Решая ее, получаем $A=1 \quad B=-1 \quad C=0$, значит

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

4.4. Определенный интеграл

Один из источников появления определенных интегралов – задача вычисления площадей фигур, ограниченных кривыми.

Определение 1. пусть дана функция $y=f(x)$. Фигура, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, вертикальными прямыми $x=a, \quad y=b$ и осью *OX*, называется криволинейной трапецией.

Отрезок $[a,b]$ разобьем на n частей точками $x_0=a, x_1, x_2, ..., x_n=b$. Проведя через эти точки вертикальные прямые, разобьем исходную фигуру на *n* более "узких" криволинейных трапеций. Заменим каждую "узкую" криволинейную трапецию с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ на прямоугольник с высотой $f(x_k)$

Определение 2. Выражение $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, называется интегральной суммой функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

Геометрический смысл: каждое слагаемое этой суммы есть площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(x_k)$.

Определение 3. $\lim\limits_{\max\Delta x_k\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$ называется определенным интегралом функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то

$\lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k$ существует и конечен.

С геометрической точки зрения число $\int_a^b f(x)dx$ естественно считать площадью соответствующей криволинейной трапеции при $f(x) \geq 0$.

Сформулируем ряд свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b dx = b - a$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
5. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4.5. Вычисление определенного интеграла

Теорема 1. Функция $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$, если $f(x)$ непрерывна.

Теорема 2. (Формула Ньютона--Лейбница). Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Значение этой формулы трудно переоценить хотя бы по той причине, что вычисление определенных интегралов сводится к уже разработанной технике вычисления неопределенных интегралов.

Пример 1. $\int_0^1 \left(x^2 + x - 1 \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 - 2x + 3$.

Найдем точки пересечения этих двух линий:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = -x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

$x_1 = 1$, $x_2 = -2$

$$S = \int_{-2}^1 \left(\left(-x^2 - 2x + 3 \right) - \left(x^2 - 1 \right) dx \right) = \int_{-2}^1 \left(-2x^2 - 2x + 4 \right) dx = \left(-\frac{2x^3}{3} - x^2 + 4x \right)\Bigg|_{-2}^1 = \frac{31}{3}.$$

Теорема 3. (Подстановка в определенном интеграле). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $\phi(x)$ имеет непрерывную производную на промежутке $[a,b]$, причем $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ и для любого $t \in [\alpha, \beta]$, $\phi(t) \in [a,b]$. Тогда

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = F(\phi(a)) - F(\phi(b))$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int_0^{\frac{x}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

4.6. Тренировочные задания

Найти неопределенные интегралы.

64. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

65. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$

66. $\int \sin^3 x \cos x dx$

67. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

68. $\int x 3^x dx$

69. $\int x \,\mathrm{tg}^2 x dx$

70. $\int x^3 \sin x dx$

71. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

72. $\int e^{2x} \frac{dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

73. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$

74. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$

75. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, вычислить определенный интеграл.

76. $-\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$

77. $\int_{1}^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

78. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}$

79. $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$

80. $\int_{4}^{9}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

81. $\int_{0}^{1}\sqrt{e^x}\,\frac{dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

82. $y=x^2,\quad y=\sqrt{x}$

83. $y=x(x-1)^2,\quad y=0$

84. $y=x-x^2,\quad y=0$

85. $y=\ln x,\quad x=a,\quad x=b,\quad a<b$

86. $y=\ln\frac{x}{4x},\quad y=x\ln x$

87. $y=\operatorname{tg}x,\quad y=\frac{2}{3}\cos x,\quad x=0$

Методические указания к решению задач по дифференциальным уравнениям

Определение 1. Уравнение вида $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$, где x - аргумент, y - неизвестная функция от x и $y',y'',...,y^{(n)}$ - производные y, называется дифференциальным уравнением *n*-го порядка. Функция $y=\phi(x)$ называется решением этого уравнения, если при замене y на $\phi(x)$ и все $y^{(k)}$ на $\phi^{(k)}(x)$ данное уравнение превращается в верное равенство.

Мы разберем некоторые типы дифференциальных уравнений I порядка - $F(x,y,y')=0$ и один частный, но наиболее часто встречающийся в приложениях тип уравнений II порядка - $F(x,y,y',y'')=0$.

Как мы в дальнейшем убедимся, решением дифференциального уравнения I порядка будет не одна функция, а множество функций, которые описываются формулой $y=\phi(x,C)$, где C – произвольная константа. Такая функция $\phi(x,C)$ называется общим решением уравнения. Иногда из всех таких функций необходимо выбрать такую, что $\phi(x_0)=y_0$ для фиксированных x_0 и y_0. Это равенство называют начальным условием.

Определение 2. Если требуется найти такое решение $\phi(x)$ уравнения $F(x,y,y')=0$, что $\phi(x_0)=y_0$, то такую задачу называют задачей Кош записывают ее так: $F(x,y,y')=0$, $y(x_0)=y_0$.

Определение 3. Если уравнение $F(x,y,y')=0$ с помощью алгебраических преобразований можно привести к виду $M(x)dx=N(y)dy$, то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными. Уравнение с разделяющимися переменными $M(x)dx=N(y)dy$ решается непосредственным интегрированием: $\int M(x)dx=\int N(y)dy$.

Пример 1. $xyy'=1-x^2$

Решение: $xy\dfrac{dy}{dx}=1-x^2$, $ydy=\dfrac{(1-x^2)dx}{x}$, $\int ydy=\int\dfrac{(1-x^2)dx}{x}$, $\dfrac{y^2}{2}=\ln|x|-\dfrac{x^2}{2}+C$

Ответ: $y=\sqrt{2\ln|x|-x^2+2C}$

Пример 2. Решить задачу Коши: $\sin y\cos xdy=\cos y\sin xdx$, $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

Решение: $\dfrac{\sin ydy}{\cos y}=\dfrac{\sin xdx}{\cos x}$, $\int\dfrac{\sin ydy}{\cos y}=\int\dfrac{\sin xdx}{\cos x}$, $\int-\dfrac{d\cos ydy}{\cos y}=\int-\dfrac{d\cos xdx}{\cos x}+C$, $-\ln\cos y=-\ln\cos x+C$.

Воспользуемся начальными условиями при нахождении C: $-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\ln 1+C$, отсюда $C=-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Получаем соотношение $-\ln\cos y=-\ln\cos x-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x$, $y=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$.

Однородные дифференциальные уравнения

Определение 1. Функция $f(x,y)$ называется однородной, если для любого t $f(tx,ty)=f(x,y)$.

Определение 2. Уравнение $y'=f(x,y)$ называется однородным, если функция $f(x,y)$ однородна. Решаются однородные уравнения следующим образом: делаем подстановку $y=ux$, где u - также неизвестная функция. Так как $y'=u'x+u$, то получаем

$u'x+u=f(x,xu)$, или $u'x+u=f(1,u)$, далее $x\cdot\frac{du}{dx}=f(1,u)-u$, или $\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x}$ - уравнение с разделенным переменными.

Пример. $y'=\frac{x+y}{x-y}$, $y(1)=0$

Решение. Делаем подставку $y=ux$, отсюда $y'=u'x+u$. Получаем $u'x+u=\frac{x+ux}{x-ux}$ или $u'x=\frac{1+u}{1-u}$, $x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}$, $\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}$, следовательно $\int\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\int\frac{dx}{x}$, $\int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{udu}{1+u^2}=\int\frac{dx}{x}$, $\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(u^2+1\right)}{u^2+1}=\ln|x|+\ln C$, $\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)=\ln C|x|$. Теперь заменяем $u=\frac{y}{x}$, $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\ln Cx$. Из начальных условий находим C: $\operatorname{arctg}0-\frac{1}{2}\ln 1=\ln C$ или $\ln C=0$, $C=1$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Линейные дифференциальные уравнения I порядка

Определение 1. Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ - функции, называется линейным уравнением 1 порядка (подразумевается линейность по функции y и y').

Метод решения: неизвестная функция y представляется в виде произведения двух неизвестных функций $y=u\cdot v$. Получаем: $u'\cdot v+\left(u\cdot v'+P(x)uv\right)=Q(x)$. Функцию v находим из условия $u\cdot v'+P(x)uv=0$, или $\frac{dv}{dx}=-P(x)v$, или $\frac{dv}{v}=-P(x)dx$, или $\ln v=\int-P(x)dx$, то есть $v=e^{\int-P(x)dx}$. Подставляя v в начальное уравнение, получаем еще одно уравнение с разделяющимися переменными: $u'e^{\int-P(x)dx}=Q(x)$. Решая его, находим u, а вместе с ним и y.

Пример. $xy'+y-e^x=0$, $y(1)=1$.

Решение: $xy'+y=e^x$, $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}e^x$, $y=u\cdot v$, т.е. $y'=u'v+uv'$.

Получаем $u'v+\left(uv'+\frac{1}{x}uv\right)=\frac{1}{x}e^x$, $v'+\frac{1}{x}v=0$, $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}$, $\ln v=-\ln x$, $v=\frac{1}{x}$.

Подставляем в начальное уравнение: $u'\frac{1}{x}=\frac{1}{x}e^x$, $du=e^xdx$, $u=e^x+C$. Значит $y=\frac{1}{x}\left(e^x+C\right)$.

Найдем C исходя из начальных условий: $1 = e + C \Rightarrow C = 1 - e$.

Ответ: $y = \frac{1}{x}\left(e^x + 1 - e\right)$.

Линейные дифференциальные уравнения II порядка

В этом параграфе мы рассмотрим лишь уравнения вида $y'' + ay' + by = 0$ - линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

С каждым уравнением связывается так называемое характеристическое уравнение $k^2 + ak + b = 0$. Имеет место

Теорема 1.

а) Если $D = a^2 - 4b > 0$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$, где c_1, c_2 - произвольные константы, а k_1, k_2 - различные действительные корни характеристического уравнения;

б) Если $D = a^2 - 4b = 0$ и $k_1 = k_2 = k$, то $y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$;

в) Если $D = a^2 - 4b < 0$, тогда $k_{1,2} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, где $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2}$ и $y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right)$

Пример 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$. Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, поэтому $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Пример 2. $y'' - 2y' + y = 0$, $k^2 - 2k + 1 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$. Значит $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Пример 3. $y'' + 6y' + 13 = 0$, $k^2 + 6k + 13 = 0$, $k_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{-1}$. Значит $y = e^{-3x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right)$.

5.5. Тренировочные задания

Найти общие решения и частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих данным начальным условиям, если начальные условия заданы.

88. $xyy' = 1 - x^2$

89. $xy' + y = y^2$

90. $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$, $y(0) = 1$

91. $(xy' - y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$, $y(1) = 0$

92. $y(y')^2 + 2xy' - y = 0$, $y(0) = \sqrt{5}$

93. $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$

94. $xy' + y - e^{x} = 0$, $y(a) = b$

95. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$, $y(1) = 0$

96. $x\left(1 + x^2\right)dy = \left(y + yx^2 - x^2\right)dx$, $y(1) = -\frac{\pi}{4}$

97. $y'' - y' - 6y = 0$

98. $y'' - 6y' + 9y = 0$

99. $y'' - 2y' + 3y = 0$

Методические указания к решению задач по рядам

Определение 1. Бесконечная сумма чисел $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ называется числовым рядом. Чаще его записываются с помощью знака сигма: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

С каждым числовым рядом связывается последовательность частичных сумм:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, ...,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n .$$

Определение 2. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется сходящимся, если последовательность $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ имеет конечный предел, причем число $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда и записывается это так: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Если ряд не сходится, то он называется расходящимся.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right),\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2},\text{ поэтому } \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}.$$

В теории числовых рядов выделяются две задачи: исследование рядов на сходимость и нахождение сумм рядов. Мы будем в основном решать задачи первого типа.

Теорема 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие (достаточный признак расходимости). Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема 2 (интегральный признак сходимости). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0;\infty]$, убывает на этом промежутке, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ связан с $f(x)$

соотношением $a_n = f(n)$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только в том случае, когда $\int_1^{\infty} f(x)$ конечен.

Очень важный пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который называется гармоническим рядом. Для этого исследуем $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{\infty} = \infty$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ называются гармоническими с показателем p. Если $p \le$, то ряд расходится, если $p > 1$, то ряд сходится.

Теорема 3 (предельный признак). Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и пусть существует, конечен и отличен от 0 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только в том случае, когда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Пример. Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^3+5n^2}$. Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^3+5n^2} : \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{3n^3+5n^2} = \frac{1}{3}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^3+5n^2}$ расходится.

Теорема 4 (признак Даламбера). Пусть число Даламбера $\rho_D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если $\rho_D > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если $\rho_D = 1$, то о сходимости или расходимости ничего сказать нельзя.

Пример. Исследуем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. вычислим $\rho_D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$. Ряд сходится.

6.2. Тренировочные задания

Исследовать сходимость рядов

100. $1-1+1-1+1-\dots$

101. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\dots$

102. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$

103. $3\cdot\frac{1!}{1}+3\cdot\frac{2!}{2^2}+3\cdot\frac{3!}{3^3}+\ldots+3\cdot\frac{n!}{n^n}+\ldots$

104. $\frac{1!^2}{2}+\frac{2!^2}{2^4}+\frac{3!^2}{2^9}+\ldots+\frac{n!^2}{2^{n^2}}+\ldots$

105. $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 4+\ldots+\frac{1}{n}\cdot(n+1)+\ldots$

Методические указания к решению задач по кратным интегралам

Методические указания к решению задач по теории вероятности

1. Элементы комбинаторики.

Пусть имеется множество некоторых элементов (предметов, объектов и т.д.). Комбинаторика изучает соединение этих элементов в группы, т.е. «комбинации» из этих элементов. Здесь рассматриваются некоторые понятия и формулы комбинаторики, которые часто оказывается полезным при вычислении вероятностей.

- Выборкой объёма k из множества, содержащего n элементов, называется подмножество отобранных любым способом k элементов.
- Упорядоченная выборка – порядок расположения элементов выборки имеет значение.
- Неупорядоченная выборка – порядок расположения элементов в выборке безразличен.
- Выборка без возврата – выбранный элемент не возвращается в исходную совокупность, т.е. каждый элемент может встретиться в выборке один раз.
- Выборка с возвращением – выбранный элемент возвращается в исходную совокупность, и, следовательно, может быть выбран несколько раз.

Основные виды комбинаций (выборок) – это перестановки, размещения и сочетания.

1.1. Перестановками из n элементов называются их соединения (выборки), различающиеся только порядком входящих в них элементов.

Число всех перестановок из n различных элементов равно:

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$$

Знак **!** «факториал» означает произведение чисел от 1 до n.

Например:

$$1!=1$$
$$2!=1\cdot 2=2$$
$$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$$
$$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$$

<u>*Внимание*</u>: $0!=1$ по определению.

Если среди n элементов *a, b, c…* имеются одинаковые (*a* повторяется α раз, *b* - β раз, *c* - γ раз и т.д.), то число перестановок равно $\dfrac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!}$

1.2. Размещением из *n* элементов по *k* без возврата называются упорядоченные выборки объёма *k*, взятые из *n* элементов без повторения.

То есть, соединения (выборки) различаются самими элементами или их порядком (например, размещение из трёх элементов *a, b, c* по два – *ab, ac, bc, ba, ca, cb*). Число всех размещений из *n* элементов по *k* равно:

$$A_n^k=n(n-1)\ldots(n-k-1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

1.3. Размещением из *n* элементов по *k* с возвращением называются упорядоченные выборки объёма *k*, взятые из *n* элементов, которые могут повторяться. Число всех таких выборок равно:

$$\overline{A}_n^k=n^k$$

1.4. Сочетаниями из *n* элементов по *k* без возврата называются неупорядоченные выборки объёма *k*, взятые из *n* элементов без повторения, т.е. которые различаются только своими элементами (например, сочетания из трёх элементов *a, b, c* по два – *ab, bc, ca*). Число сочетаний в этом случае равно:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}=C_n^{n-k}$$

1.5. Сочетаниями из *n* элементов по *k* с возвращением называются неупорядоченные выборки объёма *k*, взятые из *n* элементов, которые могут повторяться. Число сочетаний в этом случае равно:

$$\overline{C}_n^k=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

1.6. Правило произведения:

Если элемент *A* можно выбрать *m* способом, а элемент *B* независимо от выбора *A* можно выбрать *n* способом, то пару *(A;B)* можно выбрать $m\cdot n=k$ способом.

2. <u>Примеры</u>

1. Сколькими способами можно поставить в расписание четыре различных предмета в один день?

Решение: Имеем перестановки из четырёх элементов, их количество $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способа

2. В группе из 20 человек нужно выбрать старосту, профорга и культорга. Сколькими способами это можно сделать, если каждый человек может быть избран только один раз?

Решение: Имеем упорядоченные группы по три человека из 20 без повтора, т.е. размещения из 20 по три без возвращений. Их количество $A_{20}^3 = \dfrac{20!}{(20-3)!} = \dfrac{20!}{17!} = 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6840$.

3. Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются подряд три карты (без возврата). Вычислить вероятность того, что среди вынутых карт будет точно один туз.

Решение: Будем считать различными тройки, которые различаются хотя бы одной картой, вне зависимости от порядка взятия карт. тогда общее число всех возможных случаев будет равно числу сочетаний

$$N = C_{52}^3 = \frac{52!}{3!(52-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{1 \cdot 2 \cdot 3(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 49)} = \frac{50 \cdot 51 \cdot 52}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Благоприятствуют нашему событию те и только те случаи, когда один из четырёх тузов вынимается вместе с двумя из остальных 48 карт (снова независимо от порядка). Таких случаев будет $M = C_4^1 \cdot C_{48}^3 = 4 \cdot \dfrac{48 \cdot 47}{1 \cdot 2}$. Искомая вероятность оказывается равной:

$$P\,(\text{точно один туз}) = \frac{C_4^1 \cdot C_{48}^3}{C_{52}^3} = \frac{4 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 3}{52 \cdot 51 \cdot 50} = 0{,}204.$$

2. Основные понятия теории вероятностей.

Для таких понятий, как опыт, эксперимент, наблюдение, измерение мы будем пользоваться одним термином – испытание.

С испытанием мы будем связывать одну или несколько случайных величин, или же будем просто выделять отдельные возможные исходы испытания в качестве событий, т.е. событие – это результат (исход) испытания. Обозначается - А, В, С…

Суммой двух событий *A* и *B* назовём событие *A*+*B* (или $A \cup B$, состоящее из всех событий, принадлежащих, по крайней мере, одному из событий *A* или *B*. (рис. 1)

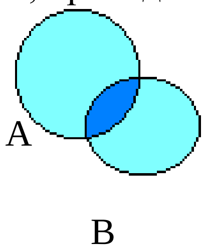


Рис. 1.

Произведением *AB* (или $A \cap B$) называется событие, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и *A*, и *B* (рис. 2.).

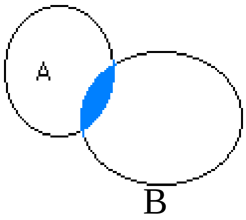


Рис. 2.

Разностью $A \setminus B$ называется событие, состоящее из элементов множества *A*, не принадлежащих *B*. (Рис. 3.)

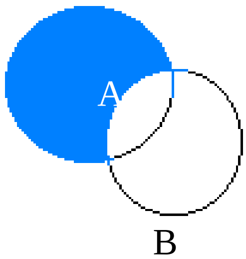


Рис. 3.

<u>Виды событий</u>:

- *Несовместимые* – не появляются вместе при испытании, т.е. $AB = \varnothing$.
- *Единственно возможные* – других нет при испытании.
- *Равновозможные* – нет преимуществ у каждого события перед другими при испытании.

Например:

испытание – бросание монет,
событие *A* – выпал герб,
событие *B* – выпала решка,

события A и B несовместимые, единственно возможные, равновозможные, противоположные.

Нормировка вероятности.

Число n_A появлений любого случайного события A не может быть отрицательным $(n_A \geq 0)$. С другой стороны, если испытание повторяется n раз, то событие A не может произойти более чем n раз $(n_A \leq n)$. Поэтому относительная частота случайного события всегда удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$$

отсюда, естественно, вытекает следующее свойство вероятностей:

Вероятность случайного события заключена между 0 и 1, т.е.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Достоверные и невозможные события.

- Если $P(A)$=1, то событие A – достоверное, оно обязательно произойдет в результате испытания;
- Если $P(A)$=0, то событие A – невозможное, оно никогда не произойдет в результате испытания;
- Если $0 < P(A) < 1$, то событие A – случайное, оно может произойти или не произойти в результате испытания.

Противоположные события.

Два случайных события называются противоположными (или взаимно противоположными), если появление одного из них равносильно появлению другого. Обозначаются A и $\overline{A}$ (читают *не А*), тогда $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Условная вероятность.

Условной вероятностью $P(A \mid B)$ события A относительно события B в случае, когда $P(B) \neq 0$, называется отношение вероятности пересечения событий A и B к вероятности события B:

$$\mathrm{P(A|B)}\,\frac{P(AB)}{P(B)}$$

отсюда P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A), т.е. вероятность появления двух событий равна вероятности одного из них умноженное на условную вероятность другого.

3. Зависимые и независимые события.

События A и B называются независимыми, если

$$P(A) = P(A)*P(B).$$

Пусть, например, последовательно бросаются две монеты; A – выпадение герба при первом бросании, B – выпадение герба при втором бросании. Допустим, что $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$, тогда события A и B независимы.

Если A и B независимые события, то независимы также $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Вероятность события A – это число, обозначаемое буквой Р:

N - общее число исходов,

M - число исходов, благоприятствующих событию A,

тогда $P(A) = \dfrac{M}{N}$

<u>Задача.</u> В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

<u>Решение</u>: обозначим A – первый взятый учебник имеет переплет, B – второй взятый учебник имеет переплет. Тогда $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, а вероятность того, что второй учебник имеет переплет, при условии, что первый взятый учебник был в переплете, т.е. условная вероятность события B будет

$$P(B|A) = \frac{2}{5}$$

Искомая вероятность того, что оба учебника имеют переплет, по теореме умножения будет:

$$P(AB) = P(A)*P(B/A) = \frac{1}{2}*\frac{2}{5} = 0{,}2$$