МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

«СОГЛАСОВАНО»
Руководитель образовательной программы

_________ И.Л. Артемьева
«28» 08 2015 г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Заведующая кафедрой прикладной математики, механики, управления и программного обеспечения

_________ И.Л. Артемьева
«28» 08 2015 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Математический анализ для программистов
Направление подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»
профиль: «Технология программирования»
Форма подготовки очная

курс 1,2 семестр I-IV
лекции 180 час.
практические занятия 144 час.
лабораторные работы ____ час.
в том числе с использованием МАО лек. 0 / пр. 0 / лаб. 0 час.
всего часов аудиторной нагрузки 324 час.
в том числе с использованием МАО 0 Час.
самостоятельная работа 54 час.
в том числе на подготовку к экзамену 126 час.
контрольные работы (количество) 7
курсовая работа / курсовой проект ____ семестр
зачет 2, 3 Семестр
экзамен I-IV Семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 15 марта 2015 г. № 222

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры Алгебры, геометрии и анализа №1 от 2 сентября 2015 г.

Заведующая кафедрой к.ф.-м.н, профессор Шепелева Р.П.
Составитель : д.ф.-м.н. Шлык В.А.

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:

Протокол от «_____» _________________ 200 г. № ______

Заведующий кафедрой ________________________   ___________________
(подпись)   (И.О. Фамилия)

ABSTRACT

Bachelor's degree in 02.03.03 – Software and Administration of Information Systems

Study profile Programming technology

Course title: Mathematical analysis for programmers

Basic part of Block 1, _14_credits

Instructor: Shlyk V.

At the beginning of the course a student should be able to: show knowledge of mathematics got in secondary school.

Learning outcomes: ability to apply knowledge of the mathematical bases of computer science in professional activity.

Course description: real numbers, theory of limits, differential and integral calculus of one-variable functions, differential and integral calculus of multivariable functions, numerical and function series, in particular power series and Fourier series, the elements of functional analysis.

Main course literature:

1. Fikhtengolts G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. Chast' 1 [Fundamentals of mathematical analysis. Part 1]. Saint Petersburg, Lan, 2008. 440 p.

https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:289716&theme=FEFU

2. Fikhtengolts G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. Chast' 2 [Fundamentals of mathematical analysis. Part 2]. Saint Petersburg, Lan, 2008. 463 p.

https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:289718&theme=FEFU

3. Demidovich B.P. Sbornik zadach i uprazhneniy po matematicheskomu analizu [Problem book in mathematical analysis]. Moscow, AST Astrel, 2010. 558 p.

https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:303648&theme=FEFU

4. Butuzov V.F., Krutitskaya N.Ch., Medvedev G.N. et al. Matematicheskiy analiz v voprosakh i zadachakh [Mathematical analysis in questions and tasks]. Saint Petersburg, Lan, 2008. 479 p.

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281654&theme=FEFU

Form of final control: exam (from the 1st to the 4th terms), pass-fail exam (the 2nd and the 3rd terms).

АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Математический анализ для программистов» согласно требованиям ФГОС ВПО входит в базовую часть профессионального цикла направлений подготовки бакалавров «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем». Трудоемкость дисциплины 14 зачетных единиц (324 часа). Математический анализ служит базой для дисциплин: “Дифференциальные уравнения математической физики”, ”Методы вычислений”, “Статистические и вероятностные модели в программировании”, “Физические основы вычислительной техники”. Для успешного изучения дисциплины студенты должны иметь подготовку по математике в объеме средней школы. Дисциплина реализуется в 1,2,3 и 4 семестрах. В 1 семестре дисциплина содержит 36 часов лекций, 36 часов практик. Во 2 семестре дисциплина содержит 54 часа лекций, 36 часов практик. В 3 семестре дисциплина содержит 54 часа лекций, 36 часов практик. В 4 семестре дисциплина содержит 36 часов лекций, 36 часов практик. На самостоятельную работу студентов отводится 180 часов, из них 126 часов на подготовку к экзамену.

Основные разделы курса: вещественные числа, теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной, дифференциальное и интегральное исчисления функций нескольких переменных, числовые и функциональные ряды, в частности, степенные ряды и ряды Фурье, элементы функционального анализа.

Целями изучения дисциплины является приобретение у обучающихся необходимого для осуществления профессиональной деятельности уровня математических компетенций.

Задачами освоения дисциплины являются:

- развитие логического мышления;
- повышение уровня математической культуры;
- овладение современным математическим аппаратом, необходимым для изучения естественнонаучных, общепрофессиональных и специальных дисциплин;
- освоение методов математического моделирования;
- освоение приемов постановки и решения математических задач.

Требования к изучению дисциплины.

В результате изучения дисциплины у студентов формируются следующие компетенции:

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**

Способность применять в профессиональной деятельности знания математических основ информатики (ОПК-2)	Знает	Основные положения теории множеств, теории пределов, теории рядов, дифференциального, интегрального исчисления, методы исследования функций
	Умеет	Проводить исследование функций, брать пределы, производные и интегралы от элементарных функций
	Владеет	Методами построения простейших математических моделей типовых профессиональных задач

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Математический анализ» применяются следующие методы активного/ интерактивного обучения: лекция-беседа, лекция-консультация.

Лекция-беседа. Она предполагает максимальное включение обучающихся в интенсивную беседу с лектором . Преимущество этой формы перед обычной лекцией состоит в том, что она привлекает внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определяет содержание, методы и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории.

Различают несколько ее разновидностей:

лекция-диалог

лекция-дискуссия,

лекция-диспут,

Лекция-консультация. Эта форма занятий предпочтительна при изучении тем с четко выраженной практической направленностью. Варианты проведения подобных лекций:

Вариант 1. Занятия начинаются со вступительной лекции, где преподаватель акцентирует внимание обучающихся на ряде проблем, связанных с практикой применения рассматриваемого положения. Затем слушатели задают вопросы.

Основная часть занятия (до 50% учебного времени) уделяется ответам на вопросы. В конце занятия проводится небольшая дискуссия, свободный обмен мнениями, завершающийся заключительным словом лектора.

Вариант 2. За несколько дней до объявленного занятия преподаватель собирает вопросы слушателей в письменном виде.

Первая часть занятия проводится в виде лекции, в которой преподаватель отвечает на эти вопросы, дополняя и развивая их по своему усмотрению.
Вторая часть проходит в форме ответов на дополнительные вопросы слушателей, свободного обмена мнениями, и завершается заключительным словом преподавателя.

Вариант 3. Слушатели заблаговременно получают материал к занятию. Как правило, он носит не только учебный, но и инструктивный характер, т.е.: представляет собой методическое руководство к практическому использованию.

Слушатели должны изучить материал и подготовить свои вопросы лектору-консультанту. Занятие проводится в форме ответов на вопросы и свободного обмена мнениями

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

I семестр (36 часов).

Раздел I. Теория пределов (18 час)

Тема 1. Вводные математические понятия (4 часа)
Предмет математического анализа. Элементы теории множеств. Операции над множествами. Счетные и несчетные множества. Логические законы. Логические парадоксы.

Тема 2. Действительные числа (4 часа).

Действительные числа. Аксиомы действительных чисел. Множества на числовой прямой. Ограниченные множества в R. Существование точных граней.

Тема 3. Предел последовательности (6 часов).

Предел числовой последовательности. Примеры. Теоремы о пределах. Монотонные последовательности. Существование предела у монотонных последовательностей. Число e. Критерий Коши о существовании конечного предела у последовательности. Предельные точки. Лемма Больцано – Вейерштрасса. Теорема Кантора о вложенных отрезках.

Тема 4. Предел функции (4 часа).

Отображения множеств. Функции действительной переменой. Обзор элементарных функций. Предел функции по Коши, по Гейне. Существование односторонних пределов у монотонных функций. Теоремы о пределах. Определение верхнего и нижнего пределов. Понятие предела функции по базе. Эквивалентные функции. О-символика. Основные неопределенности. Техника вычисления пределов.

Раздел II. Дифференциальное исчисление функции одной переменной (18 часов)
Тема 5 . Непрерывность (6 часов).

Непрерывность функций. Различные определения. Классификация точек разрыва. Теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность функций на множестве. Теоремы Вейерштрасса. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
Тема 6 . Дифференцируемость (12 часов).

Производная; геометрический и механический смысл. Теоремы о вычислении производных. Производные высших порядков. Формула Лейбница Дифференциал функции, его вычисление. Инвариантность формы I- го дифференциала. Дифференциалы высших порядков. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Теоремы Дарбу, Ролля, Лагранжа и Коши. Вычисление пределов функций. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Разложение элементарных функций. Исследование графиков функций. Условия монотонности, выпуклости. Точки экстремума и перегиба. Асимптоты.

2 семестр

Раздел III. Интегрирование функции одной переменной (18 часов)
Тема 7 . Неопределенный интеграл (6 часов)
Неопределенный интеграл. Теорема о множестве первообразных. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования. Замена переменной и интегрирование по частям. Интегрирование элементарных функций. Метод неопределенных коэффициентов. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование дифференциальных биномов. Подстановки Эйлера.

Тема 8 . Определенный интеграл (6 часов)

Определенный интеграл Римана. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу Свойства определенного интеграл. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона – Лейбница. Приложения опреленного интеграла. Длина дуги, площадь фигуры, объем тела. Приближенное вычисление интегралов Римана: формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Тема 9 . Несобственный интеграл (6 часов)

Несобственные интегралы Римана первого рода. Критерий и признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость. Главное значение несобственного интеграла. Несобственные интегралы второго рода.

Раздел IV. Функции многих переменных (36 часов)

Тема 10 . Предел функции многих переменных (4 часа)

Пространство R^n; метрика, множества. Сходимость последовательности в R^n, их свойства. Критерий Коши существования предела. Предельные точки множеств в R^n. Открытые и замкнутые множества. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Предел функции многих переменных. Теоремы о пределах. Двойные и повторные пределы

Тема 11 . Непрерывность функции многих переменных (6 часа)

Непрерывность функции многих переменных. Непрерывные функции на компакте. Теоремы Вейерштрасса и Кантора о равномерной непрерывности.

Тема 12 . Дифференцируемость функции многих переменных (12 часов)

Частные производные и их вычисление. Дифференциал функции многих переменных, его инвариантность. Производная по направлению, градиент функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о смешанных производных. Формулы Тейлора для функций многих переменных и ее следствия. Неявные функции. Теорема существования и дифференцируемости неявной функции.

Тема 13 . Методы оптимизации ФМП (14 часов)

Теорема об обратной функции. Экстремум функции многих переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Понятие об условном экстремуме функции многих переменных. Теория неявных функций. Теорема существования и дифференцирования неявной функции. Неявные функции, заданные системой уравнений. Зависимость функций.

Достаточное условие независимости функций. Условный экстремум функций. Метод множителей Лагранжа. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

III семестр.

Раздел IV. Ряды (32 часов)

Тема 14 .Числовые ряды (8 часов)

Сходимость числовых рядов. Критерий Коши, необходимый признак сходимости. Признаки сходимости знакопостоянных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Ряд Лейбница. Оценка остатка ряда. Признаки Абеля и Дирихле.

Тема 15 . Функциональные ряды (16 часов)

Функциональные последовательности. Основные признаки равномерной сходимости. Теорема о непрерывности предельной функции, о почленном интегрировании и дифференцировании. Функциональные ряды. Основные признаки равномерной сходимости. Степенные ряды. Радиус сходимости. Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

Тема 16. Ряды Фурье (8 часов)

Ряды Фурье по тригонометрической системе. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Условия равномерной сходимости и сходимости в точке.
Понятие об изображении Фурье.

Раздел V. Интегрирование функции многих переменных (22 часов)

Тема 17 . Интегралы, зависящие от параметра (6 часов)

Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Основные признаки равномерной сходимости. Интегрирование и дифференцирование по параметру.

Тема 18 . Кратные интегралы (8 часов)

Двойной интеграл Римана, его свойства, вычисление. Тройной интеграл

Римана, его свойства, вычисление. Понятие о кратном интеграле. Формула замены переменной.

Тема 19 . Криволинейные и поверхностные интегралы (6 часов)

Кривые на плоскости и пространстве. Длина кривой. Касательная и нормаль, кривизна и радиус кривизны. Криволинейные интегралы I и II рода, определение, свойства, вычисление. Независимость Поверхности в трехмерном пространстве. Касательная и нормаль. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Поверхностные интегралы I и II рода, определение, свойства, вычисление.

4 семестр.

Тема 20 .Элементы теории поля (8 часов) .

Основные операции теории поля. Понятия ротора, дивергенции, циркуляции, потока. Формулы Грина, Стокса, Гаусса-Остроградского и их приложения. Соленоидальные и потенциальные поля. Гармонические функции и их свойства.

Тема 21 .Элементы специальных функций (4 часа) .
Гамма - функция. Различные определения гамма функций. Бета-функция и ее связь с гамма-функцией. Основные свойства гамма-функции. Вычисление определенных интегралов.

Тема 22. Внешняя мера Лебега (4 часа) .
Мера Лебега на прямой, ее свойства. Измеримые множества и их свойства.

Тема 23. Интеграл Лебега (4 часа) .
Интеграл Лебега по измеримому множеству. Связь с интегралом Римана. Интеграл Лебега в n-мерном пространстве. Теорема Фубини.

Тема 24. Элементы функционального анализа (16 часов) .

Метрические и нормированные пространства. Банаховы пространства. Гильбертовы пространства. Линейные операторы.

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Практические занятия (144 час.)

Занятие 1. Вводные математические понятия (4 часа)
Предмет математического анализа. Элементы теории множеств. Операции над множествами. Счетные и несчетные множества.

Занятие 2. Действительные числа (4 часа).
Действительные числа. Аксиомы действительных чисел. Множества на числовой прямой. Ограниченные множества в R. Существование точных граней.

Занятие 3. Предел последовательности (6 часов).
Предел числовой последовательности. Примеры. Теоремы о пределах. Монотонные последовательности. Существование предела у монотонных последовательностей. Число е. Критерий Коши о существовании конечного предела у последовательности. Предельные точки. Лемма Больцано – Вейерштрасса. Теорема Кантора о вложенных отрезках.

Занятие 4. Предел функции (4 часа).
Отображения множеств. Функции действительной переменой. Обзор элементарных функций. Предел функции по Коши, по Гейне. Существование односторонних пределов у монотонных функций. Теоремы о пределах. Определение верхнего и нижнего пределов. Понятие предела функции по базе. Эквивалентные функции. О-символика. Основные неопределенности. Техника вычисления пределов.

Занятие 5 . Непрерывность (6 часов).
Непрерывность функций. Различные определения. Классификация точек разрыва. Теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность функций на множестве. Теоремы Вейерштрасса. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Занятие 6 . Дифференцируемость (12 часов).
Производная; геометрический и механический смысл. Теоремы о вычислении производных. Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциал функции, его вычисление. Инвариантность формы I- го дифференциала. Дифференциалы высших порядков. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Теоремы Дарбу, Ролля, Лагранжа и Коши. Вычисление пределов функций. Правило Лопиталя.

Формула Тейлора. Разложение элементарных функций. Исследование графиков функций. Условия монотонности, выпуклости. Точки экстремума и перегиба. Асимптоты.

Занятие 7 . Неопределенный интеграл (10 часов)
Неопределенный интеграл. Теорема о множестве первообразных. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования. Замена переменной и интегрирование по частям. Интегрирование элементарных функций. Метод неопределенных коэффициентов. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование дифференциальных биномов. Подстановки Эйлера.

Занятие 8 . Определенный интеграл (6 часов)

Определенный интеграл Римана. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу Свойства определенного интеграл. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона – Лейбница. Приложения опреленного интеграла. Длина дуги, площадь фигуры, объем тела. Приближенное вычисление интегралов Римана: формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Занятие 9 . Несобственный интеграл (4 часа)
Несобственные интегралы Римана первого рода. Критерий и признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость. Главное значение несобственного интеграла. Несобственные интегралы второго рода.

Занятие 10 . Предел функции многих переменных (4 часа)
Пространство R^n; метрика, множества. Сходимость последовательности в R^n, их свойства. Критерий Коши существования предела. Предельные точки множеств в R^n. Открытые и замкнутые множества. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Предел функции многих переменных. Теоремы о пределах. Двойные и повторные пределы

Занятие 11 . Непрерывность функции многих переменных (4 часа)
Непрерывность функции многих переменных. Непрерывные функции на компакте. Теоремы Вейерштрасса и Кантора о равномерной непрерывности.

Занятие 12 . Дифференцируемость функции многих переменных (8 часов)
Частные производные и их вычисление. Дифференциал функции многих переменных, его инвариантность. Производная по направлению, градиент

функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о смешанных производных. Формулы Тейлора для функций многих переменных и ее следствия. Неявные функции. Теорема существования и дифференцируемости неявной функции.

Занятие 13 . Исследование на экстремум ФМП (10 часов)
Теоема об обратной функции. Экстремум функции многих переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Понятие об условном экстремуме функции многих переменных. Теория неявных функций. Теорема существования и дифференцирования неявной функции. Неявные функции, заданные системой уравнений. Зависимость функций. Достаточное условие независимости функций. Условный экстремум функций. Метод множителей Лагранжа. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

Занятие 14 .Числовые ряды (8 часов)
Сходимость числовых рядов. Критерий Коши, необходимый признак сходимости. Признаки сходимости знакопостоянных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Ряд Лейбница. Оценка остатка ряда. Признаки Абеля и Дирихле.

Занятие 15 . Функциональные ряды (10 часов)
Функциональные последовательности. Основные признаки равномерной сходимости. Теорема о непрерывности предельной функции, о почленном интегрировании и дифференцировании. Функциональные ряды. Основные признаки равномерной сходимости. Степенные ряды. Радиус сходимости. Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

Занятие 16. Ряды Фурье (8 часов)
Ряды Фурье по тригонометрической системе. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Условия равномерной сходимости и сходимости в точке. Понятие об изображении Фурье.

Занятие 17 . Кратные интегралы (6 часов)
Двойной интеграл Римана, его свойства, вычисление. Тройной интеграл Римана, его свойства, вычисление. Понятие о кратном интеграле. Формула замены переменной.

Занятие 18 . Интегралы, зависящие от параметра (8 часов)
Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Основные признаки равномерной сходимости. Интегрирование и дифференцирование по параметру.

Занятие 19 . Криволинейные и поверхностные интегралы (6 часов).
Кривые на плоскости и пространстве. Длина кривой. Касательная и нормаль, кривизна и радиус кривизны. Криволинейные интегралы I и II рода, определение, свойства, вычисление. Независимость Поверхности в трехмерном пространстве. Касательная и нормаль. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Поверхностные интегралы I и II рода, определение, свойства, вычисление.

Занятие 20. Элементы теории поля (6 часов).
Основные операции теории поля. Понятия ротора, дивергенции, циркуляции, потока. Формулы Грина, Стокса, Гаусса-Остроградского и их приложения. Соленоидальные и потенциальные поля. Гармонические функции и их свойства.

Занятие 21. Элементы специальных функций (4 часа).
Гамма - функция. Различные определения гамма-функций.   Бета-функция и ее связь с гамма-функцией. Основные свойства гамма-функции. Вычисление определенных интегралов.

Занятие 22 .Элементы функционального анализа (6 часов).
Метрические и нормированные пространства. Банаховы пространства. Гильбертовы пространства. Линейные операторы.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Математический анализ для программистов» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

Проверка знаний студентов осуществляется путем проведения контрольных работ, сдачи индивидуальных заданий , семестровыми зачетами и экзаменами. Темы контрольных работ и индивидуальных заданий отражены в программах семестровых экзаменов

Темы контрольных работ и индивидуальных заданий и сроки их проведения указаны ниже:

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства - наименование	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Вводные математические понятия (4 часа)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы 1-2
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
2	Действительные числа (4 часа)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	экзамен, вопросы 3-5
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
3	Предел последовательности (4 часа)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест ПР2 контрольная работа	экзамен, вопросы 6-14
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
4	Предел функции (4 часа)	ОПК-2	Знает Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	экзамен, вопросы 15-20
5	Непрерывность (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	экзамен, вопросы 21-27
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	

6	Дифференцируемость (12 часов)	ОПК-2	Знает, умеет, владеет	ПР1 тест ПР12 домашние задания	экзамен, вопросы 28-49
7	Неопределенный интеграл (10 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, Экзамен, вопросы 1-3 зачет, вопросы 1-3
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
8	Определенный интеграл (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, зачет, вопросы 4-17 экзамен, вопросы 4-17
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
9	Несобственный интеграл (4 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, зачет, вопросы 18-25 экзамен, вопросы 18-25
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
10	Функции многих переменных (4 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, зачет, вопросы 26-28 экзамен, вопросы 26-28
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
11	Предел функции многих переменных (4 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, зачет, вопросы 29-32 экзамен, вопросы 29-32
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
12	Дифференцируемость функции многих переменных (8 часов)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	2 семестр зачет, вопросы 33-47 Экзамен, вопросы 33-47
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
13	Исследование на экстремум функции многих переменных (10 часов)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	2 семестр зачет, вопросы 48-51 Экзамен, вопросы 48-51
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
14	Числовые ряды (8 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	3 семестр зачет, вопросы 1-7 Экзамен, вопросы 1-7
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
15	Функциональные ряды	ОПК-2	Знает	ПР2	3 семестр

	(10 часов)			контрольная работа	зачет, вопросы 8-14 Экзамен, вопросы 8-14
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
16	Ряды Фурье	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	3 семестр зачет, вопросы 15-19 Экзамен, вопросы 15-19
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
17	Кратные интегралы (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	3 семестр зачет, вопросы 20-22 Экзамен, вопросы 20-22.
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
18	Интегралы, зависящие от параметра (8 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	3 семестр зачет, вопросы 23-31 Экзамен, вопросы 23-31
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
19	Криволинейные и поверхностные интегралы (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	3 семестр зачет, вопросы 32-47 Экзамен, вопросы 32-47
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
20	Элементы теории поля (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	4 семестр Экзамен, вопросы 1-4
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
21	Элементы специальных функций (4 часа)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	4 семестр Экзамен 5-11
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
22	Элементы функционального анализа (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	4 семестр Экзамен, вопросы 12-17
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	

Типовые контрольные задания, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Основы математического анализа: учебник для вузов по направлениям подготовки и специальностям в области естественных наук и математики, техники и технологий, образования и педагогики ч. 1 / Г. М. Фихтенгольц. Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 440 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:289716&theme=FEFU
2. Основы математического анализа: учебник для вузов по направлениям подготовки и специальностям в области естественных наук и математики, техники и технологий, образования и педагогики ч. 2 / Г. М. Фихтенгольц. Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 463 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:289718&theme=FEFU
3. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов [в 3 т.] : т. 1 / Г. М. Фихтенгольц ; [ред. А. А. Флоринский]. М.: Физматлит, 2006. 679 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:286410&theme=FEFU
4. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович М.:АСТ Астрель, 2010. -558 с . https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:303648&theme=FEFU
5. Математический анализ в вопросах и задачах: учебное пособие для вузов / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев [и др.] ; под ред. В. Ф. Бутузова. Сенкт-Петербург: Лань, 2008. – 479 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281654&theme=FEFU
6. Долгополова, А.Ф. Руководство к решению задач по математическому анализу. Ч. 1 : В 2 ч.: учебное пособие / А.Ф. Долгополова, Т.А. Колодяжная. - Ставрополь: Сервисшкола, 2012. – 168 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=514584
7. Гулай, Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу. Ч. 2 [Электронный ресурс] : В 2 ч.: учебное пособие / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, Д.Б. Литвин. - Ставрополь: Сервисшкола, 2012. - 336 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=514604
8. Краткий курс математического анализа. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды [Электронный ресурс]: Учебник. / Кудрявцев Л.Д. - 3-е изд., перераб. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922101844.html

Дополнительная литература

1. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для физических и механико-математических специальностей вузов [в 3 т.]: т. 2 / Г. М. Фихтенгольц; [ред. А. А. Флоринский]. М.: Физматгиз, 2001. – 863 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:16466&theme=FEFU
2. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для физических и механико-математических специальностей вузов [в 3 т.] : т. 3 / Г. М. Фихтенгольц; [ред. А. А. Флоринский]. М.: Физматлит, 2005. – 727 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:248580&theme=FEFU
3. Математический анализ. Продолжение курса: учебник для вузов [ч. 2] / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов; под ред. А. Н. Тихонова; Московский государственный университет, Софийский университет. М.: Изд-во Московского университета, 1987. – 356 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:54405&theme=FEFU
4. Курс математического анализа: учебник для вузов / С. М. Никольский. М.: Физматлит, 2001. – 591 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:16470&theme=FEFU
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Учеб. пособие в 4 томах. М.: Наука, 1981, Т 1-2
6. Гюншер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Учеб. пособие в 2 томах. М.: Гостехиздат, 1957, Т 1.
7. Кузнецов. Сборник задач по математическому анализу. М.: Лань, 2005.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=455635 Протасов, Ю. М. Математический анализ [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Ю. М. Протасов. - М.: Флинта: Наука, 2012. - 168 с.
2. http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 Математический анализ. Теория и практика: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - 3-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.
3. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922101608.html Курс математического анализа [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Никольский С.М. - 6-е изд., стер. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.
4. http://www.alleng.ru/edu/math9.htm Образовательные ресурсы Интернета - математика. Высшая школа.
5. http://www.alleng.ru/d/math/math347.htm Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. // Ч 1,2, М.: Физматлит, 2005. – 648 с. Образовательные ресурсы Интернета - математика.

6. http://www.alleng.ru/d/math/math98.htm Кудрявцев Л.Д.. Курс математического анализа.// Т. 1,2, М.: Дрофа, 2003. Образовательные ресурсы Интернета - математика.

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного достижения учебных целей занятий должны выполняться следующие основные требования:

-соответствие действий обучающихся ранее изученным на лекционных и семинарских занятиях методикам и методам.

-максимальное приближение действий студентов к реальным, соответствующим будущим функциональным обязанностям.

-поэтапное формирование умений и навыков, т.е. движение от знаний к умениям и навыкам, от простого к сложному и т.д..

-использование при работе на тренажерах или действующей технике фактических документов, технологических карт, бланков и т.п.

-выработка индивидуальных и коллективных умений и навыков.

- распределение времени, отведенного на занятие, на решение каждой задачи;

-подбор иллюстративного материала (графиков, таблиц, схем), необходимого для решения задач, продумывание расположения рисунков и записей на доске.

Студент должен:

- научиться работать с книгой, документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой.

-формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

. На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства. Формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Необходимо поддерживать непрерывный контакт с аудиторией, отвечать на возникающие у студентов вопросы. На практических занятиях преподаватель разбирает примеры по пройденной теме. Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения. Если знаний полученных в аудитории оказалось недостаточно, студент может самостоятельно повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами, которые собраны в изучаемом курсе в системе Bb dvfu. После выполнения задания, студент отправляет его на проверку преподавателю в соответствующем «Назначении». Работа должна быть отослана в формате PDF одним документом. По данному курсу разработаны методические указания, которые выложены с системе Bb dvfu в соответствующем разделе.

.

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебные аудитории кампуса ДВФУ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

по дисциплине «Математический анализ для программистов**»**

Направление подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»
профиль «Технология программирования»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1-4 недели	Контрольная работа	1 пара	Оценка в баллах
2	5-7 недели	Контрольная работа	1 пара	Оценка в баллах
3	8-9 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Оценка в баллах
4	10-15 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Оценка в баллах
5	15-17 недели	Контрольная работа	1 пара	Оценка в баллах
6	19-21 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Оценка в баллах
7	22-23 неделя	Контрольная работа	1 пара	Оценка в баллах
8	24-35 недели	Контрольная работа	1 пара	Оценка в баллах
9	37-41 недели	Контрольная работа	1 пара	Оценка в баллах
10	42-50 недели	Контрольная работа	1 пара	Оценка в баллах
11	55-57 недели	Контрольная работа	1 пара	Оценка в баллах
12	58-69 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Оценка в баллах
13	70-71 недели	Контрольная работа	1 пара	Оценка в баллах

Рекомендации по самостоятельной работе студентов

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий и контрольных работ по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены ниже). Критерии оценки: студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя.

Задачи для самостоятельного решения по теме «Теория множеств»

1.12. Пусть Γ_λ – график функции $y = x^{-\lambda}$, $0 < x < \infty$. Найдите множества:

а) $\bigcap\limits_{\lambda \ge 1} \Gamma_\lambda$;

б) $\bigcup\limits_{\lambda \ge 1} \Gamma_\lambda$;

в) $\Gamma_\lambda \,\Delta\, \Gamma_\mu \quad (\lambda \ne \mu)$;

г) $\Gamma_\lambda \,\Delta\, \Gamma_\mu \,\Delta\, \Gamma_\nu \quad (\lambda \ne \mu \ne \nu)$.

1.15. Докажите соотношения:

а) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;

б) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$;

в) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A \cdot (1 - \chi_B)$;

г) $\chi_{CA} = 1 - \chi_A$;

д) $\chi_\varnothing = 0, \quad \chi_X = 1$;

е) $\chi_A \le \chi_B \Leftrightarrow A \subset B$.

Распространите соотношения а) и б) задачи 1.15 для характеристических функций объединения и пересечения двух множеств на любые конечные объединения и пересечения множеств.

1.24. Докажите отношения:

а) $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha \setminus \bigcup\limits_\alpha B_\alpha \subset \bigcup\limits_\alpha \left(A_\alpha \setminus B_\alpha\right)$;

б) $\bigcup\limits_\alpha \bigcap\limits_\beta A_{\alpha,\beta} \subset \bigcap\limits_\beta \bigcup\limits_\alpha A_{\alpha,\beta}$;

в) $(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha) \setminus (\bigcup\limits_\beta B_\beta) = \bigcup\limits_\alpha \bigcap\limits_\beta \left(A_\alpha \setminus B_\beta\right)$.

Покажите на примере, что в общем случае включения здесь в другую сторону не верны.

1.28. Найдите множества Y и Z, принадлежащие пространству X, если для любого $A \subset X$ справедливо равенство $A \cap Y = A \cup Z$.

1.29. Докажите соотношения:

а) $\mathbf{C}\, A \,\Delta\, \mathbf{C}\, B = A \,\Delta\, B$;

б) $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

в) $A \,\Delta\, B = C \quad \Leftrightarrow \quad B \,\Delta\, C = A \quad \Leftrightarrow \quad C \,\Delta\, A = B$.

1.30. Докажите равенства:

а) $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\cdot\chi_A\cdot\chi_B$, б) $\chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x)\cdot\chi_B(y)$.

1.31. Выразите операции $\bigcup, \bigcap$ через операции:

а) $\bigcap, \Delta$; б) $\bigcup, \Delta$; в) $\Delta, \setminus$.

1.32. Докажите, что следующие равенства в общем случае неверны:

а) $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\setminus(A\setminus C)$ (сравните с 1.18 в);

б) $A\setminus(B\,\Delta\,C) = (A\setminus B)\,\Delta\,(A\setminus C)$ (сравните с 1.18 г);

в) $A\,\Delta\,(B\bigcup C) = (A\,\Delta\,B)\bigcup(A\,\Delta\,C)$;

г) $A\,\Delta\,(B\bigcap C) = (A\,\Delta\,B)\bigcap(A\,\Delta\,C)$;

д) $A\,\Delta\,(B\setminus C) = (A\,\Delta\,B)\setminus(A\,\Delta\,C)$;

е) $A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C) = (A\,\Delta\,B)\,\Delta\,(A\,\Delta\,C)$.

1.33. Докажите включения:

а) $A\,\Delta\,B \subset (A\,\Delta\,C)\bigcup(B\,\Delta\,C)$;

б) $(A\bigcup C)\,\Delta\,(B\bigcup D) \subset (A\,\Delta\,B)\bigcap(C\,\Delta\,D)$;

в) $(A\bigcap C)\,\Delta\,(B\bigcap D) \subset (A\,\Delta\,B)\bigcap(C\,\Delta\,D)$.

1.34. Дана убывающая последовательность множеств $A_1 \supset \ldots \supset A_n$. Докажите равенство: $A_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left(A_i\setminus A_{i+1}\right)\bigcup\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$.

1.35. Дана последовательность множеств $A_1,\ A_2,\ \ldots$. Обозначим через $\overline{A}$ – совокупность всех элементов, принадлежащих бесконечному числу множеств A_n, а через $\underline{A}$ – совокупность всех элементов, не принадлежащих только конечному числу множеств A_n. Докажите, что а) $\overline{A} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$; б) $\underline{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

1.39. Докажите равенства:

а) $A \times B = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A = \varnothing$ и $B = \varnothing$;

б) $A \times B \subset C \times D \quad \Leftrightarrow \quad A \subset C$ и $B \subset D$;

в) $A \times B = C \times D \quad \Leftrightarrow \quad A = C$ и $B = D$;

г) $A \times \left(B \bigcap C \right) = \left(A \times B \right) \bigcap \left(A \times C \right)$;

д) $\left(B \bigcap C \right) \times A = \left(B \times A \right) \bigcap \left(C \times A \right)$;

е) $(A \times B) \setminus (C \times D) = [(A \bigcap C) \times (B \setminus D)] \bigcup [(A \setminus C) \times B]$.

Задачи для самостоятельного решения по теме «Математическая индукция»

3.10. Покажите, что при всех натуральных $n \geq 2$ справедливо неравенство $a^n + b^n \leq c^n$, где a, b – длины катетов, а c – длина гипотенузы прямоугольного треугольника.

3.11. Докажите неравенства:

а) $(1 + a)^n \geq 1 + a\,n, \quad (a > -1, \quad n \geq 1)$ – неравенство Бернулли;

б) $(1 - a)^n < \dfrac{1}{1 + n\,a}$, $\quad (0 < a < 1)$;

в) $(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где все числа x_n одного знака и больше -1;

г) $\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n \right)^r \leq n^{r-1} \cdot \left(x_1^r + x_2^r \ldots + x_n^r \right), \quad \left(x_i \geq 0, \quad r \geq 1 \right)$;

д) $\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n \right)^r \geq x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r , \quad \left(x_i \geq 0, \quad r \geq 1 \right)$.

3.12. Докажите равенства:

а) $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\cdot\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\dfrac{x}{2}}$ где $n \ge 1$, $x \ne 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

б) $\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\dfrac{x}{2}}$, где $n \ge 1$, $x \ne 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

в) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$, где $n \ge 1$, $x \ne \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

г) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x = \dfrac{\sin(2nx)}{\sin x}$, где $n \ge 1$, $x \ne \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

д) $\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \sin\dfrac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n} = ctg\,\dfrac{\pi}{2n}$, где $n \ge 2$.

Указание. Воспользуйтесь формулами:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right].$$

3.13. Докажите равенства:

а) $\sin x + \sin(x+h) + \ldots + \sin(x+nh) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}h\right)\cdot\sin\left(\dfrac{2x+nh}{2}\right)}{\sin\dfrac{h}{2}}$, где $n \ge 1$, $h \ne 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

б) $\cos x+\cos(x+h)+\ldots+\cos(x+nh)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}h\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2x+nh}{2}\right)}{\sin\dfrac{h}{2}}$, где $n\geq 1$, $h\neq 2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$;

в) $\cos\dfrac{\pi}{k}+\cos\dfrac{2\pi}{k}+\cos\dfrac{3\pi}{k}+\ldots+\cos\dfrac{n\pi}{k}=\sin\dfrac{n\pi}{2k}\cdot\cos\dfrac{n+1}{2k}\pi$, где $n\geq 1$, $k\in\mathbf{Z}$;

г) $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+\ldots+2^{n}\cdot\operatorname{tg}\left(2^{n}\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha-2^{n+1}\cdot\operatorname{ctg}\left(2^{n+1}\alpha\right)$;

д)
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\ldots+\operatorname{tg}\left(2^{n-1}\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(2^{n-1}\alpha\right)=2\left(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\left(2^{n}\alpha\right)\right)$

е) $(1+\sec 2\alpha)\cdot(1+\sec 4\alpha)\cdot\ldots\cdot\left(1+\sec\left(2^{n}\alpha\right)\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\left(2^{n}\alpha\right)}{\operatorname{tg}\alpha}$, где $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$;

ж) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+\ldots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^{2}+n+1}=\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+2}$, где $n\geq 1$.

3.14. Докажите справедливость следующих равенств:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$, $n\geq 1$;

б) $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{(n+3)\cdot(n+4)}=\dfrac{n}{4(n+4)}$, $n\geq 1$;

в) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$, $n\geq 1$;

г) $\dfrac{7}{1\cdot 8}+\dfrac{7}{8\cdot 15}+\dfrac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\dfrac{7}{(7n-6)(7n+1)}=1-\dfrac{1}{7n+1}$, $n\geq 1$;

д) $\dfrac{1}{4\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\dfrac{1}{4n\,(4n+4)}+\dfrac{1}{16\,(n+1)}=\dfrac{1}{16}$, $n\geq 1$;

е) $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)\cdot(a+2)}+\ldots+\dfrac{1}{(a+n-1)\cdot(a+n)}=\dfrac{n}{a(a+n)}$, $n\geq 1$.

3.15. Докажите следующие утверждения:

а) $7^{2n}-1$ при всех $n\geq 1$ делится на 48;

б) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ при всех $n \ge 0$ делится на 133;

д) $3 \cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ при всех $n \ge 1$ делится на 17;

г) $5^{2n+1}+1$ при всех $n \ge 1$ делится на 6.

3.16. Докажите, что сумма внутренних углов выпуклого n–угольника равна $\pi\left(n-2\right)$, $n \ge 3$. Покажите, что это утверждение верно и для любого невыпуклого многоугольника.

3.17. Докажите что любую сумму денег, большую 7, можно уплатить (без сдачи) денежными знаками достоинством в 3 и 5 рублей.

3.18. Покажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

3.19. Докажите утверждения:

а) $n^{p}-n$ делится на p, где p – целое число, $n \ge 1$ (малая теорема Ферма);

б) $n^{5}-n$ делится на 30 при всех $n \ge 1$;

в) $n^{7}-n$ делится на 42 при всех $n \ge 1$;

г) $n^{3}+5n$ делится на 6 при всех $n \ge 1$;

д) $4^{n}+15n-1$ делится на 9 при всех $n \ge 1$.

Указание. В задачах б), в) воспользуйтесь результатом задачи а).

3.20. Покажите, что числа $\left(6+\sqrt{37}\right)^{2n-1}+\left(6-\sqrt{37}\right)^{2n-1}$, $\sqrt{37}\cdot\left[\left(6+\sqrt{37}\right)^{2n-1}-\left(6-\sqrt{37}\right)^{2n-1}\right]$ при всех $n \ge 1$ – целые.

3.21. Докажите следующие неравенства:

а) $\dfrac{4^n}{n+1} \le \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n \ge 1$;

б) $n^{n+1}>(n+1)^{n}$, $n \ge 3$;

в) $2^{n+2}>2n+5$, $n \ge 1$;

г) $2^{n}>n^{2}$, $n \ge 5$;

д) $2!\cdot 4!\cdot \ldots \cdot (2n)! > \left[(n+1)!\right]^{n}$, $n \ge 2$.

3.22. Без применения формулы бинома Ньютона докажите неравенство

$$a^{n}+b^{n} \le (a+b)^{n}, \quad (a, b \ge 0, \quad n \ge 1).$$

3.23. На сколько треугольников может быть разбит выпуклый n–угольник своими непересекающимися диагоналями? Определите число N таких диагоналей.

3.24. Докажите, что при любом $n \geq 1$ с помощью циркуля и линейки с заданной единицей длины можно построить отрезок длиной $\sqrt{n}$.

3.25. На плоскости проведено n произвольных прямых. Докажите, что черной и белой красками можно так раскрасить плоскость, что любые две части, имеющие общую сторону, будут окрашены в разные цвета.

3.26. Докажите, что длина стороны правильного 2^n – угольника $(n \geq 2)$, вписанного в круг радиуса R, равна

$$a_{2^n} = R \cdot \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{2n-1 \text{ двойки}}}\,.$$

3.27. Докажите равенства:

а) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$;

б) $\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}}}} = \dfrac{1}{2} \cdot \cos\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^n}$, если выражение слева содержит n предикатов. Вычислите левую часть выражения б), заменив в нем $\dfrac{1}{4}$ на $\dfrac{1}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

3.28. Докажите равенства:

а) $(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha$, $\left(i = \sqrt{-1}, \quad n \geq 1\right)$;

б) $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos\left(2^n \alpha\right) = \dfrac{\sin\left(2^{n+1}\alpha\right)}{2^{n+1} \cdot \sin\alpha}$, $(\alpha \in \mathbf{R},\ n \geq 0)$.

3.29. Найдите наименьшие натуральные n, при которых верны неравенства:

а) $2^n > n^2 + 4n + 5$;

б) $3^n > 2^n + 7n$;

в) $n^4 < 4^n$;

г) $2^n > n^2$.

3.30. Дана последовательность x_n, удовлетворяющая рекуррентному соотношению:

$$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1},\ n \geq 1;\ x_0 = 2,\ x_1 = 3.$$

Докажите, что $x_n = 2^n + 1,\ n \geq 0$.

3.31. Последовательность чисел Фибоначчи определяется из рекуррентного соотношения:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\quad n \geq 1;\quad F_0 = 0,\quad F_1 = 1.$$

Покажите, что

а) $F_{5n}\quad (n \geq 0)$ делится на 5;

б) $F_{n+1} \cdot F_{n+2} - F_n \cdot F_{n+3} = (-1)^n$.

3.32. Докажите, что если выпуклый многоугольник *P* содержится в многоугольнике *Q*, то периметр *P* меньше, чем периметр *Q*. Справедливо ли данное утвёрждение, если *P* невыпуклый?

Указание. Проведите прямую через одну из сторон многоугольника *P*; она отсечет от *Q* многоугольник $Q' \supset P$, периметр которого меньше периметра *Q*. Проведите индукцию по числу тех сторон внутреннего выпуклого многоугольника, которые целиком не принадлежат периметру внешнего многоугольника.

3.33. Пусть $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ – произвольные положительные числа, причем $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$.

Указание. При $n = k + 1$ рассмотрите случаи: а) $x_1 = \ldots = x_{k+1} = 1$; б) $x_k > 1$, $x_{k+1} < 1$.

3.34. Докажите справедливость неравенств:

а) $\dfrac{a_1^n + a_2^n}{2} \geq \left(\dfrac{a_1 + a_2}{2}\right)^n$, $(a_1,\ a_2 > 0,\quad n \geq 1)$.

б) $\sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \ldots + \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \geq \sqrt{(u_1 + \ldots + u_n)^2 + (v_1 + \ldots + v_n)^2}$ для любых действительных чисел $u_1,\ u_2, \ldots, u_n,\quad v_1,\ v_2, \ldots, v_n,\ n \geq 1$.

Указание: Воспользуйтесь задачей 5.3.

3.35. Докажите равенства:

а) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$, $n\geq 2$;

б) $\left(1-\frac{4}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=-\frac{2n+1}{2n-1}$, $n\geq 1$.

3.36. Докажите справедливость неравенства:

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n\ \textit{корней}}\leq\frac{1+\sqrt{4a+1}}{a},\quad (a>0,\ n\geq 1).$$

3.37. Докажите справедливость неравенств:

а) $\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\leq 1,\ \ n\geq 1$;

б) $|\sin nx|\leq n|\sin x|$, $(x\in\mathbf{R},\ \ n\geq 1)$;

в) $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\right|\leq\sum\limits_{k=1}^{n}|\sin\alpha_k|,\quad (0<\alpha_k<\pi)$.

г) $x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\ldots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geq n+1$, $(x>0,\quad n\geq 1)$.

Указание. Покажите, что из верности неравенства при $n=k$ вытекает верность его при $n=k+2$.

3.38. Используя то, что $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, докажите неравенства:

а) $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\cdot\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$;

б) $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n\geq 2$;

в) $\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\leq 1+\ln n$, $n\geq 1$.

г) $2^n\cdot(n!)^2\leq(2n)!\leq 4^n\cdot(n!)^2$.

3.39. Покажите, что сфера разделяется n плоскостями, проходящими через ее центр на n^2-n+2 части, если никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр.

3.40. Применяя метод обратной математической индукции, докажите неравенства:

а) $\sin\left(\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}\right)\geq\frac{\sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_n}{n}$, $(0\leq\alpha_i\leq\pi)$;

б) $\left(\dfrac{a_1+\ldots+a_p}{p}\right)^n \le \dfrac{a_1^n+\ldots+a_p^n}{p}, \ (n,\ p \ge 1).$

Указание. Воспользуйтесь задачей 5.33 а) и проведите индукцию по p.

Индивидуальное задание по производным

Вариант № 1

найти производные y'_x :

1. $y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$,

2. $y=5tg\dfrac{x}{5}+tg\dfrac{\pi}{8}$,

3. $y=\dfrac{2}{3}arctg\,x+\dfrac{1}{3}arctg\,\dfrac{x}{1-x^2}$,

4. $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$,

5. $y=e^{ax}(a\sin x-\cos x)$,

6. $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=c$,

7. $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$

8. $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(в 8 применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 2

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt{1+\sqrt{2px}}$,

2. $y=\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin 2x$,

3. $y=arctg(x^2-3x+2)$,

4. $y=x\cdot e^{1-\cos x}$,

5. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,

6. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

7. $\begin{cases} x=2t+3t^2, \\ y=t^2+2t^3; \end{cases}$

8. $y=\dfrac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 3

найти производные y'_x:

1. $y = \sqrt[3]{x^6 - 8}$,

2. $y = \sin^2 \frac{x}{3} \cdot ctg \frac{x}{3}$,

3. $y = \arccos\sqrt{1-3x}$,

4. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$,

5. $y = e^x \cdot (\sin 3x - 3\cos 3x)$,

6. $\sin(xy) + \cos(xy) = tg(x+y)$,

7. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2; \end{cases}$

8. $y = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 4

найти производные y'_x:

1. $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \cdot \arccos\frac{x}{a}$,

2. $y = \cos 2x \cdot \ln x$,

3. $y = \arcsin\left(\sqrt{\sin x}\right)$,

4. $y = \ln\frac{1-e^x}{e^x}$,

5. $y = 10^{xtgx}$,

6. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$,

7. $\begin{cases} x = a\left(\ln tg\dfrac{t}{2} + \cos t - \sin t\right), \\ y = a(\sin t + \cos t); \end{cases}$

8. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 5

найти производные y'_x:

1. $y = x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x$,

2. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$,

3. $y = x \cdot \arcsin(\ln x)$,

4. $y = \ln\left(e^x \cos x + e^{-x}\sin x\right)$,

5. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$,

6. $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$,

7. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$

8. $y = \cdot\sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 6

найти производные y'_x :

1. $y=\dfrac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$,

2. $y=\dfrac{1}{18}\sin^6 3x-\dfrac{1}{24}\sin^8 3x$,

3. $y=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,

4. $y=e^x\sin x\cos^3 x$,

5. $y=a^{\sin^3 x}$,

6. $xy=arctg\,\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$

8. $y=(\cos x)^{tgx}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 7

найти производные y'_x :

1. $y=3^{\sin x}$,

2. $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$,

3. $y=\dfrac{\arcsin 4x}{1-4x}$,

4. $y=\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$,

5. $y=\ln arctg\,\dfrac{1}{1+x}$,

6. $e^y=x+y$,

7. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{(1+t)^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$

8. $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 8

найти производные y'_x :

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$,

2. $y=\dfrac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cdot\cos x}$,

3. $y=\arcsin(n\sin x)$,

4. $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$,

5. $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$,

6. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$,

7. $\begin{cases} x=a\cdot\cos^3 t, \\ y=b\cdot\sin^3 t; \end{cases}$

8. $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 9

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt{1+tg^2x+tg^4x}$,

2. $y=\sin^2\frac{x}{3}\cdot ctg\frac{x}{2}$,

3. $y=\arccos\sqrt{1-3x}$,

4. $y=\log_3\left(x^2-\sin x\right)$,

5. $y=e^{\sqrt{\ln x}}$,

6. $\ln y+\frac{x}{y}=c$,

7. $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}, \\ y=\frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}; \end{cases}$

8. $y=(arctgx)^x$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 10

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,

2. $y=\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$,

3. $y=\frac{2}{3}arctgx+\frac{1}{3}arctg\frac{x}{1-x^2}$,

4. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$,

5. $y=10^{2x-3}$,

6. $x^3+x^2y+y^2=0$,

7. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t}; \end{cases}$

8. $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 11

найти производные y'_x :

1. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$,

2. $y=\frac{\sin^2 x}{1+ctgx}+\frac{\cos^2 x}{1+tgx}$,

3. $y=arctg\frac{x+1}{x-1}$,

4. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,

5. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,

6. $y^2=x+\ln\frac{y}{x}$,

7. $\begin{cases} x=\frac{2at}{1+t^2}, \\ y=\frac{a(1-t^2)}{1+t}; \end{cases}$

8. $y=(\cos x)^{\sin x}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 12

найти производные y'_x :

1. $y = \sqrt[11]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}}$,
2. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$,
3. $y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2}\arcsin x$,
4. $y = \ln tgx$,
5. $y = \sqrt{1 + e^x}$,
6. $y^2 = 2px$,
7. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t); \end{cases}$
8. $y = x^{\ln x}$

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 13

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{1 - \sqrt[3]{2x}}{1 + \sqrt[3]{2x}}$,
2. $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$,
3. $y = arctg\, x^2$,
4. $y = xe^x$,
5. $y = e^{\arcsin 2x}$,
6. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,
7. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t; \end{cases}$
8. $y = x^{\ln x}$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 14

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$,
2. $y = \dfrac{1}{4} tg^4 x$,
3. $y = \sqrt{1 + tg\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$,
4. $y = \dfrac{x^2}{arctgx}$,
5. $y = e^x \cos x$,
6. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$,
7. $\begin{cases} x = \dfrac{t + 1}{t}, \\ y = \dfrac{t - 1}{t}; \end{cases}$
8. $y = (arctg\, x)^x$.

(в 8 примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 15

найти производные y'_x:

1. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$,
2. $y=\sqrt{x}\,arctg\,x$,
3. $y=x\ln x$,
4. $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$,
5. $y=e^x(\sin 3x-3\cos 3x)$,
6. $2^x+2^y=2^{x+y}$,
7. $\begin{cases} x=a(\phi-\sin\phi), \\ y=a(1-\cos\phi); \end{cases}$
8. $y=(\sin x)^{\cos x}$ (применив логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 16

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$,
2. $y=\sin(\sin x)$,
3. $y=\arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$,
4. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,
5. $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$,
6. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,
7. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t; \end{cases}$
8. $y=x^{\frac{1}{x}}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 17

найти производные y'_x :

1. $y=\dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$,
2. $y=arctgx+\arcsin x$,
3. $y=e^x\arcsin x$,
4. $y=\sqrt[3]{a+bx^3}$,
5. $y=\sqrt{1+e^x}$,
6. $xy=arctg\,\dfrac{x}{y}$,
7. $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=t^3; \end{cases}$
8. $y=x\sqrt{x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 18

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$,

2. $y = x ctg x$,

3. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$,

4. $y = \dfrac{1}{2}\ln tg\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$,

5. $y = \ln(\arcsin 5x)$,

6. $xy = arctg\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$

8. $y = \sqrt[x]{x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 19

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$,

2. $y = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x$,

3. $y = \dfrac{e^x}{x^{\frac{2}{3}}}$,

4. $y = 2x + 5\cos^3\dfrac{1}{x}$,

5. $y = arctg\ln\dfrac{1}{x}$,

6. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$,

7. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2; \end{cases}$

8. $y = x^{\sin x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 20

найти производные y'_x :

1. $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$,

2. $y = arctg x + \arcsin x$,

3. $y = e^x \arcsin x$,

4. $y = \sqrt[3]{a+bx^3}$,

5. $y = \sqrt{1+e^x}$,

6. $xy = arctg\dfrac{x}{y}$,

7. $\begin{cases} x = 2t-1, \\ y = t^3; \end{cases}$

8. $y = x\sqrt{x}$ (применив логарифмическое дифференцирование).

Вариант № 21

найти производные $\boldsymbol{y'_x}$:

1. $y = arctg\left(x^2 - 3x + 2\right)$,

2. $y = x^2 \cdot arctgx^3$,

3. $y = \dfrac{2\cos x^3}{\sqrt{\cos^2 x}}$,

4. $y = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{1}{2}arctgx$,

5. $y = \ln\left(e^x \cos x + e^{-x}\sin x\right)$,

6. $\begin{cases} x = 3\cos x, \\ y = 4\sin x; \end{cases}$ $\dfrac{dy}{dx} = ?$,

7. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$,

8. $x^y = y^x$. *(применить логарифмическое диф-ние)*

Вариант № 22

найти производные $\boldsymbol{y'_x}$:

1. $y = \sin\left(3x + 5\right)$,

2. $y = \sin(\sin x)$,

3. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$, .

4. $y = \dfrac{x}{e^x}$,

5. $y = \ln tg\dfrac{1}{1+x}$,

6. $y = \cos(x + y)$,

7. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t}{t^2} - 1, \end{cases}$

8. $y = x^{\sin x}$. (применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 23

найти производные $\boldsymbol{y'_x}$:

1. $y = \sqrt{1 - 2x^3}$,

2. $y = \cos^3 4x$,

3. $y = 10^{x \cdot tgx}$,

4. $y = \ln^2 x$,

5. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$,

6. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$,

7. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3; \end{cases}$

8. $y = x^x$.

(в 8-м примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 24

найти производные y'_x :

1. $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$,

2. $y=\cos^2 x$,

3. $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$,

4. $y=x\cdot 10^x$,

5. $y=tg\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$,

6. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$,

7. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}$

8. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

(в 8-м примере применить логарифмическое дифференцирование)

Вариант № 25

найти производные y'_x :

1. $y=\sqrt[3]{2+x^2}$,

2. $y=\sin^2(\cos 3x)$,

3. $y=a^x x^a$,

4. $y=\dfrac{1}{3^x}$,

5. $y=\dfrac{1}{\ln x}$,

6. $y=1+xe^y$,

7. $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ $\dfrac{dy}{dx}=?$

8. $y=x\cdot e^x$.

(в 8-м примере применить логарифмическое дифференцирование)

Индивидуальное задание № 5(Интегралы)

Вариант №1

1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \ln\left(1+x^2\right)dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin x\cdot\sin 3xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Вариант №2

1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \ln\left(1+x^2\right)dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin x \cdot \sin 3x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Вариант №3

1. Найти интеграл

$$\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x^2 e^x \sin x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^6 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{2xdx}{x^2+3x-4}$$

Вариант №4

1. Найти интеграл

$$\int \cos(1-2x)dx$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin 7x \cdot \sin 3x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2)(x+1)}$$

Вариант №5

1. Найти интеграл

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^6 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx$$

Вариант №6

1. Найти интеграл

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5} dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int arctgx dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int x^3 \sqrt{a^2-x^2} dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{\sin x \, dx}{(1-\cos x)^2}$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2-1)}$$

Вариант №7

1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^4 x\, dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+x-6}dx$$

Вариант №8

1. Найти интеграл

$$\int tg^2 xdx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x\cdot 3^x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^2 3xdx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$$

Вариант №9

1. Найти интеграл

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int arctg\sqrt{x}\,dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^4 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$$

Вариант №10

1. Найти интеграл

$$\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \arcsin x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^5 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+3x}dx$$

Вариант №11

1. Найти интеграл

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x\cdot arctgx\,dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^2 5x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{x^3 + x}$$

Вариант №12

1. Найти интеграл

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}}\, dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int \arccos x\, dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[4]{x}}}\, dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x\, dx}{x^3 - 1}$$

Вариант №13

1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{2x-1}.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int xe^{-x} dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \cos^5 x dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{dx}{x^2 - x}$$

Вариант №14

1. Найти интеграл

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int 3x\cos 3x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$$

Вариант №15

1. Найти интеграл

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+a^2}dx.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x\cos x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\, dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$$

Вариант №16

1. Найти интеграл

$$\int tg3x\, dx$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x\cdot\sin 2x dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$$

Вариант №17

1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}.$$

2. Вычислить интегрированием по частям

$$\int x \cdot arctgx\, dx$$

3. Найти интеграл путем замены переменной

$$\int \frac{2x}{x^4 + 3} dx$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin 4x \cdot \cos^2 x\, dx$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №1

Изменить порядок интегрирования

. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx.$

. Вычислить

$$\iint\limits_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №2

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №3

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 (y \le 0).$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №4

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$x = 8 - y^2, x = -2y.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №5

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_x^0 f dx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x} (x \geq 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \frac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №6

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} fdx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_0^{\arccos y} fdx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2 (x \geq 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2}, y = \frac{1}{2x}, x = 16.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №7

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_0^{\sqrt{-y}} fdx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$x = 5 - y^2, x = -4y.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №8

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} fdx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^3.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$x^2+y^2=12, -\sqrt{6}y=x^2\,(y\le 0).$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №9

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1}dx\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}}fdy+\int_{-1}^{0}dx\int_{0}^{x^2}fdy.$$

. Вычислить

$$\iint_D(4xy+16x^2y^2)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y=\sqrt{12-x^2}, y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}, x=0, (x\ge 0).$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №10

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}fdy+\int_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0}fdy.$$

. Вычислить $\iint_D(12xy+9x^2y^2)dxdy; D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y=\frac{3}{2}\sqrt{x}, y=\frac{3}{2x}, x=9.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №11

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{0}^{1}dx\int_{1-x^2}^{1}fdy+\int_{1}^{e}dx\int_{\ln x}^{1}fdy.$$

. Вычислить

$$\iint_D(8xy+9x^2y^2)dxdy; D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y=\sqrt{24-x^2}, 2\sqrt{3}y=x^2, x=0, (x\ge 0).$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №12

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (24xy + 18x^2 y^2) dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \sin x, y = \cos x, x = 0 (x \geq 0).$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №13

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\pi .4} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} f dx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (12xy + 27x^2 y^2) dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x} (x \geq 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = 20 - x^2, y = -8x.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №14

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f dy.$$

. Вычислить

$$\iint_D (8xy + 18x^2 y^2) dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2 (x \geq 0).$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \sqrt{18 - x^2}, y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №15

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} f dx.$$

. Вычислить

$$\iint_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = 32 - x^2, y = -4x.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №16

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 fdx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 fdx.$$

. Вычислить

$$\iint_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy; D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = \frac{2}{x}, y = 5e^x, y = 2, y = 5.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №17

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^0 fdx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 fdx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (24xy + 48x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$x^2 + y^2 = 36, 3\sqrt{2}y = x^2 (y \ge 0).$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №18

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^3} fdx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} fdx.$$

. Вычислит

$$\iint_D (6xy + 24x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 4.$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №19

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} fdy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdy.$$

. Вычислить

$$\iint_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = 6 - \sqrt{36 - x^2}, y = \sqrt{36 - x^2}, x = 0, (x \geq 0).$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №20

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} fdx.$$

. Вычислить

$$\iint_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \frac{25}{4} - x^2, y = x - \frac{5}{2}.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №21

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-0}^{y} fdx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^{1} fdx.$$

. Вычислит

$$\iint_D (44xy + 16x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x} (x \geq 0).$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}, x = 16.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №22

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} fdy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} fdy.$$

. Вычислить
$$\iint_D (4xy+176x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3 \, (x \ge 0).$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=\frac{2}{x}, y=7e^x, y=2, y=7.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №23

Изменить порядок интегрирования
$$\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f dy.$$

. Вычислить
$$\iint_D (xy-4x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=27-y^2, x=-6y.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №24

Изменить порядок интегрирования
$$1\int_{-\sqrt{2}}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f dx.$$

. Вычислить
$$\iint_D (4xy+176x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$x=\sqrt{72-y^2}, 6x=y^2, y=0 (y \ge 0).$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №25

Изменить порядок интегрирования
$$1\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy.$$

. Вычислить
$$\iint_D \left(6x^2y^2+\frac{25}{3}x^3y^3\right)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=\sqrt{6-x^2}, y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №26

Изменить порядок интегрирования

$$1\int_{0}^{\sqrt{3}}dx\int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}}fdy+\int_{\sqrt{3}}^{2}dx\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}fdy.$$

. Вычислить

$$\iint_D (9x^2y^2+25x^4y^4)dxdy; D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=\frac{3}{2}\sqrt{x}, y=\frac{3}{2x}, x=4.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №27

Изменить порядок интегрирования

$$1\int_{0}^{1}dx\int_{-\sqrt{x}}^{0}fdy+\int_{1}^{2}dx\int_{-\sqrt{2-x}}^{0}fdy.$$

. Вычислит

$$\iint_D \left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy; D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=\sin x, y=\cos x, x=0(x\le 0.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №28

Изменить порядок интегрирования

$$1\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{x}fdy+\int_{1}^{\sqrt{2}}dx\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}}fdy.$$

. Вычислить

$$\iint_D (9x^2y^2+25x^4y^4)dxdy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y=\frac{1}{x}, y=6e^x, y=1, y=6.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)
Вариант №29

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

Вычислить

$$\iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x} (x \ge 0).$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 94.$$

Индивидуальное задание №1(двойные интегралы)

Вариант №30

Изменить порядок интегрирования

$$1 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f dy.$$

. Вычислить

$$\iint_D (xy - 9x^5y^5) dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2 (x \ge 0).$$

. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y = 11 - x^2, y = -10x.$$

<u>Варианты контрольной работы по пределам</u>

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}$.
2. Дана функция $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Найдите $f[f(x)]$. Вычислите $2f[f(2)]$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^4 - n + 5}{2n^4 + 5n - 1}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^4 + 2n} - n^2)n^2}{3n + 4}$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to\infty} (3x+1)\sin\dfrac{5}{x+1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{4^{\frac{1}{x}} - 1}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+x+1}{x^2+1})^{3x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5^x+5}{(x^2-1)\ln 5}$

9. Выделить главную часть вида c(x+1)^k бесконечно малой $\alpha(x)=\frac{\sin^2(x^2-1)}{\sqrt{x^2+3}-2}$ при $x\to -1$. В ответ ввести сначала c, затем k.

10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;y) для функций:

а) $f_1(x)=\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}+arctg\frac{2}{x}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{x^2-9} & \text{при } x<0\\ \frac{x-1}{x^2-4} & x>0\end{cases}$.

Вариант 2

1. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}.$$

2. Даны функции $f(x)=\sin x,\varphi(x)=x^2$. Найдите $f[\varphi(x)]$ и $\varphi[f(x)]$. Вычислите $2\varphi\left[f(\frac{\pi}{4})\right]$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+n-3n^4}{1+n-n^4}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^4+3n^2+1}-3n^2)$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-\sqrt{4x^2+1}}{2x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(7x)-\sin(3x)}{tg(2x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^4+5}{x^4+3})^{x^4}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{7^{x^2}-7}{(x-1)\ln 7}$.

9. Выделить главную часть вида c(x-3)^k бесконечно малой $\alpha(x)=\frac{(e^{x-3}-1)\sin(x-3)}{\sqrt{x+1}-2}$ при $x\to 3$. В ответ ввести сначала c, затем k.

10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;y) для функций:

а) $f_1(x)=\dfrac{\sin(x-3)}{|x^2-9|}+\dfrac{e^x-1}{5x}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{x^2-16} & x\le 0\\ \dfrac{\sin x}{x^2-9} & x>0\end{cases}$ при .

Вариант 3

1. Найти область определения функции
$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$$
2. Даны функции $f(x)=\log_2 x, \varphi(x)=\sqrt{x}$. Найдите $\psi(x)=f[\varphi(x)], \phi(x)=\varphi[f(x)], f[f(x)], \varphi[\varphi(x)]$. Вычислите $\varphi(16)$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+n^2}{3+n+n^5}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+8n}-n)$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to-2}(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4})$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin(\dfrac{5}{x+3})$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+x}{x^2+4})^{3x-1}$.
8. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{e^{2x-8}-1}{x^2-7x+12}$.
9. Выделить главную часть вида $c(x-3)^k$ бесконечно малой $\alpha(x)=\dfrac{(x-3)\ln(4-x)}{e^{x-3}-1}$ при $x\to3$. В ответ ввести сначала c, затем k.
10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;у) для функций:

а) $f_1(x)=x\sin\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x-1}arctg\dfrac{1}{x-2}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x^2-1} & x\le 0\\ \dfrac{\sin^2 x}{x^3-2x^2} & x>0\end{cases}$ при .

Вариант 4

1. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{\lg\frac{3x-x^2}{2}}$.
2. Дана функция $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$. Вычислите значения этой функции в тех точках, в которых $\frac{1}{x}+x=3$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+n-n^2}{3+n^2}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^4-6n^2+1}-3n^2)$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x+4}{5^x+2}$.
6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-3x+2}$.
7. $\lim\limits_{x\to0}(1+3\sin x)^{\frac{1}{x}}$.
8. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)\ln\frac{x+1}{x+3}$.
9. Выделить главную часть вида c(x-1)^k бесконечно малой $\alpha(x)=(x^3-1)\sin(x^2-1)$ при $x\to1$. В ответ ввести сначала c, затем k.
10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;у) для функций:

а) $f_1(x)=\frac{|x+2|}{x^2-4}+\frac{\sin 3x}{x}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} & \text{при } x<2\\ \frac{\sin(x-3)}{x^2-9} & x\ge 2\end{cases}$.

Вариант 5

1. Найти область определения функции $f(x)=\arcsin\frac{x-4}{3}+\lg(5-x)$.
2. Дана функция $f(x+2)=x^2-5x+4$. Найти $f(x)$. Вычислите $f(0)$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+5n^3}{n+n^4}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^4+8n}-2n)$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}+4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x^2-4)}{x^2-3x+2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5^{x-1}-1}{(x^2-1)\ln 5}$.

9. Выделить главную часть вида $\dfrac{c}{x^k}$ бесконечно малой $\alpha(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+4x}-x^2}{x^2+4}$ при $x\to+\infty$. В ответ ввести сначала c, затем k.

10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;y) для функций:

а) $f_1(x)=arctg\,\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+5)}{x^2-25} & \quad x\le 0\\ \dfrac{x}{x^2-1} & \text{при} \quad x>0\end{cases}$.

Вариант 6

1. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{\arcsin(\log_4 x)}$.

2. Вычислить значение функции $f(x)=x^4+\dfrac{1}{x^4}$ в тех точках, в которых $\dfrac{1}{x}+x=4$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+n+4n^4}{3-2n^4}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-6n^2+7}-n)$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4^{\frac{1}{x-1}}}{5^{\frac{1}{x-1}}+5}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg(x-1)}{x^2-3x+2}$.

7. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{2x-6}-1}{x^2-2x-3}$.

9. Выделить главную часть вида $c(x+1)^k$ бесконечно малой $\alpha(x)=\dfrac{\sqrt[3]{\sin^4(x+1)}}{\sqrt[3]{x^2+10x+9}}$ при $x\to-1$. В ответ ввести сначала c, затем k.

10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;у) для функций:

а) $f_1(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x^2+3x+2} + \dfrac{\sin(x-3)}{x-3}$;

б) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+2)}{x^2-4} & x \le 1 \\ \dfrac{x}{x^2-9} & x > 1 \end{cases}$ при .

Вариант 7

1. Найти область определения функции $f(x) = \lg(9-x^2)$.
2. Дано, что $f(x+2) = \dfrac{x-4}{x+5}$. Найдите $\varphi(x) = (x+3)f(x)$. Вычислите $f(0)$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^4+n-1}{3n^4+5}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2+6n-1} - n)$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(0{,}5)^x+3}{(0{,}5)^x+7}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x}-1)ctg2x$.
7. $\lim\limits_{x\to 2} e(\dfrac{x^2+2}{x^3-2})^{\frac{3}{x^2-4}}$.
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(3x-2)-\ln(2x-1)}{x^2-1}$.
9. Выделить главную часть вида $c(x-2)^k$ бесконечно малой $\alpha(x) = \dfrac{\sin^2(4-x^2)}{\ln(3-x)} + (x-2)^5$ при $x \to 2$. В ответ ввести сначала c, затем k.
10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;у) для функций:

а) $f_1(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x^2}} + \dfrac{x+1}{x^2-1}$;

б) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-4} & x \le 0 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2-5x+4} & x > 0 \end{cases}$ при .

Вариант 8

1. Найти область определения функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 4^{\arcsin(x-2)} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

2. Даны функции $f(x)=x+1, \varphi(x)=x-2$. Решить уравнение $f[\varphi(x)]+\varphi[f(x)]=10$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3n+n^3}{4+n+4n^3}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+6n^2-1}-n)$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln(x\ \ -2)-\ln(x^2-x)}{\sin(x+1)}$.
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg\,6x}{\sin(2x)}$.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}e(\dfrac{x^2+3}{x^2+4x+3)})^x$.
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}+2}$.
9. Выделить главную часть вида $\dfrac{c}{x^k}$ бесконечно малой $\alpha(x)=\dfrac{e^{\frac{4}{x}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ при $x\to-\infty$. В ответ ввести сначала c, затем k.
10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;у) для функций:

а) $f_1(x)=arctg\,\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-9} & \text{при } x\le0\\ \dfrac{x\sin(x^3-1)}{x-1} & x>0\end{cases}$.

Вариант 9

1. Найти область определения функции $f(x)=\lg(\arcsin\dfrac{6x-x^2}{8}$.
2. Даны функции $f(x)=x^2-1, \varphi(x)=x^2+4$. Найдите корни уравнения $f[\varphi(x)]-\varphi[f(x)]=20$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n^8+5}}{n^4+3}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^6-6n^4+1}-n^2)$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^x-4^x}{5^x+4^{x+1}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg\,4x}{1-\cos(2x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2-x+1}\right)^{3x+4}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{1-\sqrt{x}}$.

9. Выделить главную часть вида $c(x-2)^k$ бесконечно малой $\alpha(x)=\dfrac{\ln\,(3-x)}{\sin(x-2)}$ при $x\to 2$. В ответ ввести сначала c, затем k.

10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;у) для функций:

а) $f_1(x)=\dfrac{\sin(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2}}+\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4} & \text{при } x\le 0\\ \dfrac{|x-1|}{x^2-4x+3} & \quad\;\; x>0\end{cases}$.

Вариант 10

1. Найти область определения функции $f(x)=\lg(|x|-x)$.

2. Дано, что $f(x+1)=\dfrac{x^2+3}{x^2+5}$. Найдите $f(x)$. Вычислите $f(0)$.

Найти пределы последовательностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^5+n^2-4}{3n^5+n+1}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-6n+9}-n)$.

Найти пределы функций:

5. $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sqrt{4x^2}-x}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$.

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin 3(x^2-1)}{x^2-x-2}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\ln\dfrac{x+1}{x+3}$.

9. Выделить главную часть вида cx^k бесконечно малой $\alpha(x)=\dfrac{e^{x^3}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ при $x\to 0$. В ответ ввести сначала c, затем k.

10. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1;2;у) для функций:

а) $f_1(x)=\dfrac{\sin(x+3)}{|x^2-9|}+\dfrac{e^{3x}-1}{x}$;

б) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6} & x\le 1\\ \dfrac{x}{x^2-4} & x>1\end{cases}$ при .

Варианты контрольной работы по исследованию функций

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Найти производные от данных функций:

а) $y=3\left(\dfrac{2-x}{x^2}+4\sqrt{5x+4}\right), y'(1)$.

б) $y=\sqrt{15}\arccos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{ctg^2 5x}{10}+\dfrac{ctg10}{\sin^2 10}, y'(2)$.

в) $y=3\left[e^{3x}\ln(4x+6)+tg8x-(3\ln 6)x\right], y'(0)$

2. Дана функция $u=xy^2-z^3$. Найти

а) координаты вектора grad u в точке M(1,2,1);

б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M в направлении вектора a(2,3,6).

3. Дана функция $y=\sqrt{5}\left[\dfrac{x}{2}\sqrt{4+x^2}+2\ln(x+\sqrt{4+x^2}\right]$. Найти $y''(1)$.

4. Доказать, что функция z=sin(x+ay) удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases}x=\sin^3 t\\ y=\cos^3 t\end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если $t=\dfrac{\pi}{3}$.

6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $xz^2-x^2y+y^2z+2x-y=0$. Вычислить:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1)$; б) $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1)$.

7. К графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой x=7проведена касательная. Найти абсциссу точки пересечения касательной с осью OX.

8. Найти dy, если $y=\dfrac{x+3\sqrt{5+x^2}}{2}$. Вычислить значения dy, если x=2, Δx=0,02.

9. Дана функция $z=x^2+xy+y^2$ и точки $M_0(1;2), M_1(1{,}02;1{,}96)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).

10. Дана функция $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [1;4].

11. Дана функция $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном кривыми $y^2 = x, x = 2$.

12. Провести полное исследование функции $y = \frac{12}{x^2 - 4}$ и начертить ее график.

Вариант 2

1. Найти производные от данных функций:

а) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}, y'(0)$;

б) $y = tg^3 x + tgx + x^2 - \frac{\pi}{2}x, y'(\frac{\pi}{4})$;

в) $y = \left(arctg\sqrt{\frac{3-x}{x+2}} \right)\sqrt{\frac{3}{2}}, y'(0)$.

2. Дана функция $u = 7\ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Найти:

а) координаты вектора grad u в точке А(3,-2,1);

б) $\frac{\partial u}{\partial a}$ в точке А в направлении вектора a(1,2,2);

3. Дана функция $y = 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right]$. Найти y''. Вычислить $y''(\frac{6}{5})$.

4. Доказать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \ln\sin t \end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если $t = \frac{\pi}{6}$.

6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $z^3 + 3x^2 z = 2xy$. Вычислить:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}(-1,0,0)$; б) $\frac{\partial z}{\partial y}(-10,0)$.

7. Найти острый угол (в градусах) между осью ОХ и касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 6$ в точке x_0=3.

8. Найти dy, если y=arcsinx. Вычислить значения dy, если x=0, Δx=0,08.

9. Дана функция $z = 3x^2 - xy + x + y$ и точки $M_0(1;3), M_1(1{,}06;2{,}92)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).

10. Дана функция $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [1;4].

11. Дана функция $z=\frac{xy}{2}-\frac{x^2y}{6}-\frac{xy^2}{8}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми $y=0, \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$

12. Провести полное исследование функции $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$ и начертить ее график.

Вариант 3

1. Найти производные от данных функций:

а) $y=1-\sqrt[3]{x^2}+\frac{27}{x}, y'(-27)$;

б) $y=3^{-x}\ln(1-x)-2^{-x^2}, y'(0)$;

в) $y=\arcsin(20x+\frac{3}{5})+tg8x, y'(0)$.

2. Дана функция $u=2arctg(xy+z^2)$. Найти:

а) координаты вектора grad u в точке A(-1,3,2);

б) $\frac{\partial u}{\partial a}$ в точке A в направлении вектора a{2,-6,-3};

3. Дана функция $y=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}$. Найти y''. Вычислить $y''(-1)$.

4. Доказать, что функция $z=\frac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению
$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\ln\cos t \end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если $t=\frac{\pi}{3}$.

6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$. Вычислить:

   а) $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1,-2)$; б) $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1,0)$.

7. На графике функции y=ln2x взята точка A. Касательная к графику в точке A наклонена к оси OX под углом, тангенс которого равен 1/4. Найти абсциссу точки A.

8. Найти dy, если $y=x^6$. Вычислить значения dy, если $x_0=2$, $\Delta x=0{,}01$.

9. Дана функция $z = x^2 + 3xy - 6y$ и точки $M_0(4;1), M_1(3{,}96;1{,}03)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).
10. Дана функция $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [0;6].
11. Дана функция $z = 3x^2 - 3xy + y^2 + 4$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми x=-1, y=-1, x+y=1.
12. Провести полное исследование функции $y = x + \dfrac{4}{x+2}$ и начертить ее график.

Вариант 4

1. Найти производные от данных функций:

а) $y = \dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{x}$, $y'(0{,}01)$;

б) $y = 2^x e^{-x} + x$, $y'(0)$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'(0)$

2. Дана функция $u = 4\arcsin(xz + y^2 - 1)$. Найти:

а) координаты вектора ***grad u*** в точке М(0,2;1;3);

б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке М в направлении вектора а{1,-2,2};

3. Дана функция $y = e(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x)$. Найти y''_{xx}. Вычислить $y''_{xx}(e)$.

4. Доказать, что функция $z = \cos(xy)$ удовлетворяет уравнению $y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \ln\sin t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если $t = \dfrac{\pi}{6}$.

6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xz - z - 3 = 0$. Вычислить:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,-2,1)$; б) $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,-2,1)$.

7. К графику функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой x=1 проведена касательная. Найти ординату точки графика касательной, абсцисса которой равна 31.

8. Найти dy, если $y=x^8$. Вычислить значения dy, если $x=2$, $\Delta x=0{,}001$.

9. Дана функция $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$ и точки $M_0(2;3), M_1(2{,}02;2{,}97)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).

10. Дана функция $y = \dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [-3;3].

11. Дана функция $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми y=x+1, y=0, x=3.

12. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ и начертить ее график.

Вариант 5

1. Найти производные от данных функций:

а) $y = 2\sqrt[4]{16-2x} + \dfrac{x}{\sqrt{11-x^2}}, y'(0)$;

б) $y = arctg\,\dfrac{1}{x^3} + tg^3(2x+4), y'(-2)$;

в) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{3}{4}+x^2} - 3^{-x}, y'(0)$.

2. Дана функция $u = 15\sqrt{1-(xy+z^2-1)^2}$. Найти:

а) координаты вектора grad u в точке M(4;0,2;1);

б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M в направлении вектора a{4,-2,4};

3. Дана функция $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{x+2}$. Найти y''. Вычислить $y''(1)$.

4. Доказать, что функция $z = \cos(y) + (y-x)\sin y$ удовлетворяет уравнению $(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - x^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \ln\cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если $t = \dfrac{\pi}{3}$.

6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $xyz = x + y + z$. Вычислить:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,-2)$; б) $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,-2)$.

7. На графике функции $y = x^2 + x - 5$ взята точка А. Касательная к графику в точке А наклонена к оси ОХ под углом, тангенс которого равен 5. Найти абсциссу точки А.

8. Найти dy, если $y = 3\sqrt{4x-1}$. Вычислить значения dy, если x=2,5 Δx=0,02.

9. Дана функция $z=x^2+2xy+3y^2$ и точки $M_0(2;1), M_1(1{,}96;1{,}04)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).
10. Дана функция $y=2\sqrt{x}-x$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [0;4].
11. Дана функция $z=x^2+2xy-4x+8y$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми x=0, y=0, y=2.
12. Провести полное исследование функции $y=2-\dfrac{1}{x^2}$ и начертить ее график.

Вариант 6

1. Найти производные от данных функций:

a) $y=3\sqrt{x^5+5x^4-\dfrac{5}{x}}, y'(1)$;

b) $y=arctg(tg^2x), y'(\dfrac{\pi}{4})$;

c) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}, y'(0)$.

2. Дана функция $u=4\arccos(x^2+yz-1$. Найти:
   а) координаты вектора grad u в точке М(1;0,2;3);
   б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке М в направлении вектора a{2,-1,-2}.
3. Дана функция $y=4(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. Найти y''. Вычислить $y''(\dfrac{3}{5})$.
4. Доказать, что функция $z=e^{xy}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0.$$

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если t=1.
6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ Вычислить:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,-1,6)$; б) $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,-1,-2)$.

7. К графику функции $f(x)=e^{2x}$ в точке с абсциссой x=0 проведена касательная. Найти абсциссу точки графика касательной, ордината которой равна 19.
8. Найти dy, если $y=3\sqrt[3]{x^3+7x}$. Вычислить значения dy, если x=1 Δx=0,024.
9. Дана функция $z=x^2+y^2+2x+y-1$ и точки $M_0(2;4), M_1(1{,}98;3{,}91)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).
10. Дана функция $y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [-1;5].

11. Дана функция $z = xy$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

12. Провести полное исследование функции $y = \frac{1-x^3}{x^2}$ и начертить ее график.

Вариант 7

1. Найти производные от данных функций:

а) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} - \frac{x}{x^2+1}, y'(0)$;

б) $y = \arcsin^2 7x - \frac{\sin 8x}{x^2-1}, y'(0)$;

в) $y = arctg 4(\ln arctg 4x + 5^x - (5\ln 5)x), y'(1)$.

2. Дана функция $u = 6\ln(xz + y^2 - 1$. Найти:

а) координаты вектора grad u в точке M(2;1;3);

б) $\frac{\partial u}{\partial a}$ в точке M в направлении вектора a{-3,-2,6}

3. Дана функция $y = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$. Найти y''. Вычислить $y''(2)$.

4. Доказать, что функция $z = xe^{\frac{y}{x}}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если $t = \frac{\pi}{6}$.

6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$
   Вычислить:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}(1.1,0)$; б) $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1,0)$.

7. К графику функции $f(x) = \cos\frac{2}{3}x$ в точке с абсциссой $x = -\frac{\pi}{2}$ проведена касательная. Найти острый угол (в градусах) между касательной и осью OX.

8. Найти dy, если $y = 3\sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$. Вычислить значения dy, если x_0=1 Δx=0,01.

9. Дана функция $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$ и точки $M_0(-1;3), M_1(-0,98;2,97)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).

10. Дана функция $y = x - 4\sqrt{x} + 5$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [1;9].

11. Дана функция $z = \sqrt{3 - x^2 - 2y^2}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

12. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x-3}$ и начертить ее график.

Вариант 8

1. Найти производные от данных функций:

а) $y=\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\frac{5}{3}}, y'(\frac{1}{2})$;

б) $y=40arctg\,\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, y'(\frac{3}{5})$;

в) $y=\frac{1}{2}tg^2x-\ln\cos x, y'(\frac{\pi}{4})$.

2. Дана функция $u=2arctg(x^2+yz-4)$. Найти:

а) координаты вектора grad u в точке M(2;1;1);

б) $\frac{\partial u}{\partial a}$ в точке M в направлении вектора a{2,-6,3}

3. Дана функция $y=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}$. Найти y''. Вычислить $y''(\frac{1}{2})$.

4. Доказать, что функция $z=x^y$ удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-(1+y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases}x=3\sin^2 t\\ y=2\cos^3 t\end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если $t=\frac{\pi}{3}$.

6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $z=y+\ln\frac{x}{z}$ Вычислить:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1,1)$; б) $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1,1)$.

7. К графику функции $f(x)=\ln(3x)$ в точке с абсциссой $x=\frac{1}{3}$ проведена касательная. Найти абсциссу той точки касательной, ордината которой равна 29.

8. Найти dy, если $y=2\sqrt{x^2+x+3}$. Вычислить значения dy, если x=2 Δx=0,006.

9. Дана функция $z=x^2-y^2+5x+4y$ и точки $M_0(3;2), M_1(3{,}05;1{,}98)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).

10. Дана функция $y=\frac{10x}{1+x^2}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [0;3].

11. Дана функция $z=4x+2y+4x^2+y^2+6$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве ограниченным прямыми x=0,y=0,x+y+2=0.

12. Провести полное исследование функции $y=\ln(x^2-1)^2$ и начертить ее график.

Вариант 9

1. Найти производные от данных функций:

а) $y=\left[\sqrt[3]{\frac{1}{7+x^2}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right]24, y'(1)$;

б) $y=\frac{8}{3}\left[\ln(\sin 2x)-2^{-3x}-(2ctg 2)x\right], y'(1)$;

в) $y=10\left(arctg(x+1)^3+\frac{\sin(3x)}{x^2+5}\right), y'(0)$.

2. Дана функция $u=5\arcsin(yz+z^2-4)$. Найти:

а) координаты вектора grad u в точке M(2;12\13;1);

б) $\frac{\partial u}{\partial a}$ в точке M в направлении вектора a{1,-2,-2}

3. Дана функция $y=4e^{\sqrt{x}-1}(\sqrt{x}-1)$. Найти y''. Вычислить $y''(1)$.

4. Доказать, что функция $z=\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=t^4-t^2+1 \\ y=t^4+t^2+1 \end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если $t=-1$.

6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$ Вычислить:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}(2,0,1)$; б) $\frac{\partial z}{\partial y}(2,0,1)$.

7. К графику функции $f(x)=x^2+3x+2$ в точке с абсциссой $x=0$ проведена касательная. Найти ординату той точки касательной, абсцисса которой равна

8. Найти dy, если $y=\frac{2}{\sqrt{2x^2+x+1}}$. Вычислить значения dy, если $x_0=1$ $\Delta x=0{,}016$.

9. Дана функция $z=2xy+3y^2-5x$ и точки $M_0(3;4), M_1(3{,}04;3{,}95)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).

10. Дана функция $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [-3;3].

11. Дана функция $z=x-2y-3$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве ограниченным прямыми x=0,y=0,x+y=1.

12. Провести полное исследование функции $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ и начертить ее график.

Вариант 10

1. Найти производные от данных функций:

а) $y=\sqrt[3]{x^2-4x+27}-\frac{1}{3-x}, y'(0)$;

б) $y=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x, y'(\frac{4}{5})$;

с) $y=arctg\frac{1+x}{1-x}, y'(2)$.

2. Дана функция $u=2\ln(x^2+yz-4)$. Найти:

а) координаты вектора grad u в точке M(2;2;1);

б) $\frac{\partial u}{\partial a}$ в точке M в направлении вектора a{2,2,-1}.

3. Дана функция $y = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. Найти y''. Вычислить $y''(0)$.

4. Доказать, что функция $z = \frac{x^2}{y^2}$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

5. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = t^{3^2} + 1 \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$. Вычислить y''_{xx}, если $t = 1$.

6. Функция z=z(x,y) задана неявно уравнением $xz^5 + y^3 z - x^3 = 0$ Вычислить: а) $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$; б) $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$.

7. Найти уравнение $y = kx + b$ касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + x + 1$, которая параллельна прямой y=5x+7. В ответ ввести сначала значение k, затем b.

8. Найти dy, если $y = \sqrt{x^2+5}$. Вычислить значения dy, если x_0=2 Δx=0,06.

9. Дана функция $z = xy + 2y^2 - 2x$ и точки $M_0(1;2), M_1(0{,}97;2{,}03)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1 (ответы округлять до сотых).

10. Дана функция $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [2;4].

11. Дана функция $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4(x + y + 1)$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения в прямоугольнике $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2$.

12. Провести полное исследование функции $y = \frac{10x}{(x+1)^3}$ и начертить ее график.

Варианты контрольной работы по функциям многих переменных

№ 1

1. Найти частные производные функции $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$.
2. Найти производную сложной функции $z = e^{x^2 - y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.
3. Найти $\frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dxdy}, \frac{d^2 z}{dy^2}$, если $z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}$.

№ 2

1. Найти частные производные функции $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.
2. Найти производную сложной функции $z = u^v$, $u = \ln(x+1)$, $v = e^x$.
3. Найти $\dfrac{d^2 z}{dx^2}, \dfrac{d^2 z}{dxdy}, \dfrac{d^2 z}{dy^2}$, *если* $z = arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$.

№ 3

1. Найти частные производные функции $z = \left(5x^2 y - y^3 + 7\right)^3$.
2. Найти производную сложной функции $u = \dfrac{x^3 y}{z}$, *где* $x = \sqrt{t}$, $y = \sin t$, $z = t^2$.
3. Найти $\dfrac{d^2 z}{dx^2}, \dfrac{d^2 z}{dxdy}, \dfrac{d^2 z}{dy^2}$, *если* $z = e^{xe^y}$.

№ 4

1. Найти частные производные функции $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$.
2. Найти производную сложной функции $u = e^{x-2y}$, *где* $x = \sin t$, $y = t^3$.
3. Найти $\dfrac{d^2 z}{dx^2}, \dfrac{d^2 z}{dxdy}, \dfrac{d^2 z}{dy^2}$, *если* $z = y^{\ln x}$.

№ 5

1. Найти частные производные функции $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.
2. Найти производную сложной функции $u = \sqrt[3]{\dfrac{x^5 y^2}{z}}$, *где* $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t^2$.
3. Найти $\dfrac{d^2 u}{dydz}$ *если* $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$.

№ 6

1. Найти частные производные функции $z = arctg\,\frac{x}{y}$.
2. Найти производную сложной функции $u = \frac{e^{ax}(y+z)}{a^2+4}$, *где* $y = \sin x,\ z = \cos x,\ \frac{du}{dx} = ?$
3. Найти $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$, *если* $z = \sin^2(ax+by)$.

№ 7

1. Найти частные производные функции $z = \frac{1}{arctg\,\frac{y}{x}}$.
2. Найти производную сложной функции $z = x\cos v \cdot \sin w,\quad v = \ln(x^2+1),\ w = -\sqrt{1-x^2}$.
3. Найти $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$, *если* $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$.

№ 8

1. Найти частные производные функции $z = x^y$.
2. Найти производную сложной функции $z = u^v,\ u = \ln(x+5),\ v = e^{\frac{1}{x}}$.
3. Найти $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$, *если* $z = \frac{x+y}{1-xy}$.

№ 9

1. Найти частные производные функции $z = \ln\left(x^2+y^2\right)$.
2. Найти производную сложной функции $y = u^2e^v,\ u = \sin x,\ v = \cos x$.
3. Найти $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$, *если* $z = \arcsin xy$.

№ 10

1. Найти частные производные функции $z = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.
2. Найти производную сложной функции
   $z = x^2 - y^2,\ x = u\cos v,\ y = u\sin v,\quad z'_u = ?, z'_v = ?$
3. Найти $\frac{d^3 z}{dx^2 dy}$, *если* $z = e^{xy^2}$.

№ 11

1. Найти частные производные функции $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
2. Найти производную сложной функции $u = x^2 y^3 z,$ *где* $x = t,\quad y = t^2,\quad z = \sin t.$
3. Найти $\frac{d^3 z}{dx dy^2}$, *если* $z = \ln(x^2 + y^2).$

№ 12

1. Найти частные производные функции $z = \ln tg\frac{x}{y}$.
2. Найти производную сложной функции $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, *где* $y = a\sin x, z = \cos x,\ u'_x = ?$
3. Найти $\frac{d^3 z}{dx dy^2}$, *если* $z = \sin xy.$

№ 13

1. Найти частные производные функции $z = e^{-\frac{x}{y}}$.
2. Найти производную сложной функции $z = \arcsin\frac{x}{y}$, *где* $y = \sqrt{x^2+1},\quad z'_x = ?$
3. Найти $\frac{d^3 w}{dx dy dz}$, *если* $w = e^{xyz}$.

№ 14

1. Найти частные производные функции $z = \ln(x + \ln y)$.
2. Найти производную сложной функции $z = arctg(xy), \quad где\ y = e^x, \quad z'_x = ?$
3. Найти $\dfrac{d^6 v}{dx dy^3 dz^2}, \quad если \quad v = x^m y^n z^p$.

№ 15

1. Найти частные производные функции $z = arctg\,\dfrac{v+w}{v+w}$.
2. Найти производную сложной функции $z = \ln(e^x - e^y), \quad где\ y = x^3, \quad z'_x = ?$
3. Проверить, что $\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{dz}{dy} = 1 \quad и \quad \dfrac{d^2 z}{dx^2} \cdot \dfrac{d^2 z}{dy^2} - \left(\dfrac{d^2 z}{dxdy}\right)^2 = 0, \quad если \quad z = \ln(e^x + e^y).$

№ 16

1. Найти частные производные функции $z = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.
2. Найти производную сложной функции $z = x^2 \ln y, \; x = \dfrac{u}{v}, \quad y = 3u - 2v, \quad z'_u = ?, z'_v = ?$.
3. Показать, что $\dfrac{d^2 z}{dx^2} + \dfrac{d^2 z}{dy^2} = 0, \quad если \quad z = e^x (x\cos y - y\sin y).$

№ 17

1. Найти частные производные функции $z = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$.
2. Найти производную сложной функции

$$z = x^2 y - y^2 x, \; x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z'_u = ?, z'_v = ?$$

3. Показать, что $\dfrac{d^2 z}{dx^2} + \dfrac{d^2 z}{dy^2} = 0, \quad если \quad z = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

№ 18

1. Найти частные производные функции $z=(1+xy)^y$.
2. Найти производную сложной функции $z=\arcsin(x-y),\ где\ x=3t,\quad y=4t^3$.
3. Найти $\dfrac{d^3z}{dx^2dy},\quad если\quad z=\ln(x+y).$

№ 19

1. Найти частные производные функции $z=xy\cdot\ln(x+y)$.
2. Найти производную сложной функции $u=z^2+y^2+zy,\ где\ z=\sin t,\quad y=e^t$.
3. Найти $\dfrac{d^3z}{dxdy^2},\quad если\quad z=\sin(xy).$

№ 20

1. Найти частные производные функции $z=x^{x^y}$.
2. Найти производную сложной функции $u=e^{x-2y},\ где\ x=\sin t,\quad y=t^3$.
3. Найти $\dfrac{d^3u}{dxdydz},\quad если\quad u=2^{xyz}.$

Варианты контрольной работы по рядам

1 вариант

1.1. $\dfrac{3}{1\cdot4}+\dfrac{9}{4\cdot7}+\dfrac{27}{7\cdot10}+\ldots$

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}$.

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{3n^2+6n+9}$

1.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{4^n}$

1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{\sqrt{n}}$

1.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln n$

1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot2^n}{n^{n+1}}$

1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{2n}\cdot(x+3)^{2n-1}$

1.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$

1.12. Разложить функцию $\sin^2 x$ в ряд по степеням $(x-a)$.

1.13. Разложить функцию $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ в ряд по степеням x.

1.14. Вычислить $\sqrt[3]{80}$ с точностью до 0,001.

1.15. Вычислить ln 1,1 с точностью до 0,001.

2 вариант

2.1. $\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{8}}+\frac{6}{\sqrt{11}}+\frac{8}{\sqrt{14}}+\ldots$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+1}$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6n^2+3}$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(3n+1)}$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 10\cdot 17\cdots(7n-4)}{2\cdot 8\cdot 14\cdots(6n-4)}$

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n^n}$

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$

2.12. Разложить функцию $\frac{1}{x^2}$ в ряд по степеням $(x+1)$.

2.13. Разложить функцию $sh\ x$ в ряд по степеням x.

2.14. Вычислить $e^{0,5}$ с точностью до 0,01.

2.15. Вычислить ln 1,1 с точностью до 0,001.

3 вариант

3.1. $\frac{1}{11}+\frac{2}{101}+\frac{3}{1001}+\frac{4}{10001}+\ldots$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}$.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{4n-1}}$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[6]{n}}{(n+2)\sqrt[3]{n}}$

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^n-1)^2}$

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^6}$

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

3.9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n\sqrt{n}-1}$

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$

3.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-10)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3.12. Разложить функцию $\sqrt{x}$ в ряд по степеням $(x-4)$.

3.13. Разложить функцию $x \cdot e^{-2x}$ в ряд по степеням x.

3.14. Вычислить $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^4}}$ с точностью до 0,001.

3.15. Вычислить ln 1,3 с точностью до 0,001.

4 вариант

4.1. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{8}}+\frac{4}{\sqrt{11}}+\frac{5}{\sqrt{14}}+...$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^2$

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{7n}$

4.5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^{2n}}$

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n\sqrt{n}}$

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^5}}$

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$

4.12. Разложить функцию x^3-2x^2-5x-2 в ряд по степеням $(x+4)$.

4.13. Разложить функцию $\dfrac{x}{25+x^2}$ в ряд по степеням x.

4.14. Вычислить $\sin 15^0$ с точностью до 0,001.

4.15. Вычислить ln 1,4 с точностью до 0,001.

5 вариант

5.1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+...$

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n-9)(10n+1)}$.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+5n-1}{4n^3+6n+1}$

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n-1}}$

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{5^n}$

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{4n-3}}{\sqrt{n}}$

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n-1}{n(n+1)}$

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$

5.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-x)^n}{(n+1)5^{n+1}}$

5.12. Разложить функцию $\dfrac{1}{x}$ в ряд по степеням $(x-1)$.

5.13. Разложить функцию $\frac{1}{4-x^4}$ в ряд по степеням x.

5.14. Вычислить $\sin 0{,}9^0$ с точностью до 0,001.

5.15. Вычислить ln 1,5 с точностью до 0,001.

6 вариант

6.1. $0{,}5-0{,}05+0{,}005-0{,}0005+0{,}00005-...$

6.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n-1)}$.

6.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

6.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}$

6.5. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\ \frac{n}{n^2+9}$

6.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n}{\left(\sqrt{5}\right)^n}$

6.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{e^n}$

6.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot e^n}$

6.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{(9n-8)^2}$

6.10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)^7\cdot x^n}{n-1}$

6.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(4n-3)\cdot 3^n}$

6.12. Разложить функцию $\frac{1}{x^3}$ в ряд по степеням $(x-1)$.

6.13. Разложить функцию $\sin 3x + x\cos 3x$ в ряд по степеням x.

6.14. Вычислить e с точностью до 0,001.

6.15. Вычислить ln 1,6 с точностью до 0,001.

7 вариант

7.1. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+...$

7.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(12n-11)(12n+1)}$.

7.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2n+1}$

7.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+5)^2}$

7.5. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\ \frac{\pi}{4n}$

7.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$

7.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+2n+1}{7n^2+3n+1}\right)^n$

7.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{(4n-3)!}$

7.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+1}{5n+4}$

7.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\cdot x^{2n+1}$

7.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{(x+1)^{2n-1}}$

7.12. Разложить функцию $\frac{1}{x^4}$ в ряд по степеням $(x+1)$.

7.13. Разложить функцию $ch\ x$ в ряд по степеням x.

7.14. Вычислить $2e^{0,5}$ с точностью до 0,001.

7.15. Вычислить ln 1,7 с точностью до 0,001.

8 вариант.

8.1. $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{25}+\frac{4}{125}+\frac{5}{625}+...$

8.2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$

8.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{4n+1}$

8.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+10}$

8.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n+1}$

8.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{5^{3n}}$

8.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$

8.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(5n-3)}$

8.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$

8.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

8.11. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot(x+4)^n$

8.12. Разложить функцию $\cos^2 x$ в ряд по степеням $(x-\frac{\pi}{4})$.

8.13. Разложить функцию $\sqrt[3]{8+x}$ в ряд по степеням x.

8.14. Вычислить $\sin 10^0$ с точностью до 0,001.

8.15. Вычислить ln 1,8 с точностью до 0,001.

9 вариант

9.1. $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 3}{4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{16}+...$

9.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(7n-6)(7n+1)}$

9.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$

9.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n+1}$

9.5. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{10n}$

9.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\cdot 15\cdot 22\cdots(7n+1)}{1^2\cdot 5^2\cdot 9^2\cdots(4n-3)^2}$

9.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

9.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+1}{\sqrt{n+1}-1}$

9.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}$

9.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{n-1}}{n}$

9.11. $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$

9.12. Разложить функцию $\ln(2x+6)$ в ряд по степеням $(x-1)$.

9.13. Разложить функцию $\frac{1}{4x^2}$ в ряд по степеням x.

9.14. Вычислить $\sqrt[4]{19}$ с точностью до 0,001.

9.15. Вычислить ln 1,9 с точностью до 0,001.

10 вариант

10.1. $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+...$

10.7. $1000+\frac{1000\cdot 1002}{1\cdot 4}+...+\frac{1000\cdot 1002\cdots(998+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}+...$

10.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

10.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$

10.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{9}}$

10.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

10.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

10.10. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot x^4$

10.5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n^3}$

10.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

10.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{5n}}$

10.12. Разложить функцию $8x^3-2x^2+5x-2$ в ряд по степеням $(x+4)$.

10.13. Разложить функцию $\frac{3}{(2-x)(2+4x)}$ в ряд по степеням x.

10.14. Вычислить $-e^{0,4}$ с точностью до 0,0001.

10.15. Вычислить ln 2 с точностью до 0,001.

11 вариант

11.1. $\frac{3}{4}-\frac{4}{9}+\frac{5}{10}-\frac{6}{25}+...$

11.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

11.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-8)(9n+1)}$

11.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{5n-4}$

11.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

11.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln 2n+1}$

11.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^3}$

11.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^n}{(2n)!}$

11.5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^2}$

11.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(4n-3)3^n}$

11.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{(n+1)^n}$

11.12. Разложить функцию $\sqrt[3]{x}$ в ряд по степеням $(x-4)$.

11.13. Разложить функцию e^{-x^2} в ряд по степеням x.

11.14. Вычислить $\cos 10^0$ с точностью до 0,001.

11.15. Вычислить ln 2,1 с точностью до 0,001.

12 вариант

12.1. $-1+\frac{2}{2}-\frac{3}{4}+\frac{4}{8}-\frac{5}{16}+...$

12.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{3n+1}}$

12.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n-1)}$

12.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$

12.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2-8}$

12.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n^2+4)^2}$

12.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 8 \cdot 14 \cdots (6n-4)}{3 \cdot 10 \cdot 17 \cdots (7n-4)}$

12.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n+1}}$

12.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$

12.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n-1} \cdot x^{2n-1}}{2n-1}$

12.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)! \cdot (x+5)^{n-1}$

12.12. Разложить функцию $\sqrt[3]{2x}$ в ряд по степеням $(x-4)$.

12.13. Разложить функцию $x^2 \sin\sqrt{x}$ в ряд по степеням x.

12.14. Вычислить $\cos 10^0$ с точностью до 0,001.

12.15. Вычислить $\ln 4$ с точностью до 0,001.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Математический анализ для программистов**»**

Направление подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»
профиль «Технология программирования»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

Паспорт ФОС

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**	
Способность применять в профессиональной деятельности знания математических основ информатики (ОПК-2)	Знает	Основные положения теории множеств, теории пределов, теории рядов, дифференциального, интегрального исчисления, методы исследования функций
	Умеет	Проводить исследование функций, брать пределы, производные и интегралы от элементарных функций
	Владеет	Методами построения простейших математических моделей типовых профессиональных задач

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства - наименование	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Вводные математические понятия (4 часа)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы 1-2
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
2	Действительные числа (4 часа)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	экзамен, вопросы 3-5
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
3	Предел последовательности (4 часа)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест ПР2 контрольная работа	экзамен, вопросы 6-14
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
4	Предел функции (4 часа)	ОПК-2	Знает Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	экзамен, вопросы 15-20

5	Непрерывность (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	экзамен, вопросы 21-27
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
6	Дифференцируемость (12 часов)	ОПК-2	Знает, умеет, владеет	ПР1 тест ПР12 домашние задания	экзамен, вопросы 28-49
7	Неопределенный интеграл (10 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, Экзамен, вопросы 1-3 зачет, вопросы 1-3
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
8	Определенный интеграл (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, зачет, вопросы 4-17 экзамен, вопросы 4-17
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
9	Несобственный интеграл (4 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, зачет, вопросы 18-25 экзамен, вопросы 18-25
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
10	Функции многих переменных (4 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, зачет, вопросы 26-28 экзамен, вопросы 26-28
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
11	Предел функции многих переменных (4 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	2 семестр, зачет, вопросы 29-32 экзамен, вопросы 29-32
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
12	Дифференцируемость функции многих переменных (8 часов)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	2 семестр зачет, вопросы 33-47 Экзамен, вопросы 33-47
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
13	Исследование на экстремум функции многих переменных (10 часов)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	2 семестр зачет, вопросы 48-51 Экзамен, вопросы 48-51
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
14	Числовые ряды (8 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	3 семестр зачет, вопросы 1-7

			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	Экзамен, вопросы 1-7
15	Функциональные ряды (10 часов)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	3 семестр зачет, вопросы 8-14 Экзамен, вопросы 8-14
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
16	Ряды Фурье	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	3 семестр зачет, вопросы 15-19 Экзамен, вопросы 15-19
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
17	Кратные интегралы (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	3 семестр зачет, вопросы 20-22 Экзамен, вопросы 20-22.
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
18	Интегралы, зависящие от параметра (8 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	3 семестр зачет, вопросы 23-31 Экзамен, вопросы 23-31
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
19	Криволинейные и поверхностные интегралы (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	3 семестр зачет, вопросы 32-47 Экзамен, вопросы 32-47
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
20	Элементы теории поля (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	4 семестр Экзамен, вопросы 1-4
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
21	Элементы специальных функций (4 часа)	ОПК-2	Знает	ПР1 тест	4 семестр Экзамен 5-11
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	
22	Элементы функционального анализа (6 часов)	ОПК-2	Знает	ПР2 контрольная работа	4 семестр Экзамен, вопросы 12-17
			Умеет, владеет	ПР12 домашние задания	

Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	**Этапы формирования компетенции**		**критерии**	**показатели**
Способность применять в профессиональной деятельности знания математических основ информатики (ОПК-2)	знает (пороговый уровень)	Основные положения теории множеств, теории пределов, теории рядов, дифференциального, интегрального исчисления, методы исследования функций	Знает теоретический материал	Способность ответить на вопросы
	умеет (продвинутый)	Проводить исследование функций, брать пределы, производные и интегралы от элементарных функций	Умеет применять различные формулы при решении задач	Наличие выполненных заданий
	владеет (высокий)	Методами построения простейших математических моделей типовых профессиональных задач	Владеет методами построения математических моделей для учебных задач	Наличие выполненных заданий

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

Текущая аттестация студентов. Текущая аттестация студентов по дисциплине «Наименование дисциплины» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине «Математический анализ для программистов» проводится в форме контрольных мероприятий {защиты практической/контрольной работы, реферата, эссе, тестирования – указать то, что используется в конкретной дисциплине) по оцениванию фактических результатов обучения студентов и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность

выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по

аттестуемой дисциплине);

- степень усвоения теоретических знаний;
- уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;
- результаты самостоятельной работы.

Текущий контроль состоит в проверке правильности выполнения практических работ, проверке правильности выполнения заданий по самостоятельной работе, а также проведения коллоквиумов по темам теоретического курса.

Критерии оценки (устный ответ)

100-85 баллов - если ответ показывает прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа; умение приводить примеры современных проблем изучаемой области.

85-76 - баллов - ответ, обнаруживающий прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается одна - две неточности в ответе.

75-61 - балл - оценивается ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой предметной области, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы; знанием основных вопросов теории; слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры; недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа; неумение привести пример развития ситуации, провести связь с другими аспектами изучаемой области.

60-50 баллов - ответ, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы; незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа явлений, процессов; неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Допускаются серьезные ошибки в содержании ответа; незнание современной проблематики изучаемой области.

Промежуточная аттестация студентов. Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Наименование дисциплины» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

По дисциплине предусмотрен вид промежуточной аттестации: зачет, в устной форме (устный опрос в форме собеседования), экзамен в устной форме (устный опрос в форме ответов на вопросы экзаменационных билетов).

Критерии выставления оценки студенту на зачете (экзамене)

Баллы	**Оценка зачета/ экзамена**	**Требования к сформированным компетенциям**
86-100	«зачтено»/ «отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.
Баллы	**Оценка зачета/ экзамена** (стандартная)	**Требования к сформированным компетенциям**
76-85	«зачтено»/ «хорошо»	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.
61-75	«зачтено»/ «удовлетвори тельно»	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

0-60	«не зачтено»/ «неудовлетво рительно»	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

Оценочные средства для промежуточного контроля

Вопросы к экзамену (1 семестр)

1. Операции над множествами.
2. Счетные и несчетные множества
3. Действительные числа. Множества на числовой прямой.
4. Ограниченные множества в R.
5. Существование точных граней
6. Предел числовой последовательности.
7. Теоремы о пределах.
8. Монотонные последовательности.
9. Существование предела у монотонных последовательностей.
10. Число е.
11. Критерий Коши о существовании конечного предела у последовательности)
12. Предельные точки.
13. Лемма Больцано – Вейерштрасса.
14. Теорема Кантора о вложенных отрезках
15. Отображения множеств.
16. Функция. Функции действительной переменой.
17. Элементарные функции
18. Предел функции по Коши
19. Предел функции по Гейне
20. Существование односторонних пределов у монотонных функций
21. Непрерывность функций.
22. Классификация точек разрыва.
23. Теоремы о непрерывных функциях.
24. Непрерывность элементарных функций
25. Непрерывность функций на множестве.
26. Теорема Вейерштрасса
27. Теорема Кантора о равномерной непрерывности

28.Производная; геометрический и механический смысл.
29.Теоремы о вычислении производных.
30. Производные высших порядков.
31.Формула Лейбница
32.Дифференциал функции, его вычисление.
33.Инвариантность формы I- го дифференциала.
34.Дифференциалы высших порядков
35.Применение дифференциала к приближенным вычислениям
36.Теорема Дарбу
37.Теорема Ролля
38.Теорема Лагранжа
39.Теорема Коши
40.Вычисление пределов функций.
41.Правило Лопиталя
42.Формула Тейлора.
43.Разложение элементарных функций.
44.Исследование графиков функций.
45.Условие монотонности,
46.Условие выпуклости.
47.Точки экстремума
48.Точки перегиба.
49.Асимптоты.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Неопределенный интеграл.
2. Основные методы интегрирования
3. Интегрирование элементарных функций
4. Определенный интеграл Римана.
5. Суммы Дарбу и их свойства.
6. Критерий интегрируемости Дарбу.
7. Свойства определенного интеграла
8. Существование первообразной у непрерывной функции.
9. Формула Ньютона – Лейбница
10. Замена переменной
11. Интегрирование по частям
12. Длина дуги
13. Площадь фигуры
14. Объем тела.
15. Приближенное вычисление интегралов Римана: формулы прямоугольников

16. Приближенное вычисление интегралов Римана: формулы трапеций
17. Приближенное вычисление интегралов Римана: формулы Симпсона.
18. Несобственные интегралы Римана первого рода: Критерий и признаки сходимости.
19. Несобственные интегралы Римана первого рода: Абсолютная сходимость
20. Несобственные интегралы Римана первого рода: условная сходимость.
21. Несобственные интегралы Римана первого рода: Главное значение несобственного интеграла
22. Несобственные интегралы второго рода: Критерий и признаки сходимости.
23. Несобственные интегралы второго рода: Абсолютная сходимость
24. Несобственные интегралы второго рода: условная сходимость.
25. Несобственные интегралы второго рода: Главное значение несобственного интеграла
26. Пространство Rn; метрика, множества.
27. Сходимость последовательности в Rn, их свойства. Критерий Коши существования предела (3час.)
28. Предельные точки множеств в Rn.
29. Открытые и замкнутые множества. Теорема Больцано – Вейерштрасса
30. Предел функции многих переменных.
31. Теоремы о пределах.
32. Двойные и повторные пределы
33. Непрерывность функции многих переменных. Теоремы.
34. Непрерывные функции на компакте.
35. Теоремы Вейерштрасса и Кантора о равномерной непрерывности
36. Частные производные и их вычисление.
37. Дифференциал функции многих переменных, его инвариантность
38. Производная по направлению
39. Градиент функции
40. Производные и дифференциалы высших порядков.
41. Теоремы о смешанной производных
42. Формулы Тейлора для функций многих переменных и ее следствия
43. Неявные функции.
44. Теорема существования и дифференцируемости неявной функции
45. Вектор – функции векторного аргумента.
46. Теорема об обратной функции
47. Зависимость функций. Основные теоремы
48. Экстремум функции многих переменных.
49. Необходимые условия экстремума.
50. Достаточные условия экстремума.

51. Понятие об условном экстремуме функции многих переменных

Вопросы к экзамену (3 семестр)

1. Числовые ряды.
2. Абсолютная сходимость рядов.
3. Условная сходимость рядов.
4. Функциональные последовательности.
5. Основные признаки равномерной сходимости.
6. Теорема о непрерывности предельной функции
7. Теорема о почленном интегрировании и дифференцировании.
8. Функциональные ряды.
9. Основные признаки равномерной сходимости.
10. Степенные ряды.
11. Радиус сходимости.
12. Свойства степенных рядов.
13. Ряд Тейлора.
14. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.
15. Ряды Фурье по тригонометрической системе.
16. Неравенство Бесселя
17. Равенство Парсеваля.
18. Условия равномерной сходимости и сходимости в точке.
19. Понятие об изображении Фурье.
20. Понятие о кратном интеграле.
21. Двойной интеграл Римана, его свойства, вычисление.
22. Тройной интеграл Римана, его свойства, вычисление.
23. Интегралы, зависящие от параметра.
24. Непрерывность по параметру.
25. Интегрируемость по параметру.
26. Дифференцируемость по параметру.
27. Несобственные интегралы.
28. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.
29. Основные признаки равномерной сходимости.
30. Интегрирование и дифференцирование по параметру.
31. Г и В-функции и их свойства.
32. Кривые на плоскости и пространстве.
33. Касательная
34. Нормаль
35. Кривизна

36. Радиус кривизны.
37. Криволинейные интегралы I рода
38. Криволинейные интегралы II рода,
39. Свойства криволинейных интегралов
40. Вычисление криволинейных интегралов
41. Поверхности в трехмерном пространстве.
42. Касательная и нормаль.
43. Первая и вторая квадратичные формы поверхности.
44. Поверхностные интегралы I рода
45. интегралы II рода
46. Свойства поверхностных интегралов
47. Вычисление поверхностных интегралов

Вопросы к экзамену (4 семестр)

1. Основные операции теории поля.
2. Формула Грина
3. Формула Стокса
4. Формула Гаусса-Остроградского
5. Внешняя мера Лебега на прямой, ее свойства.
6. Измеримые множества и их свойства.
7. Измеримые функции и их свойства.
8. Сходимость почти всюду и по мере, связь между ними.
9. Интеграл Лебега по измеримому множеству.
10. Связь с интегралом Римана.
11. Теорема Лебега, Леви и Фату о предельном переходе под знаком интеграла.
12. Пространство L.
13. Плотность в L непрерывных функций.
14. Интеграл Лебега в n-мерном пространстве.
15. Теорема Фубини.
16. Функции ограниченной вариации на прямой.
17. Интеграл Римана-Стилтьеса.

Вопросы к зачету (2 семестр)

1. Неопределенный интеграл.
2. Основные методы интегрирования
3. Интегрирование элементарных функций
4. Определенный интеграл Римана.
5. Суммы Дарбу и их свойства.

6. Критерий интегрируемости Дарбу.
7. Свойства определенного интеграла
8. Существование первообразной у непрерывной функции.
9. Формула Ньютона – Лейбница
10. Замена переменной
11. Интегрирование по частям
12. Длина дуги
13. Площадь фигуры
14. Объем тела.
15. Приближенное вычисление интегралов Римана: формулы прямоугольников
16. Приближенное вычисление интегралов Римана: формулы трапеций
17. Приближенное вычисление интегралов Римана: формулы Симпсона.
18. Несобственные интегралы Римана первого рода: Критерий и признаки сходимости.
19. Несобственные интегралы Римана первого рода: Абсолютная сходимость
20. Несобственные интегралы Римана первого рода: условная сходимость.
21. Несобственные интегралы Римана первого рода: Главное значение несобственного интеграла
22. Несобственные интегралы второго рода: Критерий и признаки сходимости.
23. Несобственные интегралы второго рода: Абсолютная сходимость
24. Несобственные интегралы второго рода: условная сходимость.
25. Несобственные интегралы второго рода: Главное значение несобственного интеграла
26. Пространство Rn; метрика, множества.
27. Сходимость последовательности в Rn, их свойства. Критерий Коши существования предела (3час.)
28. Предельные точки множеств в Rn.
29. Открытые и замкнутые множества. Теорема Больцано – Вейерштрасса
30. Предел функции многих переменных.
31. Теоремы о пределах.
32. Двойные и повторные пределы
33. Непрерывность функции многих переменных. Теоремы.
34. Непрерывные функции на компакте.
35. Теоремы Вейерштрасса и Кантора о равномерной непрерывности
36. Частные производные и их вычисление.
37. Дифференциал функции многих переменных, его инвариантность
38. Производная по направлению

39. Градиент функции
40. Производные и дифференциалы высших порядков.
41. Теоремы о смешанной производных
42. Формулы Тейлора для функций многих переменных и ее следствия
43. Неявные функции.
44. Теорема существования и дифференцируемости неявной функции
45. Вектор – функции векторного аргумента.
46. Теорема об обратной функции
47. Зависимость функций. Основные теоремы
48. Экстремум функции многих переменных.
49. Необходимые условия экстремума.
50. Достаточные условия экстремума.
51. Понятие об условном экстремуме функции многих переменных

Вопросы к зачету (3 семестр)

1. Числовые ряды.
2. Абсолютная сходимость рядов.
3. Условная сходимость рядов.
4. Функциональные последовательности.
5. Основные признаки равномерной сходимости.
6. Теорема о непрерывности предельной функции
7. Теорема о почленном интегрировании и дифференцировании.
8. Функциональные ряды.
9. Основные признаки равномерной сходимости.
10. Степенные ряды.
11. Радиус сходимости.
12. Свойства степенных рядов.
13. Ряд Тейлора.
14. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.
15. Ряды Фурье по тригонометрической системе.
16. Неравенство Бесселя
17. Равенство Парсеваля.
18. Условия равномерной сходимости и сходимости в точке.
19. Понятие об изображении Фурье.
20. Понятие о кратном интеграле.
21. Двойной интеграл Римана, его свойства, вычисление.
22. Тройной интеграл Римана, его свойства, вычисление.
23. Интегралы, зависящие от параметра.

24.Непрерывность по параметру.
25.Интегрируемость по параметру.
26.Дифференцируемость по параметру.
27.Несобственные интегралы.
28.Несобственные интегралы, зависящие от параметра.
29.Основные признаки равномерной сходимости.
30.Интегрирование и дифференцирование по параметру.
31.Г и В-функции и их свойства.
32.Кривые на плоскости и пространстве.
33.Касательная
34.Нормаль
35.Кривизна
36.Радиус кривизны.
37.Криволинейные интегралы I рода
38.Криволинейные интегралы II рода,
39.Свойства криволинейных интегралов
40.Вычисление криволинейных интегралов
41.Поверхности в трехмерном пространстве.
42.Касательная и нормаль.
43.Первая и вторая квадратичные формы поверхности.
44.Поверхностные интегралы I рода
45.интегралы II рода
46.Свойства поверхностных интегралов
47.Вычисление поверхностных интегралов

Пример экзаменационного билета:

Вопрос 1. Операции над множествами

Вопрос 2. Непрерывность элементарных функций

Текущий контроль

Состоит в проверке правильности выполнения практических работ, проверке правильности выполнения заданий по самостоятельной работе, а также проведения коллоквиумов по темам теоретического курса.

Оценочные средства для текущего контроля

Текущий и итоговый контроль по дисциплине
Тесты для текущего контроля знаний студентов

Тесты к теме Предел функции

1. Найти: $\lim\limits_{x \to 00} [2/(x-1)]$;

1: 2

2: 0

3: не существует.

4: 1

2. Найти: $\lim\limits_{x \to 1} [2/(x+2)]$;

1: не существует.

2: 0

3: 2/3

4: 1/2

3. Найти: $\lim\limits_{x \to -3} [(x^2+5x+6)/(x^2-9)]$;

1: 0

2: 5/6

3: 1/2

4: 1/6

4. Найти: $\lim\limits_{x \to 00} [(1+x^2) / (x^3+2x^2+x-1)]$;

1: 1

2: 0

3: -1

4: 00

5. Найти: $\lim\limits_{x \to 0} [x / \sin x]$;

1: 1

2: 0

3: не существует.

4: 00

6. Найти: $\lim\limits_{x \to 0} [\sin 5x / x]$;

1: не существует.

2: 0

3: 00

4: 5

7. Найти: $\lim\limits_{x \to 00} [1+(1/(x+2))]^x$;

1: 00
2: 1
3: e
4: не существует
8. Найти: $\lim\limits_{x\to 00} [1+(1/x)]^{2x}$;
1: e^2
2: e
3: 1
4: 00
9. Является ли функция $y=x^2$ непрерывной в точке x=2
1: Нет
2: Да
10. Является ли функция y=1/(2x+1) непрерывной в точке x=1
1: Да
2: Нет

Тесты к теме Производная функции

1. Найти приращение функции y=1/x, если x=1, Δx=0,1.
1: - 1/11,
2: 0,1,
3: 0,01,
4: - 1,
2. Пользуясь определением производной, найти производную от функции y=x^3.
1: 3x^2Δx,
2: x^2,
3: 3x^2 - 1,
4: 3x^2,
3. Найти производную от функции y=xe^x , в точке x=0.
1: e+e^-1,
2: e^1,
3: 1,
4: 0,
4. Найти производную от функции y=x^5 – ¼x^4 + 3, в точке x.
1: 5x^4 – x^3 + 3,
2: 5x^4 – x^3,
3: 5x^4 – x^4 + 1,
4: 3,
5. Найти производную от функции y=sinx/cosx
1: sinx - cosx,

2:$-\cos x/\sin x$,

3: $1/\cos x^2$,

4: 1,

6. Найти дифференциал функции $y=x^3 - 1$.

1: $3(dx)^2$,

2: $3x^2$,

3: $3dx$,

4: $3x^2dx$,

7. Дана функция $y=3x^2 - x + 1$. Найти y``

1: $6x$,

2: 6,

3: 1,

4: $6x^2$,

8. Найти y```, если $y=x^6 - 1/4x^4+1/2x^2+2$.

1: $120x^3 - 2x$,

2: $120x^3$,

3: $120x^3 - 2x +2$,

4: 120,

9. Найти y```, если $y=(x^2)*e^x$.

1: $2e^x + 4xe^x +(x^2)*e^x$,

2: $2xe^x+(x^2)*e^x$,

3: $2xe^x + e^x$,

4: $2e^x$,

Тесты к теме Первообразная функции

1. Найти первообразную для функции $y = x$.

1: $x - 2$

2: $2x$,

3: $2x^2$,

4: $(x^2)/2$.

2. Даны функции $F1 (x) = \sin x - 8$, $F2 = \sin x +3$. Первообразными для какой функции они являются ?

1: x,

2: cosx,

3: -cosx,

4: -x.

3. Найти производную от функции $ln(x^2 +1)dx.

1: $2x/ [(x^2) +1]$,

2: $\ln[(x^2)+1]$.

3: $\ln((x^2)+1)dx$,

4: 1/((x^2)+1)

4. Найти дифференциал от функции $x arcsin2x dx.

1: x arcsin2x dx.

2: arcsin2x,

3: arcsin2x dx,

4: [arcsin2x +2x/ (1-4(x^2))^1/2]dx.

5. Вычислить $d(2^x^2)

1: (2^x^2) (ln2)2x,

2: (2^x^2)+C.

3: (2^x^2)dx,

6. Вычислить интеграл $(x^2 -3)dx.

1: [(x^3)/3x] – 3x,

2: [(x^3)/3] – 3x +C.

3: (3x^3)+C,

4: [(x^2)-3]+C

7. Справедлива ли формула $U(x) V(x)dx = $U(x)dx*$V(x)dx?

1: Нет

2: Да.

8. Можно ли вынести постоянный множитель за знак интеграла ?

1: Да.

2: Нет

9. Указать какие из интегралов является «неберущимися» $sin(x^2) dx, $lnx/x dx, $[1+ (x^1/3)] dx.

1: sin(x^2) dx.

2: $ lnx/x dx,

3: $[1+x^1/3]dx.

10. Указать какие из интегралов является «неберущимися» $(e)^-x^2 dx, $xe^x^2, $x^2 e^-x^2 dx, $xe^-x^2 dx.

1 .$xe^-x^2 dx,

2: $ xe^x^2 dx,

3: $e^-x^2 dx

4: $[(x^2) (e^-x^2)] dx.

Тесты к теме Определенный интеграл

1. Вычислить интеграл в пределах (1, 00) от функции dx/(x^2).

1: 1,

2: расходится,

3: 0,

4: -1,

2. Вычислить интеграл в пределах (0, 00) от функции e^-x dx.

1: расходится,

2: 1,

3: 0,

4: -1,

3. Вычислить интеграл в пределах (-00, 00) от функции e^-2x dx.

1: -1,

2: 0,

3: 1,

4: расходится,

4. Вычислить интеграл в пределах (0, 1) от функции dx/x.

1: 2,

2: сходится

3: расходится,

4: 0,

5. Зависит ли интегральная сумма для функции y=f(x) на отрезке [а, в] от способа разбиения отрезка на 10 частей ?

1: Да,

2: Нет,

6.Зависит ли интегральная сумма для функции y=f(x) на отрезке [а, в]от выбора точек Ci на i элементарном отрезке, i = 1,2,…,п?.

1: Нет,

2: Да,

7. Можно ли записать интеграл в пределах (0, 2) от функции (sinx^2 – 3x^1/2)dx = $ в пределах от (0, 2) от функции sinx^2 dx + 3$ в пределах (0, 2) от функции x^1/2 dx ?

1: Да,

2: Нет,

8. Можно ли записать интеграл в пределах (0, 2) от функции f(x)dx = интегралу в пределах (0, 1) от функции f(x)dx + интеграл в пределах (1, 2) от функции f(x)dx.

1: Нет,

2: Да,

9. Вычислить интеграл в пределах (4, 3) от функции (x^1/2)dx.

1: 2/3,

2: 19,

3: 38/3,

4: 1,

10. Вычислить интеграл в пределах (0,П/2) от функции (sinx)dx.

1: 1/2,
2: -1,
3: 0,
4: 1,

11. Вычислить интеграл в пределах (1, 3) от функции dx/x^2.

1: -1/3,
2: 2/3,
3: 1,
4: 0,

12. Найти значение интегральной суммы для f(x) = 1 на отрезке [а, в].

1: в-а,
2: ав,
3: 1/в-а,
4: 2,

13. Верно ли равенство интеграл в пределах (0, 2) от f(x)dx.= - интеграл в пределах (2, 0) от f(x)dx ?

1: Нет.
2: Да,

Контрольные работы выполняются студентами во время практических занятий по завершению изучения разделов курса. Контрольная работа сдаётся преподавателю на проверку и оценивается по пятибалльной шкале.

Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) выполняются студентами в виде индивидуального домашнего задания (ИДЗ), которое выдается преподавателем и ему же задается на проверку во время часов консультаций. Студент должен защитить ИДЗ, подкрепив выполненное задание знанием теоретического материала. Во время сдачи ИДЗ студент должен ответить на 2 устных вопроса.

Формы и методы для промежуточной аттестации

Итоговая оценка за семестр выставляется на основе защищенных ИДЗ, с учетом выполнения контрольных работ. При этом вес классных контрольных работ 0,4, а теоретической сдачи 0,6 от итоговой оценки.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине «Математический анализ для программистов**»**

Направление подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»
Профиль «Технология программирования»
Форма подготовки очная

Владивосток
2015

Методические указания к решению задач по пределам, непрерывности, производным ,интегралам.

Пусть какая-либо выколотая окрестность точки a лежит в области определения функции $y = f(x)$.

Определение 1. Число B называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|x-a| < \delta \text{ и } x \neq a \Rightarrow \left| f(x) - B \right| < \varepsilon .$$

Обозначение предела: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Нам надо найти такое $\delta > 0$, что $|x-2| < \delta \Rightarrow |(2x+1)-5| < \varepsilon$. Начнем преобразовывать последнее неравенство:

$$|(2x+1)-5| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x+4| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь легко понять, что если мы возьмем $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, то получим требуемое соотношение: $|x-2| < \delta \Rightarrow |(2x+1)-5| < \varepsilon$.

Сформулируем основные теоремы теории пределов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1. Если в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то в этой точке существует и предел суммы $f(x)+g(x)$, причем

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x).$$

Теорема 2. Пусть $f(x) = C$, тогда в любой точке a существует предел $f(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

Теорема 3. Пусть в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = C$, тогда функция $f(x)\cdot g(x)$ также имеет в точке a предел причем

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x) \right) = B\cdot C.$$

Теорема 4. Если в точке a существует предел функции $f(x)$, то в этой точке существует и предел функции $C\cdot f(x)$, причем

$$\lim_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 5. Пусть в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = C$, $C \neq 0$, тогда функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ также имеет в точке a предел, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{B}{C}$.

Перейдем к вычислению некоторого класса пределов, связанных с тригонометрическими, показательными и логарифмическими функциями.

Теорема 6. (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Примеры.

. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=\begin{bmatrix} ax=y \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y/a}=a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=a$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\begin{bmatrix} \arcsin x=y \\ x=\sin y \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x\cdot\cos ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}:\lim\limits_{x\to 0}\cos ax=a:1=a$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin ax):x}{(\sin bx):x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx}{x}=a:b$.

Теорема 7. (Второй замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Примеры.

3.. Прологарифмируем равенство $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$:

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln e$ или $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=\begin{bmatrix} ax=y \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y:a}=a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=a$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\begin{bmatrix} e^x-1=y \\ x=\ln(1+y) \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=1:\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=1$.

Непрерывность функции

Определение 1. Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки a. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Если $f(x)$ не является непрерывной в точке a, то говорят, что она разрывна в этой точке.

Определение 2.

А) Функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества;

б) $f(x)$ непрерывна в области , если она непрерывна в каждой точке области определения функции $f(x)$;

в) $f(x)$ всюду непрерывна, если $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной оси.

Теорема 1. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ также непрерывны в этой точке. Если, кроме того, $g(a)\neq 0$, то $f(x):g(x)$ непрерывна в точке a.

Теорема 2. (Теорема о сложной функции). Пусть $y=f(x)$, $z=g(y)$, $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$, тогда функция $z=g(f(x))$ непрерывна в точке x_0

Теорема 3. (Больцано-Коши). Пусть $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a;b]$ и на концах промежутка $f(x)$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f(c)=0$.

Теорема 4. (Вторая теорема Больцано-Коши). Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, причем $A<B$. Тогда для любого C, $A<C<B$, существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f(c)=C$.

Производная функции

Определение 1. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения ее приращения в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Обозначают производную в точке x_0 так: $f'(x_0)$. Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Если предел существует для всех x из некоторого промежутка, то правило определяет функцию, которую называют производной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$. Нахождение производной называют дифференцированием функции $f(x)$.

Часто употребляются и другие обозначения производной:

$$\frac{df(x)}{dx},\quad \frac{dy}{dx},\quad y'$$

Пример 1. Вычислить производную функции $f(x)=x$
Решение. Для данной функции $f(x+\Delta x)=x+\Delta x$, а потому

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)-x=\Delta x$$

тогда

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

Итак, $x'=1$

Пример 2. Вычислить производную функции $f(x)=x^2$

Решение. Для этой функции имеем :

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тогда $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$

Итак, $(x^2)'=2x$

Теорема 1. если существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, то:
1. функция Cf производную и $(C f(x))'=C f'(x)$
2. функция $f\pm g$ имеет производную и $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
3. функция fg имеет производную и $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. функция $\dfrac{f}{g}$ имеет производную и $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. суперпозиция (сложная функция) функций f и g , т.е. функция $f(g(x))$ имеет производную, и она находится по правилу

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Пример 1. Найти производную функции $y=\sin(x^2+x+1)$
Решение. Функция $\sin(x^2+x+1)$ – суперпозиция двух функций $f(u)=\sin u$ и $u=g(x)=x^2+x+1$.. Согласно правилу 5 имеем:
$[\sin(x^2+x+1)]'=\sin'(x^2+x+1)\,(x^2+x+1)'=\cos(x^2+x+1)(2x+1)$

Таблица производных простейших функций

1. $C' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$;
4. $\left(e^x\right)' = e^x$;
5. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$;
6. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$;
8. $\left(\sin x\right)' = \cos x$;
9. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;
10. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
11. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
12. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
13. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
14. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
15. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Сформулируем несколько теорем о дифференцируемых функциях. Отметим только, что функция называется дифференцируемой в точке или на промежутке, если она имеет производную в этой точке или на этом промежутке.

Теорема 8. (Ферма). Если функция определена, дифференцируема в промежутке $[a;b]$ и в точке $C \in (a;b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение, то $f'(C) = 0$.

Теорема 9. (Ролля). Пусть $f(x)$ определена на промежутке $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $C \in (a;b)$ такая, что $f(C) = 0$.

Теорема 10. (Лагранжа или теорема о среднем). Пусть $f(x)$ определена, непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, тогда существует $c \in (a;b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Наряду с производной, которую часто называют производной первого порядка, рассматриваются производные высших порядков. Так, производная от производной функции $f(x)$ называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)$. Аналогично определяется $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ и т.д. Для примера вычислим $(x\sin x)'''$:

$(x\sin x)' = x\cdot\cos x + \sin x$; $(x\sin x)'' = -x\cdot\sin x + 2\cos x$; $(x\sin x)''' = -3\sin x - x\cos x$.

Определение 2. Дифференциалом функции $f(x)$ называется выражение $df(x) = f'(x)\cdot dx$, где $dx = \Delta x$. Аналогично таблице производных строится и таблица дифференциалов. Приведем лишь некоторые примеры из этой таблицы:

$$dC = 0;\ dx^2 = 2xdx;\ d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Роль дифференциалов прояснится при изучении интегралов и дифференциальных уравнений.

Исследование функций с помощью производных

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке $[a;b]$, если для любых $x_0, x_1 \in [a;b]$ имеет место:

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)\ \left(f(x_0) > f(x_1)\right).$$

Теорема 1. Пусть $f(x)$ имеет производную в каждой точке из $[a;b]$. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a;b]$ в том и только в том случае, когда для любого $x \in [a;b]$ $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой максимума $f(x)$, если существует окрестность $O(\varepsilon, x_0)$ такая, что $f(x)$ определена в этой окрестности и для любого $x \in O(\varepsilon, x_0)$

$$f(x_0) > f(x)$$

Аналогично определяется точка минимума. Точка минимума или максимума называется точкой экстремума.

Определение 3. Точка x_0 называется критической точкой функции $f(x)$, если $f'(x)$ не определена в этой точке или $f'(x_0) = 0$.

Теорема 2.

1) Если x_0 - точка экстремума функции $f(x)$, то она является критической точкой этой функции;

2) Если x_0 - критическая точка функции $f(x)$, причем для $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а для $x > x_0$ $f'(x) > 0$ в некоторой окрестности $O(\varepsilon, x_0)$, то x_0 - точка минимума;

3) Если x_0 - критическая точка функции $f(x)$, причем для $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а для $x > x_0$ $f'(x) < 0$ в некоторой окрестности $O(\varepsilon, x_0)$, то x_0 - точка максимума.

Определение 4.

а) Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх на промежутке $[a;b]$, если для любого $x \in [a;b]$ касательная, проведенная к графику $y = f(x)$ в точке *x*, лежит над графиком функции $f(x)$;

б) Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на промежутке $[a;b]$, если для любого $x \in [a;b]$ касательная, проведенная к графику $y = f(x)$ в точке *x*, лежит под графиком функции $f(x)$.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в каждой точке $x \in [a;b]$. Тогда:

а) $f(x)$ выпукла вниз на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда $f''(x) > 0$ для любого $x \in [a;b]$;

б) $f(x)$ выпукла вверх на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда $f''(x) < 0$ для любого $x \in [a;b]$.

Определение 5. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции $f(x)$, если она определена в выколотой окрестности точки x_0, а левый или правый пределы $f(x)$ в этой точке равны ∞.

Определение 6. Прямая $y = kx + b$ называется правой (левой) наклонной асимптотой функции $f(x)$, если имеет место

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - kx - b \right) = 0.$$

Если прямая является одновременно и правой, и левой наклонной асимптотой, о ее называют просто наклонной асимптотой. Если $k = 0$, то наклонную асимптоту иногда называют горизонтальной асимптотой.

Схема исследования функции $y = f(x)$:

1. Область определения функции.
2. Вертикальные асимптоты.
3. Наклонные асимптоты.
4. Исследование по первой производной – промежутки убывания, возрастания, экстремумы (для удобства строится таблица первой производной).
5. Исследование по второй производной - промежутки выпуклости вверх и вниз (строится таблица второй производной).
6. Специальные свойства – четность, нечетность, периодичность (если какого-либо или нескольких свойств их перечисленных нет, то о них упоминать не следует).
7. Исследование завершается построением графика функции.

Пример: $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

1. Область определения: $3-x^2\neq 0$ или $x\neq\pm\sqrt{3}$

2. $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-0}\dfrac{x^3}{3-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}+0}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-\infty$,

$x_1=-\sqrt{3}$ - вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}-0}\dfrac{x^3}{3-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+0}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-\infty$,

$x_1=\sqrt{3}$ - вертикальная асимптота.

3. $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-1$, $b_1=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}+x\right)=0$,

$x=-y$ - правая асимптота.

$k_2=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-1$, $b_2=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k_2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}+x\right)=0$,

$x=-y$ - левая асимптота.

4. $y'=\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right)'=\dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2}$.

Критические точки: $x_1=-3$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=0$, $x_4=\sqrt{3}$, $x_5=3$

Составляем таблицу первой производной:

x	$(\infty;-3)$	-3	$\left(-3;-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3};0\right)$	0	$\left(0;\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};3\right)$	3	$(3;\infty)$
y'	–	0	+	нет	+	0	+	нет	+	0	-
y	убыв.	4,5	возр.	нет	возр.	0	возр.	нет	возр.	-4,5	возр.
		min								max	

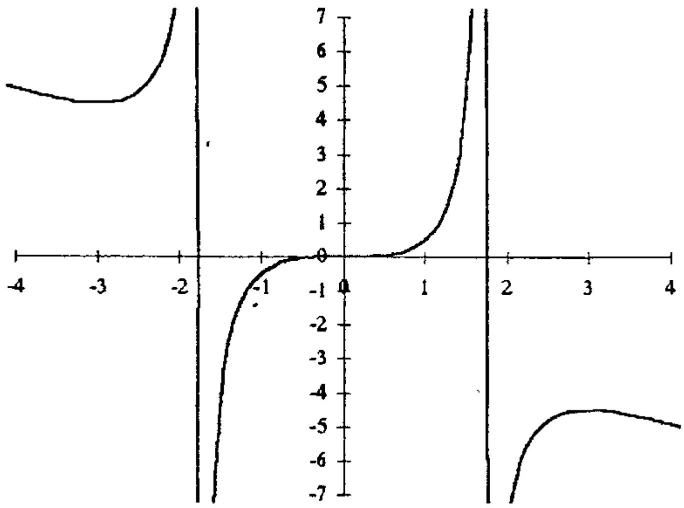
5. $y''=\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right)=\dfrac{-2x\left(x^2+27\right)}{\left(x^2-3\right)^3}$, $x=-\sqrt{3};0;\sqrt{3}$ - точки изменения знака второй производной.

Составляем таблицу второй производной:

x	$\left(\infty;-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3};0\right)$	0	$\left(0;\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};\infty\right)$
y''	+	нет	-	0	+	нет	-
y	$\cup$	нет	$\cap$	0	$\cup$	нет	$\cap$

6. Функция нечетная, так как $f(-x)=-f(x)$.

7. Строим график:



Методические указания к решению задач по интегралам

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если $F(x)' = f(x)$.

Определение 2. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ и C – символ константы, тогда выражение $F(x)+C$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, то есть $\int f(x)dx = F(x)+C$. В выражении $\int f(x)dx$ функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

На основании таблицы производных составим таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int kdx = kx + C$
2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
5. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$
8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
11. $\int \cos x dx = \sin x + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
13. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

свойства

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
3. $\int f'(x)dx = f(x)+C$
4. $\int df(x) = f(x)+C$
5. $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx+C$
6. $\int\left(f(x)+g(x)dx\right) = \int f(x)dx+\int g(x)dx$
7. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

Основные приемы вычисления неопределенных интегралов

1. Метод интегрирования по частям.

Этот метод основан на формуле $\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)-\int g(x)\cdot f'(x)dx$

Пример 1.

$$\int x\cdot e^x dx = \left|\begin{matrix} f(x)=x & g'(x)=e^x \\ f'(x)=1 & g(x)=e^x \end{matrix}\right| = x\cdot e^x-\int e^x dx = x\cdot e^x-e^x+C$$

Пример 2.

$$\int \ln x dx = \left|\begin{matrix} f(x)=\ln x & g'(x)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=x \end{matrix}\right| = x\cdot\ln x-\int dx = x\cdot\ln x-x+C$$

2. Метод подстановки.

Теорема 1. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)dx = F(\phi(x))+C$/

Сама теорема формулируется и доказывается довольно просто, но применение ее, в чем и заключается метод подстановки, довольно затруднительно, так как нелегко сразу определить, что взять за функцию $\phi(x)$, а что – за $f(x)$. Рассмотрим это на примерах.

Пример 1.

$$\int \sin^2 x\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx\end{matrix}\right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{\sin^3 x}{3}+C$$

Пример 2.

$$\int \frac{\sqrt{x dx}}{x+1}dx = \left|\begin{matrix} t^2=\sin x \\ dx = 2\,\mathrm{t}\, dtx\end{matrix}\right| = \int \frac{t\cdot 2tdt}{t^2+1} = 2\int\frac{t^2dt}{t^2+1} = 2\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2\int dt - 2\int\frac{dt}{t^2+1}+C =$$

$$= 2t - 2\operatorname{arctg}(t)+C = 2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение 1. Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены, называется дробно-рациональной функцией. Мы будем рассматривать, как правило, правильные дроби, то есть дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена в числителе меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Начнем с дробей, в которых в знаменателе стоит квадратный трехчлен. Обычно дробно-рациональные функции интегрируются с помощью разложения на простейшие дроби. Проиллюстрируем этот метод несложными примерами.

Пример 1. $\int \frac{x^2+x-2}{x(x+1)(x-2)}dx$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+x-2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

Найдем неизвестные коэффициенты *A, B, C* исходя из того, что после приведения правой части к общему знаменателю коэффициенты при одинаковых степенях левой и правой частей равенства должны совпадать:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2(A+B+C)+x(-A-2B+C)+(-2A+C)}{x(x+1)(x-2)}$$

Получаем равенство: $x^2+x-2 = x^2(A+B+C)+x(-A-2B+C)+(-2A+C)$, из которого получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-2B+C=1 \\ -2A+C=-2 \end{cases}$$

Решая эту линейную систему, получаем $A=\frac{9}{7}, \quad B=-\frac{6}{7}, \quad C=\frac{4}{7}$. Поэтому

$$\int\frac{x^2+x-2}{x(x+1)(x-2)}dx=\frac{9}{7}\int\frac{dx}{x}-\frac{6}{7}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{9}{7}\ln|x|-\frac{6}{7}\ln|x+1|+\frac{4}{7}\ln|x-2|+C$$

Пример 2. $\int\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$

Здесь подынтегральная функция следующим образом раскладывается на простейшие дроби:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ A-C=1 \end{cases}$$

Решая ее, получаем $A=1 \quad B=-1 \quad C=0$, значит

$$\int\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C$$

Определенный интеграл

Один из источников появления определенных интегралов – задача вычисления площадей фигур, ограниченных кривыми.

Определение 1. пусть дана функция $y=f(x)$. Фигура, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, вертикальными прямыми $x=a, \quad y=b$ и осью OX, называется криволинейной трапецией.

Отрезок $[a,b]$ разобьем на n частей точками $x_0=a, x_1, x_2, ..., x_n=b$. Проведя через эти точки вертикальные прямые, разобьем исходную фигуру на n более "узких" криволинейных трапеций. Заменим каждую "узкую" криволинейную трапецию с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ на прямоугольник с высотой $f(x_k)$

Определение 2. Выражение $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$, где $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, называется интегральной суммой функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

Геометрический смысл: каждое слагаемое этой суммы есть площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(x_k)$.

Определение 3. $\lim\limits_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$ называется определенным интегралом функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то $\lim\limits_{\max\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$ существует и конечен.

С геометрической точки зрения число $\int_a^b f(x)dx$ естественно считать площадью соответствующей криволинейной трапеции при $f(x) \geq 0$.

Сформулируем ряд свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b dx = b - a$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
5. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Вычисление определенного интеграла

Теорема 1. Функция $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$, если $f(x)$ непрерывна.

Теорема 2. (Формула Ньютона--Лейбница). Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Значение этой формулы трудно переоценить хотя бы по той причине, что вычисление определенных интегралов сводится к уже разработанной технике вычисления неопределенных интегралов.

Пример 1. $\int_0^1 \left(x^2 + x - 1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 - 2x + 3$.

Найдем точки пересечения этих двух линий:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = -x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

$x_1 = 1$, $x_2 = -2$

$$S = \int_{-2}^{1}\left(\left(-x^2 - 2x + 3\right) - \left(x^2 - 1\right)dx\right) = \int_{-2}^{1}\left(-2x^2 - 2x + 4\right)dx = \left(-\frac{2x^3}{3} - x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{31}{3}.$$

Теорема 3. (Подстановка в определенном интеграле). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $\phi(x)$ имеет непрерывную производную на промежутке

$[a,b]$, причем $\phi(a)=a$, $\phi(b)=b$ и для любого $t\in[\alpha,\beta]$, $\phi(t)\in[a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\phi(t)\right)\cdot\phi'(t)dt=F\left(\phi(a)\right)-F\left(\phi(b)\right)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Пример.

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c} x=\sin t \\ x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ dx=\cos t dt \end{array}\right|=\int_0^{\frac{x}{2}}\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕМЕ

РЯДЫ

Задание к выполнению типового расчета.

- В примере 1 найти общий член ряда.
- В примере 2 найти сумму ряда или установить его расходимость.
- В примерах 3 – 7 исследовать сходимость рядов.
- В примерах 8,9 исследовать сходимость знакопеременных рядов.
- В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.
- В примерах 10,11 найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости.
- В примере 12 разложить данную функцию в ряд Тейлора и указать область сходимости найденного разложения к своей функции.
- В примере 13 разложить данную функцию в ряд Маклорена и указать область сходимости этого ряда к своей функции.
- В примерах 14 – 15 выполнить приближенные вычисления с указанной степенью точности.

Примерный типовой вариант

0.1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots$

0.2. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots$

0.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

0.4. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\lg n}\right)$

0.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

0.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$

0.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

0.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\right)$

0.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}$

0.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

0.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot2^n}$

0.12. Разложить функцию $\dfrac{x-2}{x^2+4x+8}$ в ряд по степеням $(x+2)$.

0.13. Разложить функцию $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ в ряд по степеням x.

0.14. Вычислить $\sqrt[5]{35}$ с точностью до 0,0001.

0.15. Вычислить ln 5 с точностью до 0,0001.

Решение примеров типового варианта

Пример 0.1. Найти общий член ряда $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+...$

Решение: Числа, стоящие в числителях дробей $\dfrac{a_n}{b_n}$ образуют арифметическую прогрессию 1,3,5,7,…. По формуле $a_n=a_1+d(n-1)$ вычисляется n-й член этой прогрессии. Здесь $a_1=1$, d = 2, поэтому $a_n=2n-1$. Числа, стоящие в знаменателях дробей $\dfrac{a_n}{b_n}$ образуют геометрическую прогрессию, n-й член которой $b_n=2^n$. Следовательно, общий член ряда $U_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$.

Пример 0.2. Найти сумму ряда или установить его расходимость.

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+...$$

Решение: Представим общий член ряда $U_n=\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ в виде суммы простейших дробей: $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}+\dfrac{C}{n+2}$

Умножив это равенство на знаменатель левой части, придем к тождеству

$$1\equiv A\cdot(n+1)\cdot(n+2)+B\cdot n\cdot(n+2)+C\cdot n\cdot(n+1).$$

При $n=0$ получаем $1=2\cdot A\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$

При $n=-1$ получаем $1=-B\Rightarrow B=-1$

При $n=-2$ получаем $1=2C\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$.

Таким образом,

$$U_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Запишем частичную сумму ряда с учетом полученной новой формулы общего члена ряда:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Итак, $\lim S_n\to\infty=\lim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{4}$ Следовательно, по [I.11.3] ряд сходится и имеет сумму $S=\dfrac{1}{4}$

Пример 0.3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Решение: Так как

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

то ряд расходится по определению [I.11.5] – не выполняется необходимое условие сходимости.

Пример 0.4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\lg n}\right)$

Решение: Сравним данный ряд с гармоническим. Имеем $\frac{1}{\lg n} \geq \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то на основании признака сравнения (второй признак сравнения [I.12.2]) расходится и исследуемый ряд $\frac{1}{\lg n}$.

Пример 0.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

Решение: Сравним данный ряд с рядом $V_n = \frac{1}{n^3}$. Используем третий признак сравнения[I.12.3]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot n^3}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

В соответствии с этим признаком, если существует указанный предел, то оба сравниваемых ряда ведут себя одинаково. Так как ряд $V_n = \frac{1}{n^3}$ сходится, то сходится и ряд

$U_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Пример 0.6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$.

Решение: Используем признак Даламбера [I.12.4].

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n+1}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)}}{\frac{1}{n!\cdot(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0 < 1.$$

Следовательно, по условию признака Даламбера, исследуемый ряд сходится.

Пример 0.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Решение: Воспользуемся радикальным признаком Коши [I.12.5]:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 0.8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\right)$

Решение: Данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно, так как ряд, составленный из модулей его членов сходится по признаку Даламбера [I.13.1].

Пример 0.9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}$

Решение: Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница [I.13.1]: $\lim_{n\to\infty}|U_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)} = 0$ и $|U_n| > |U_n + 1|$. Однако, знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится. Это можно доказать на основании признака сравнения. В качестве эталонного можно использовать гармонический ряд $\frac{1}{n}$. В итоге можно сделать вывод, что исследуемый ряд сходится условно (определение [I.13.2]).

Пример 0.10. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение: По признаку Даламбера имеем $\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$.

Следовательно, исследуемый степенной ряд расходится на всей числовой прямой (см. определение [I.19.6]).

Пример 0.11. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

Решение: По признаку Даламбера имеем: $\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{x^n}{n\cdot 2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|\cdot n}{(n+1)\cdot 2} = \frac{|x|}{2}$.

Следовательно, данный ряд сходится при $\frac{|x|}{2} < 1$, т.е. при $|x| < 2$ или -2 < x < 2. При x = -2 (левая граница интервала сходимости) числовой ряд $U_n = \frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n} = \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно, а при x = 2 (правая граница интервала сходимости) числовой ряд $U_n = \dfrac{2^n}{n \cdot 2^n} = \dfrac{1}{n}$ расходится как гармонический ряд. Таким образом, область сходимости данного ряда $-2 \le x < 2$.

Пример 0.12. Разложить функцию $\dfrac{x-2}{x^2+4x+8}$ в ряд по степеням $(x+2)$.

Решение: Преобразуем исходные выражения к более простому виду.

$$\frac{x-2}{x^2+4x+8} = \frac{x+2-4}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{4}\frac{x+2}{1+\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2}$$

Воспользуемся разложением $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ..., (-1 < x < 1)$, заменяя в нем x на $\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2$, т.е.

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+2}{2}\right)^{2n}$$

Это разложение пригодно, если $\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2 < 1$, или $|x+2| < 2$.

Умножая это разложение на $\dfrac{x+2}{4}$, находим

$$\frac{1}{4}\frac{x+2}{1+\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+2}{2}\right)^{2n+1}$$

Наконец, вычитая из последнего разложения предыдущее, находим окончательный ответ:

$$\frac{x-2}{x^2+4x+8} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{x+2}{2}\right)^{2n}\right) = -1 + \frac{x+2}{4} + \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(x+2)^3}{16} - \frac{(x+2)^4}{16} + ...$$

Интеграл сходимости найденного разложения $|x+2| < 2$ или -4 < x < 0.

Пример 0.13. Разложить функцию $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ в ряд по степеням x.

Решение: Учитывая, что $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x+2)$, и, используя правило разложения дробей на сумму простейших, имеем: $\dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$

Далее находим:

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}}; \quad \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x}$$

Воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...(|x| < 1)$$

И получим второе разложение (см. [I.20.5]):

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$$

(Это разложение пригодно, если $\frac{|x|}{2}<1$, т.е. $|x|<2$).

Аналогично получим второе разложение

$$\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,(|x|<1).$$

Вычитая почленно из первого разложения второе, находим окончательное решение:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\sum_{ò=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\ldots$$

Это разложение применимо в том промежутке, где пригодны оба использованных разложения, т.е. при $|x|<1$.

Пример 0.14. Вычислить $\sqrt[5]{35}$ с точностью до 0,0001.

Решение: Для решения поставленной задачи следует использовать разложение в степенной ряд $(1+x)^m$, для чего $\sqrt[5]{35}$ представим в следующем виде:

$$\sqrt[5]{35}=\sqrt[5]{32+3}=2\cdot\sqrt[5]{1+\frac{3}{32}}.$$

С помощью биномиального ряда $(1+x)^m=1+mx+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\ldots$ найдем разложение функции

$$\sqrt[5]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}\cdot x+\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)1\cdot 2}{2}\cdot x^2+\ldots+\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\ldots\left(\frac{1}{5}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}x^n+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{5}x-\frac{4}{5\cdot 10}x^2+\frac{4\cdot 9}{5\cdot 10\cdot 15}x^3+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{4\cdot 9\cdot\cdots\cdot(5n-6)}{5\cdot 10\cdot\cdots\cdot(5n)}x^n+\ldots$$

Полагая $x=\frac{3}{32}$ и умножая на 2, находим:

$$\sqrt[5]{35}=2\cdot\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{4}{5\cdot 10}\cdot\left(\frac{3}{32}\right)^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{4\cdot 9\cdot\cdots\cdot(5n-6)}{5\cdot 10\cdot\cdots\cdot(5n)}\left(\frac{3}{32}\right)^n+\ldots\right)$$

Так как полученный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то ошибка, которую мы будем совершать при приближенном вычислении числа, не будет превышать первого из отброшенных членов ряда по абсолютной величине и имеет одинаковый с ним знак. Поэтому определим количество необходимых для обеспечения требуемой точности членов ряда n из условия:

$$2\cdot\frac{4\cdot 9\cdot\cdots\cdot(5n-6)}{5\cdot 10\cdots(5n)}\cdot\left(\frac{3}{32}\right)^n\le 0{,}0001.$$

$$\begin{cases} 2\cdot\frac{4}{5\cdot 10}\cdot\left(\frac{3}{32}\right)^2=\frac{9}{6400}>0{,}0001,\ n=2\\ 2\cdot\frac{4\cdot 9}{5\cdot 10\cdot 15}\cdot\left(\frac{3}{32}\right)^3=\frac{81}{6400\cdot 160}<0{,}0001,\ n=3\end{cases}$$

Итак, достаточно взять сумму первых трех членов разложения:

$\sqrt[5]{35} \approx 2\left\{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{4}{5\cdot 10}\left(\frac{3}{32}\right)^2\right\} = 2+\frac{3}{80}-\frac{9}{6400} = 2{,}03609$, или окончательно $\sqrt[5]{35} \approx 2{,}0361$.

Вычисление проведено с одним запасным знаком, чтобы не вносить дополнительную ошибку из-за неточности вычислений.

Пример 0.15. Вычислить ln 6 с точностью до 0,0003.
Решение: При вычислении логарифмов любых положительных чисел применяется формула:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x)-\ln(1-x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

В последней формуле положим $\frac{1+x}{1-x} = 6 \Rightarrow x = \frac{6-1}{6+1} = \frac{5}{7}$. Тогда ошибка

$r_n < 2\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\frac{1}{1-x^2} < 0{,}0003$. Это неравенство выполняется при n = 8, следовательно:

$$\ln 6 = 2\left(\frac{5}{7}+\frac{5^3}{3\cdot 7^3}+\ldots+\frac{5^{17}}{17\cdot 7^{17}}\right) = 1{,}79143 \approx 1{,}7914.$$