МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

«СОГЛАСОВАНО»
Руководитель образовательной программы

_____________ И.Л. Артемьева
«28» 08 2015 г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Заведующая кафедрой прикладной математики, механики, управления и программного обеспечения

_____________ И.Л. Артемьева
«28» 08 2015 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Геометрия и топология

Направление подготовки – 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»
профиль «Технология программирования»
Форма подготовки (очная)

курс _2_ семестр _3, 4
лекции 72 час.
практические занятия 72 час.
лабораторные работы_______час.
в том числе с использованием МАО лек._____/пр._____/лаб._____ час.
в том числе в электронной форме лек._____/пр._____/лаб._____ час.
всего часов аудиторной нагрузки 144 час.
в том числе с использованием МАО _____ час.
в том числе в электронной форме _____ час.
самостоятельная работа 108 час.
в том числе на подготовку к экзамену 72 час.
курсовая работа / курсовой проект _________ семестр
зачет ___________ семестр
экзамен 3, 4 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 15 марта 2015 г. № 222

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры Алгебры, геометрии и анализа
протокол № 1 от « 2 » сентября 2015 г.

Заведующая кафедрой к.ф.-м.н., профессор Шепелева Р.П.
Составитель (ли): д.ф.-м.н. Скурихин Е. Е.

Оборотная сторона титульного листа РПУД

I. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:
Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______
Заведующий кафедрой ________________________ __________________
(подпись) (И.О. Фамилия)

II. Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры:
Протокол от «_____» _________________ 20___ г. № ______
Заведующий кафедрой ________________________ __________________
(подпись) (И.О. Фамилия)

ABSTRACT

Bachelor's degree in 02.03.03 – Software and Administration of Information Systems

Study profile Programming technology

Course title: Geometry and topology

Basic part of Block 1, _7_credits

Instructor: Skurikhin E.

At the beginning of the course a student should be able to: make algebraic manipulations from school course of mathematics and show knowledge of mathematical analysis got during two terms and knowledge of linear algebra.

Learning outcomes: ability to apply knowledge of the mathematical bases of computer science in professional activity.

Course description: algebraic and differential topology, tensor analysis, methods used in physics, mechanics, differential equations and mathematical analysis.

Main course literature:

1. Skurikhin E.E. Bilineynaya geometriya. Chast' 1. Evklidovy prostranstva [Bilinear geometry. Part 1. Euclidean spaces]. Vladivostok, Far Eastern Federal University Publ., 2010. 78 p.

https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:294956&theme=FEFU

2. Skurikhin E.E., Trikashnaya N.V. Bilineynaya geometriya. Chast' 2. Krivye i poverkhnosti vtoroy stepeni [Bilinear geometry. Part 2. Second-order curves and surfaces]. Vladivostok, Far Eastern Federal University Publ., 2010. 39 p.

https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:295056&theme=FEFU

3. Kuzovlev V.P. Podaeva N.G. Kurs geometrii: elementy topologii, differentsial'naya geometriya, osnovaniya geometrii [The course of geometry: the elements of topology, differential geometry, the fundamentals of geometry]. Moscow, FIZMATLIT, 2012. 206 p.

https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:674834&theme=FEFU

4. Kostrikin A.I., Manin Yu.I. Lineynaya algebra i geometriya [Linear algebra and geometry]. Saint Petersburg, Lan, 2008. 303 p.

http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281458&theme=FEFU

Form of final control: exam.

АННОТАЦИЯ

Рабочая программа учебной дисциплины «Геометрия и топология» разработана для студентов 2 курса по направлению, обучающихся по направлению 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», профиль «Технология программирования». Дисциплина входит в базовую часть блока «Дисциплины (модули)»: Б1.Б.11.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 7 зачетных единиц (252 часа). Дисциплина реализуется на 2 курсе в 3,4 семестре. В 3 семестре дисциплина содержит 54 часа лекций, 36 часов практических занятий, 0 часов лабораторных работ, из них 0 часов лекций, 0 часов практических занятий, 0 часов лабораторных работ с использованием методов активного обучения. На самостоятельную работу студентов отводится 54 часа, из них 36 на подготовку к экзамену. В 4 семестре дисциплина содержит 18 часов лекций, 36 часов практических занятий, 0 часов лабораторных работ, из них 0 часов лекций, 0 часов практических занятий, 0 часов лабораторных работ с использованием методов активного обучения. На самостоятельную работу студентов отводится 54 часа, из них 36 на подготовку к экзамену.

Преподавание геометрии и топологии связано с курсами математического анализа, дифференциальных уравнений, информатики, прикладными дисциплинами. Опирается на школьный курс математики; для усвоения материала необходимо знать факты и формулы и уметь производить алгебраические преобразования в рамках школьного курса математики. Для изучения данной дисциплины необходимо усвоение курса математического анализа в объеме двух семестров, а также разделов курса алгебры, относящихся к линейной алгебре.

Целями освоения дисциплины являются введение в такие современные разделы математики, как алгебраическая и дифференциальная топология, тензорный анализ, а также знакомство с методами, применяющимися в дальнейшем при изучении физики, механики, дифференциальных уравнений, математического анализа.

Задачами изучения дисциплины являются:

- овладение векторной алгеброй в многомерных пространствах и её применениями к геометрическим задачам,

- изучение дифференцируемых кривых и поверхностей,

- овладение методом дифференциальных форм, основными понятиями общей топологии и их связями с математическим анализом и дискретной математикой,

- знакомство с теорией гомологий, либо с теорией гладких многообразий.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать:

• фундаментальные понятия геометрии и топологии;

• основные методы геометрии и топологии, их связь с алгебраическими и аналитическими методами и их место в других областях науки и техники;

• а также:

• уметь применять свои геометрические знания при решении теоретических и прикладных задач.

• решать основные типы геометрических задач, уметь использовать уравнения линий и поверхностей.

В результате изучения дисциплины у студентов формируются следующие компетенции:

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
Способность применять в профессиональной деятельности знания математических основ информатики (ОПК-2)	Знает	основные понятия и инструменты геометрии и топологии, роль и место их в математической науке, в приложения к естественным наукам.
	Умеет	применять полученные знания для решения математических задач, использовать геометрический язык и символику при построении моделей; применять методы геометрии и топологии.
	Владеет	Геометрическими и топологическими методами решения научных, в том числе прикладных задач.

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины «Геометрия и топология» применяются следующие методы активного обучения:

Проблемная лекция - опирается на логику последовательно моделируемых проблемных ситуаций путем постановки проблемных **вопросов** или предъявления проблемных задач

Уровень сложности, характер проблем зависят от подготовленности обучающихся, изучаемой темы и других обстоятельств.

Лекция-консультация. Эта форма занятий предпочтительна при изучении тем с четко выраженной практической направленностью. Варианты проведения подобных лекций:

Вариант 1. Занятия начинаются со вступительной лекции, где преподаватель акцентирует внимание обучающихся на ряде проблем, связанных с практикой применения рассматриваемого положения. Затем слушатели задают вопросы.

Основная часть занятия (до 50% учебного времени) уделяется ответам на вопросы. В конце занятия проводится небольшая дискуссия, свободный обмен мнениями, завершающийся заключительным словом лектора.

Вариант 2. За несколько дней до объявленного занятия преподаватель собирает вопросы слушателей в письменном виде.

Первая часть занятия проводится в виде лекции, в которой преподаватель отвечает на эти вопросы, дополняя и развивая их по своему усмотрению.

Вторая часть проходит в форме ответов на дополнительные вопросы слушателей, свободного обмена мнениями, и завершается заключительным словом преподавателя.

Вариант 3. Слушатели заблаговременно получают материал к занятию. Как правило, он носит не только учебный, но и инструктивный характер, т.е.: представляет собой методическое руководство к практическому использованию.

Слушатели должны изучить материал и подготовить свои вопросы лектору-консультанту. Занятие проводится в форме ответов на вопросы и свободного обмена мнениями

Лекция-беседа. Она предполагает максимальное включение обучающихся в интенсивную беседу с лектором. Преимущество этой формы перед обычной лекцией состоит в том, что она привлекает внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определяет содержание, методы и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории.

Различают несколько ее разновидностей:

лекция-диалог

лекция-дискуссия,

лекция-диспут.

I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

1. Евклидовы пространства и их подпространства. Метод координат. (20 часов)

Измерение расстояний. Метрическое пространство. Отрезки, лучи и прямые. Определение евклидова пространства. Векторы в евклидовом пространстве, векторная алгебра. Векторное параметрическое уравнение прямой, луча, отрезка. Угол между векторами. Скалярное произведение, связь с проекцией. Алгебраические свойства и геометрический смысл скалярного произведения. Параллельные переносы точек, векторов и прямых. Групповые свойства параллельных переносов. Операции над векторами, отложенными от разных точек. Аффинные и декартовы системы координат. Свойства и вычисление декартовых координат, их связь с проекциями, углами и скалярными произведениями.

Подпространства эвклидова пространства. Их характеристика в терминах векторных подпространств. Задание эвклидова подпространства векторным подпространством. Размерность евклидова подпространства. Параллельность векторов и подпространств. Необходимое и достаточное условие пересечения 2 подпространств. Изометрии и преобразования подобия. Их разложения в суперпозицию параллельного переноса и линейного преобразования.

Прямая, как одномерное подпространство евклидова пространства. Каноническое уравнения прямой. Параллельность 2 прямых. Взаимное расположение 2 прямых в произвольном евклидовом пространстве, а также в 2-мерном евклидовом пространстве.

Плоскость, как двумерное евклидово подпространство. Векторное параметрическое уравнение плоскости. Линейная геометрия плоскости. Взаимное расположение 2 прямых, 2 плоскостей, а также прямой и плоскости в многомерных пространствах.

Прямые и плоскости в 3-мерном пространства. Их уравнения и взаимное расположение. Полуплоскость и полупространство. Их задание и свойства.

Векторы в евклидовом пространстве.

Скалярное произведение. Ортогональные системы векторов. Проекция точки на прямую. Формулы для нахождения проекции точки и вектора на прямую. Угол между прямыми. Декартовы системы координат,

Плоскость, как двумерное евклидово подпространство. Векторное параметрическое уравнение плоскости. Линейная геометрия плоскости. Взаимное расположение 2 прямых, 2 плоскостей, а также прямой и плоскости в многомерных пространствах.

Гиперпространства, их задание одним линейным уравнением.

Уравнение прямой и плоскости, соответственно в плоскости и 3-мерном пространстве. Линейное уравнение, как уравнение гиперпространства. Проекция точки на евклидово подпространство. Общий перпендикуляр двух подпространств. Формула расстояния от точки до гиперпространства и между параллельными гиперпространствами в n-мерном пространстве. Случаи n=2 и n=3.

Преобразования аффинных и декартовых координат. Матрицы перехода, их свойства. Ориентированные евклидовы пространства. Формулы преобразования аффинных и декартовых координат векторов и точек.

Ориентированные плоскости. Ориентированные углы между векторами плоскости. Формула преобразования декартовых координат на плоскости. Сложение ориентированных углов. Полярные координаты.

Ориентированное трёхмерное пространство. Векторное произведение. Двойное векторное произведение. Тождество Якоби. Понятие алгебры Ли. Смешанное произведение.

2. Кривые и поверхности в евклидовом пространстве (20 часов).

Дифференцирование и интегрирование вектор-функций 1 переменной. Параметризованные кривые в евклидовом пространстве. Задание параметризованных кривых вектор-функциями. Вектор скорости и касательная. Угол между кривыми в точке пересечения. Длина кривой. Естественная параметризация кривой. Формулы Френе. Кривизна и кручение кривой. Базис Френе.

Поверхности в 3-х мерном эвклидовом пространстве. Элементарные области на плоскости. Элементарные поверхности, поверхности, локальные параметризации, дифференцируемые и гладкие параметризации и поверхности. График дифференцируемой функции, как гладкая элементарная поверхность. Локальное представление гладкой поверхности в виде графика функции

Касательное пространство к поверхности. Описание касательного пространства в неособой точке поверхности. Уравнение касательной плоскости и нормальной прямой. Задание квадратичной формы на касательном пространстве. 1-я основная (метрическая) форма поверхности, коэффициенты метрической формы. .

2-я основная форма поверхности. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Теорема Менье. Теорема Эйлера. Гауссова и средняя кривизны.

Деривационные формулы. Символы Кристоффеля. Теорема Гаусса. Элементы внутренней геометрии поверхностей. Критерий изометричности. Ковариантные производные. Геодезическая кривизна. Геодезические на поверхностях.

Функционал действия. Вывод уравнений Эйлера – Лагранжа. Экстремальные свойства геодезических. Поверхности вращения.

Кривые и поверхности 2 степени. Их исследование, построение и классификация.

3. Элементы топологии (18 час)

Основные теоретико-множественные операции и соотношения. Определение топологического пространства. Примеры. Метрическая и эвклидова топологии. Аксиомы отделимости. Подпространства топологического пространства.

Открытые и замкнутые множества. Замыкание, внутренность, граница.

База и предбаза топологии. Фундаментальные системы окрестностей.

Непрерывность и пределы отображений. Критерии непрерывности отображений топологических и метрических пространств. Непрерывность суперпозиции и ограничения отображений.

Факторные отображения и гомеоморфизмы. Открытые и замкнутые отображения. Фактортопология и склеивание.

Связность и линейная связность.

Топологические свойства и конструкции. Аксиомы отделимости. Связность, линейная связность, компоненты связности. Связные подмножества вещественной прямой.

Компактные пространства. Произведение топологических пространств. Теоремы Тихонова о произведении и вложении.

Выпуклые множества. Симплексы, грани симплекса. Теорема о гомеоморфности компактного выпуклого множества шару, а его границы - сфере. Описание внутренних точек симплекса. Гомеоморфность симплекса шару. Симплициальные комплексы. Триангуляции и полиэдры. Точные последовательности, комплексы и гомологии. Вычисление групп гомологий симплициального комплекса. Функториальные свойства гомологий. Общее представление о функторах. Гомологические функторы. Теорема о неподвижной точке отображения шара в себя.

4. Векторные поля, тензоры и дифференциальные формы.(14 час.)

Дифференцируемые многообразия. Карты, атласы, дифференцирумые структуры. Топология на многообразии. Функции на многообразиях. Отображения многообразий.

Касательные векторы и операторы дифференцирования. Векторные поля, интегральные кривые и однопараметрические группы преобразований. Касательное и кокасательное пространства к многообразию в точке. Базисы и размерности касательного и кокасательного пространств. Касательное и кокасательное расслоения.

Тензоры типа (p,q). Операции над тензорами. Дифференциальные формы. Внешнее произведение и внешнее дифференцирование. Точные и замкнутые формы. Запись уравнений Максвелла в тензорной форме.

Ситуация монополя Дирака. Комплекс де Рама. Когомологии де Рама. Нетривиальность когомологий де Рама выколотой плоскости.

II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

Практические занятия (72 час.)

Занятия проводится **с использованием метода активного обучения «групповая консультация».** Групповые консультации представляют собой своеобразную форму проведения практических занятий, основным содержанием которых является разъяснение отдельных, часто наиболее сложных или практически значимых вопросов изучаемой программы. После всех практических занятий студенты получают задачи для самостоятельной внеаудиторной работы. С каждым практическим занятием повышается сложность предлагаемых задач. Групповая консультация проводятся с целью оказания помощи в самостоятельной работе, в подготовке к рубежной контрольной работе. Студенты сами предлагает для решения те задачи, которые вызвали какие-то затруднения или непонимание. К доске выходят студенты, готовые разъяснить возникшие вопросы. Преподаватель только контролирует ход решения задач, комментирует в случае необходимости какие-то ситуации и обобщает рассмотренный материал. Преимущество практики-консультации перед другими формами проведения практического занятия в том, что она позволяет в большей степени приблизить содержание занятия к практическим интересам обучаемых, в какой-то степени индивидуализировать процесс обучения с учетом уровня понимания и восприятия материала каждым обучаемым.

Занятие 1. Пространство R^n. Расстояние между точками пространства R^n . Общее понятие метрики и метрического пространства. Система координат на множестве. Координаты точек. Полярные координаты на плоскости. (2 часа)

Занятие 2. Векторная алгебра. Аффинные системы координат в евклидовом пространстве. Параллельные переносы. (2 часа)

Занятие 3. Векторное параметрическое уравнение прямой, луча, отрезка. Каноническое уравнения прямой. Взаимное расположение 2 прямых в произвольном евклидовом пространстве, а также в 2-мерном евклидовом пространстве. (2 часа)

Занятие 4. Скалярное произведение - определение, алгебраические свойства и геометрический смысл. Угол между векторами. Формулы для нахождения проекции точки и вектора на прямую. Угол между прямыми. (2 часа)

Занятие 5. Декартовы системы координат, их существование. Свойства и вычисление декартовых координат, их связь с проекциями, углами и скалярными произведениями. Выражение длин и скалярных произведений через декартовы координаты. (2 часа)

Занятие 6. Векторное параметрическое уравнение плоскости. Взаимное расположение 2 плоскостей, а также прямой и плоскости в 3-мерном и 4-мерном пространствах. (2 часа)

Занятие 7. Уравнение прямой в плоскости и плоскости в 3-мерном пространстве. Расстояние от точки до прямой и от точки до плоскости. (2 часа)

Занятие 8. Матрицы перехода, их свойства. Формулы преобразования аффинных и декартовых координат векторов и точек. (2 часа)

Занятие 9. Ориентированный угол между векторами плоскости. Выражение декартовых координат вектора через ориентированный угол. Полярные координаты, связь с декартовыми координатами. (2 часа)

Занятие 10. Векторное произведение, Двойное векторное произведение, смешанное произведение. Вычисление в декартовых координатах, алгебраические свойства и геометрический смысл. (2 часа)

Занятие 11. Кривые 2 степени. Приведение уравнения к каноническому виду и построение. (2 часа)

Занятие 12. Поверхностей 2-й степени в 3-мерном пространстве. Их исследование и построение. (2 часа)

Занятие 13. Вектор-функции 1-й и 2-х переменных. Общее понятие вектор-функции, связь вектор-функции и функции со значением в эвклидовом пространстве. Дифференцирование и интегрирование вектор-функций. Координатные функции. (2 часа)

Занятие 14. Параметризованные кривые. Задание параметризованных кривых вектор-функциями. Вектор скорости и касательная. Угол между кривыми в точке пересечения. Длина кривой. Формула длины дифференцируемой кривой. Естественная параметризация кривой. (2 часа)

Занятие 15. Формулы Френе. Кривизна и кручение кривой. Базис Френе. Условия тождественного равенства нулю кривизны, кручения. (2 часа)

Занятие 16. Поверхности в 3-х мерном эвклидовом пространстве. Элементарные области на плоскости. Элементарные поверхности, поверхности, локальные параметризации, дифференцируемые и гладкие параметризации и поверхности. График дифференцируемой функции, как гладкая элементарная поверхность. Локальное представление гладкой поверхности в виде графика функции. (2 часа)

Занятие 17. Касательное пространство к поверхности. Касательные векторы к поверхности. Описание касательного пространства в неособой точке поверхности. Уравнение касательной плоскости и нормальной прямой. Задание квадратичной формы на касательном пространстве. 1-я основная (метрическая) форма поверхности, коэффициенты метрической формы. Вычисление длины кривой на поверхности, угла между кривыми. (2 часа)

Занятие 18. 2-я основная форма поверхности. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Проекция вектора скорости кривой на нормаль к поверхности. Коэффициенты 2-й основной формы и ее независимость от выбора параметризации. Теорема Менье. Нормальная кривизна поверхности в данном направлении. (2 часа)

Занятие 19. Главные направления и главные кривизны. Теорема Эйлера. Гауссова и средняя кривизны. Нахождение главных направлений и главных кривизн. (2 часа)

Занятие 20. Теорема Гаусса. Деривационные формулы. Теорема Гаусса. (2 часа)

Занятие 21. Элементы внутренней геометрии поверхностей. (2 часа)

Занятие 22. Критерий изометричности. Неизометричность области на сфере и области на плоскости. (2 часа)

Занятие 23. Геодезическая кривизна. Геодезические на поверхностях. Теорема Гаусса-Бонне. (2 часа)

Занятие 24. Дифференцируемые многообразия и дифференциальные формы. Карты, атласы, дифференцирумые структуры. (2 часа)

Занятие 25. Топология на многообразии. Сферы, проективные пространства. Функции на многообразиях. (2 часа)

Занятие 26. Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы. (2 часа)

Занятие 27. Комплекс де Рама. Когомологии де Рама. Нетривиальность когомологий де Рама выколотой плоскости. (2 часа)

Занятие 28. Определения и примеры топологических пространств. Задание топологии на множестве. Аксиомы отделимости. Базы и предбазы топологии. Топологии на конечных множествах. (2 часа)

Занятие 29. Метрическая и эвклидова топологии. Открытые и замкнутые множества. Внутренние точки, точки прикосновения, предельные точки. (2 часа)

Занятие 30. Замыкание, внутренность, граница. Фундаментальные системы окрестностей точек. (2 часа)

Занятие 31. Непрерывность и пределы отображений. Свойства пределов и критерий непрерывности. (2 часа)

Занятие 32. Топологические свойства и конструкции. Аксиомы отделимости. Связность, линейная связность, компоненты связности. Связные подмножества R. (2 часа)

Занятие 33. Компактные пространства. Произведение топологических пространств. (2 часа)

Занятие 34. Вещественные функции на топологических пространствах. Фактортопология и склеивание. (2 часа)

Занятие 35. Гомологические методы. Симплексы, симплициальные комплексы, триангуляции. Вычисление групп гомологий симплициального комплекса. (2 часа)

Занятие 36. Точные последовательности, комплексы и гомологии. (2 часа)

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Упорядоченные множества и категории» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства: текущий контроль	Оценочные средства: промежуточная аттестация
1	Евклидовы пространства и их подпространства. Метод координат	ОПК2	Знает	ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы № 1-65 по теме Евклидовы пространства и их подпространства. Метод координат
			Умеет Владеет	ПР12 домашние задания	
2	Кривые и поверхности в евклидовом пространстве	ОПК2	Знает	ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы № 1-25 по теме Кривые и поверхности
			Умеет Владеет	ПР12 домашние задания	
3	Элементы топологии	ОПК2	Знает	ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы № 1-52 по теме Элементы топологии
			Умеет Владеет	ПР12 домашние задания	
4	Векторные поля, тензоры и дифференциальные формы	ОПК2	Знает	ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы № 1-20 по теме Векторные поля, тензоры и дифференциальные формы
			Умеет Владеет	ПР12 домашние	

				задания	

V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Билинейная геометрия. Евклидовы пространства: [учебное пособие] ч. 1 / Е. Е. Скурихин. Владивосток: Изд-во Дальневосточного университета, 2010. – 78 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:294956&theme=FEFU
2. Билинейная геометрия. Кривые и поверхности второй степени: [учебное пособие] ч. 2 / Е. Е. Скурихин, Н. В. Трикашная. Владивосток: Изд-во Дальневосточного университета, 2010. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:295056&theme=FEFU
3. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии / В. П. Кузовлев, Н. Г. Подаева. Москва: Физматлит, 2012. -206 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:674834&theme=FEFU
4. Дискретная дифференциальная геометрия. Интегрируемая структура / А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис; пер. с англ. В. Э. Адлера. Москва Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика: Институт компьютерных исследований, 2010. – 487 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:299194&theme=FEFU
5. А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. – Санкт-Петербург, «Лань», 2008, – 303 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:281458&theme=FEFU
6. Шафаревич, И. Р. Линейная алгебра и геометрия [Электронный ресурс] / И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3. http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=544772
7. Лекции по дифференциальной геометрии. [Электронный ресурс] / Сизый С. В. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 376 с. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922107426.html
8. Примаков, Д. А. Геометрия и топология [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Д. А. Примаков, Р. Я. Хамидуллин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: МФПА, 2011. - 272 с. (Университетская серия). - ISBN 978-5-902597-13-1. http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=451172
9. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов. / Беклемишев Д. В. - 12-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922109796.html

Дополнительная литература

1. Иванов А.О., Тужилин А.А. Лекции по классической дифференциальной геометрии. М.: Новая университетская библиотека. – 2009.- 233 с.
2. Прасолов В.В., Тихомиров В.М. Геометрия. 2-е изд., перераб. И доп. – М.:МЦНМО. – 2007.- 328 с.
3. Босс В. Лекции по математике. Том 13. Топология: Учебное пособие. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». – 2009. – 216 с.
4. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.:Наука, физ.-мат., 1987. 432 с.
5. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. М.:Наука, физ.-мат., 1986. 480 с.
6. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, физ.-мат., 1974. 176 с.
7. Общая топология / Дж. Л. Келли; пер. с англ. А. В. Архангельского. М.:Наука, 1981. 432 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:691627&theme=FEFU
8. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Под ред. А.С.Феденко. М.: Наука, физ.-мат., 1979. 272 с.
9. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.:Наука, физ.-мат., 1986. 760 с.
10. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.:Наука, физ.-мат., 1984. 344 с.
11. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. В 3-х томах. - М.:УРСС – 1998-2001.
12. Новиков С.П. Топология. М.: Институт компьютерных исследований. – 2002. – 335 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:406295&theme=FEFU
13. Общая топология / Р. Энгелькинг; пер. с англ. М. Я. Антоновского, А. В. Архангельского. М.: Мир. 1986. – 751 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:53165&theme=FEFU
14. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. М.:Наука, физ.-мат. 1986. 400 с.
15. Хилтон П. Дж., Уайли С. Теория гомологий. М.:Мир. 1966. 452 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:94649&theme=FEFU
16. Элементы теории гомологий / В. В. Прасолов. Москва: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2006. – 448 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:248888&theme=FEFU
17. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 223 с. https://lib.dvfu.ru:8443/lib/item?id=chamo:307475&theme=FEFU
18. А.И. Мальцев. Основы линейной алгебры. – Санкт-Петербург, «Лань», 2005, - 470 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:239638&theme=FEFU

19. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / П. С. Александров. Санкт-Петербург, «Лань», 2009, - 512 с. http://lib.dvfu.ru:8080/lib/item?id=chamo:298699&theme=FEFU

Интернет-ресурсы

1. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113601.html Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии [Электронный ресурс] / Кузовлев В.П., Подаева Н.Г. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. -
2. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111393.html Линейная алгебра и геометрия. [Электронный ресурс] / Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. -
3. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922115827.html Высшая математика. Линейная алгебра ианалитическая геометрия [Электронный ресурс] / Геворкян П.С - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014. -
4. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102672.html Высшая геометрия. [Электронный ресурс] / Ефимов Н.В. - 7-е изд. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. -
5. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922112901.html Аналитическая геометрия и линейная алгебра. [Электронный ресурс] / Кадомцев С. Б. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. -
6. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922103865.html Линейная алгебра и многомерная геометрия [Электронный ресурс] / Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. - 4-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. -
7. http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=544579 Высшая геометрия / Н.В. Ефимов, - 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 584 с. ISBN 5-9221-0267-2
8. http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=318084 Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебно-методическое пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 168 с.: 60x88 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (обложка) ISBN 978-5-16-005479-7
9. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922100106.html Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс]: Учеб. пособие / Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.; Под ред. Д.В. Беклемишева. - 2-е изд., перераб. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006." -
10. http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114806.htmlРешение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] / Беклемишев Д.В. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. -
11. http://www.alleng.ru/edu/math9.htm Образовательные ресурсы Интернета - математика. Высшая школа.
12. https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/ff4/Umnov-AnGeom-i-LinAl-arph0duocc9.pdf Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учеб. пособие / А. Е. Умнов. – 3-е изд., испр. и доп. –. М.: МФТИ, 2011. – 544 с. ISBN 978-5-7417-0378-6.

13. http://lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=42&pl1_id=207 А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. – Санкт-Петербург, «Лань», 2008, – 303 с.
14. http://lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=42&pl1_id=493 П.С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Санкт-Петербург, «Лань», 2009, - 512 с.
15. http://www.alleng.ru/d/math/math156.htm Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.1980. – 240 с.
16. http://e.lanbook.com/view/book/319/ М.М. Постников. Линейная алгебра. Лекции по геометрии. Часть II: Учебное пособие – Санкт-Петербург, «Лань», 2009. - 400 с.

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного достижения учебных целей занятий должны выполняться следующие основные требования:

-соответствие действий обучающихся ранее изученным на лекционных и семинарских занятиях методикам и методам.

-максимальное приближение действий студентов к реальным, соответствующим будущим функциональным обязанностям.

-поэтапное формирование умений и навыков, т.е. движение от знаний к умениям и навыкам, от простого к сложному и т.д..

-использование при работе на тренажерах или действующей технике фактических документов, технологических карт, бланков и т.п.

-выработка индивидуальных и коллективных умений и навыков.

- распределение времени, отведенного на занятие, на решение каждой задачи;

-подбор иллюстративного материала (графиков, таблиц, схем), необходимого для решения задач, продумывание расположения рисунков и записей на доске.

Студент должен:

- научиться работать с книгой, документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой.

-формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

. На лекциях преподаватель объясняет теоретический материал. Вводит основные понятия, определения, свойства. Формулирует и доказывает теоремы. Приводит примеры. Необходимо поддерживать непрерывный контакт с аудиторией, отвечать на возникающие у студентов вопросы. На практических занятиях преподаватель разбирает примеры по пройденной теме. Во второй части занятия студентам предлагается работать самостоятельно, выполняя задания по теме. Преподаватель контролирует работу студентов, отвечает на возникающие вопросы, подсказывает ход и метод решения. Если знаний полученных в аудитории оказалось недостаточно, студент может самостоятельно повторно прочитать лекцию, просмотреть практикум с разобранными примерами, которые собраны в изучаемом курсе в системе Bb dvfu. После выполнения задания, студент отправляет его на проверку преподавателю в соответствующем «Назначении». Работа должна быть отослана в формате PDF одним документом. По данному курсу разработаны методические указания, которые выложены с системе Bb dvfu в соответствующем разделе.

По данному курсу разработаны следующие методические пособия:

1. Билинейная геометрия. Евклидовы пространства: [учебное пособие] ч. 1 / Е. Е. Скурихин. Владивосток: Изд-во Дальневосточного университета, 2010. – 78 с. http://srv-elib-01.dvfu.ru:8000/cgi-bin/edocget.cgi?ref=/514/skurikhin2.pdf

   Содержание пособия:

   1. Векторы в евклидовых пространствах
   1.0. Функция сравнения удалённостей.
   1.1. Взаимное расположение точек на прямой
   1.2. Операции над векторами.
   1.3. Свойства ортогональных проекций.
   1.4. Скалярное произведение векторов.
   1.5. Операции над свободными векторами.
   1.6. Параллельные переносы
   2. Евклидовы подпространства и системы координат.
   2.0. Необходимые сведения из линейной алгебры.
   2.1. Общие свойства евклидовых подпространств.
   2.2. Аффинные и декартовы системы координат.

2. Билинейная геометрия. Кривые и поверхности второй степени [Электронный ресурс]: [учебное пособие] ч. 2 / Е. Е. Скурихин, Н. В. Трикашная. http://srv-elib-01.dvfu.ru:8000/cgi-bin/edocget.cgi?ref=/514/skurikhin1.pdf

   Содержание пособия:
   1. Уравнения эллипса
   2. Уравнения гиперболы
   3. Классификация кривых

VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебные аудитории кампуса ДВФУ. Мультимедийная лекционная аудитория (мультимедийный проектор, настенный экран, документ-камера)

Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ
по дисциплине «Геометрия и топология»
Направление подготовки – 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»
профиль «Технология программирования»
Форма подготовки (очная)

Владивосток
2015

План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
1	1-4 недели	Контрольная работа	1 пара	Зачет по заданию
2	5-6 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Зачет по заданию
3	7-8 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Зачет по заданию
4	9-10 недели	Контрольная работа	1 пара	Зачет по заданию
5	11-14 недели	Индивидуальное задание	2 недели	Зачет по заданию
6	15-17 недели	Индивидуальное задание	2 недели	Зачет по заданию
7	19 неделя	Контрольная работа	1 неделя	Зачет по заданию
8	20-22 недели	Индивидуальное задание	1 неделя	Зачет по заданию
9	23-29 недели	Индивидуальное задание	2 недели	Зачет по заданию

Материалы для самостоятельной работы студентов подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий и контрольных работ по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены ниже). Критерии оценки: студент получает максимальный балл, если работа выполнена без ошибок и оформлена в соответствии с требованиями преподавателя.

.

Индивидуальное задание № 1 (системы)

Вариант 1

1. Даны векторы $\vec{a} = (1,1,2)$ и $\vec{b} = (-3,1,2)$. Найти координаты векторного произведения $[-\vec{b}, 2\vec{a}+\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8,-15,3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-1,-4,-1), \vec{b} = (1,0,-3), \vec{c} = (2,-4,1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(-1,-1,0)$, $(-1,0,2)$ и $(2,2,-2)$.

5. Даны три точки $A = (4,3)$, $B = (1,2)$, $C = (0,-2)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 2

1. Даны векторы $\vec{a} = (2,-1,0)$ и $\vec{b} = (-2,2,3)$. Найти координаты векторного произведения $[\vec{a}-\vec{b}, 4\vec{a}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4,-2,-3)$ и $\vec{b} = (0,1,3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2,-1,2), \vec{b} = (1,2,-3), \vec{c} = (3,-4,7)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(0,1,1)$, $(2,-1,0)$ и $(-1,-1,-1)$.

5. Даны три точки $A = (1,-3)$, $B = (0,1)$, $C = (-2,1)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 3

1. Даны векторы $\vec{a} = (2,3,0)$ и $\vec{b} = (-1,1,-1)$. Найти координаты векторного произведения $[4\vec{a}+2\vec{b}, 2\vec{a}+3\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8,-15,3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-1,1,-2), \vec{b} = (-3,2,3), \vec{c} = (-4,-3,1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(-4,1,0)$, $(-1,0,1)$ и $(-1,-2,-2)$.

5. Даны три точки $A = (-1,-3)$, $B = (1,-4)$, $C = (1,1)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 4

1. Даны векторы $\vec{a} = (-1,0,1)$ и $\vec{b} = (-3,-2,1)$. Найти координаты векторного произведения $[-\vec{a}-\vec{b}, -2\vec{a}+2\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8,-15,3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-1,3,-3), \vec{b} = (9,-3,6), \vec{c} = (2,2,-1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(-3,-3,-1)$, $(0,0,-2)$ и $(0,0,3)$.

5. Даны три точки $A = (1,3)$, $B = (0,-1)$, $C = (3,-2)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 5

1. Даны векторы $\vec{a} = (0,-2,2)$ и $\vec{b} = (2,-3,1)$. Найти координаты векторного произведения $[-2\vec{a}-3\vec{b}, -\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4,-2,-3)$ и $\vec{b} = (0,1,3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-1,-2,3), \vec{b} = (4,1,-1), \vec{c} = (-2,3,4)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(4,3,1)$, $(-2,0,4)$ и $(0,3,2)$.

5. Даны три точки $A = (-1,3)$, $B = (1,-3)$, $C = (0,1)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 6

1. Даны векторы $\vec{a} = (-2, -1, 1)$ и $\vec{b} = (3, 2, -1)$. Найти координаты векторного произведения $[3\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, 4, -6), \vec{b} = (1, -3, 4), \vec{c} = (2, -1, 1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(1, 1, -3)$, $(1, 1, 2)$ и $(0, 3, -2)$.

5. Даны три точки $A = (-2, 2)$, $B = (3, 3)$, $C = (-2, -2)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 7

1. Даны векторы $\vec{a} = (3, -2, 3)$ и $\vec{b} = (1, 0, 2)$. Найти координаты векторного произведения $[-3\vec{a} + 2\vec{b}, 2\vec{a} - 2\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (3, -3, 1), \vec{b} = (0, 0, -1), \vec{c} = (0, -2, -3)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(1, 0, 2)$, $(-3, 3, 2)$ и $(1, -4, 0)$.

5. Даны три точки $A = (1, 3)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, -1)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 8

1. Даны векторы $\vec{a} = (-1, -4, -3)$ и $\vec{b} = (2, -1, -4)$. Найти координаты векторного произведения $[-2\vec{a} + 2\vec{b}, -2\vec{a} - 2\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, -1, 2), \vec{b} = (1, 2, -3), \vec{c} = (3, -4, 7)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(0, 3, 4)$, $(-2, 1, -2)$ и $(-1, -2, -1)$.

5. Даны три точки $A = (0, -1)$, $B = (0, 1)$, $C = (-3, 1)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 9

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, 2, -1)$ и $\vec{b} = (1, 2, -4)$. Найти координаты векторного произведения $[-2\vec{a}, 2\vec{a} + \vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-3, -3, -4), \vec{b} = (-2, 0, 1), \vec{c} = (-1, -1, 1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(2, 0, -4)$, $(0, -1, 0)$ и $(3, 1, 0)$.

5. Даны три точки $A = (0, 3)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, -2)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 10

1. Даны векторы $\vec{a} = (-2, 1, 2)$ и $\vec{b} = (0, 3, 2)$. Найти координаты векторного произведения $[\vec{a} + 2\vec{b}, -3\vec{a} + \vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-1, 3, -3), \vec{b} = (9, -3, 6), \vec{c} = (2, 2, -1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(0, 2, -1)$, $(1, -3, -1)$ и $(-1, 2, -2)$.

5. Даны три точки $A = (1, -1)$, $B = (0, 1)$, $C = (0, -2)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 11

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, -2, -1)$ и $\vec{b} = (-1, 3, 0)$. Найти координаты векторного произведения $[-\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-1, 3, 1), \vec{b} = (-3, 3, -2), \vec{c} = (2, 1, -3)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(2, 0, 1)$, $(-3, 1, 1)$ и $(-1, -1, -1)$.

5. Даны три точки $A = (1, -1)$, $B = (0, -1)$, $C = (1, 2)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 12

1. Даны векторы $\vec{a} = (-3, 0, 0)$ и $\vec{b} = (-2, -1, 1)$. Найти координаты векторного произведения $[-\vec{a} + 2\vec{b}, -2\vec{a} - 2\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, 4, -6), \vec{b} = (1, -3, 4), \vec{c} = (2, -1, 1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(-2, -2, 1)$, $(4, 2, 1)$ и $(-2, -3, 1)$.

5. Даны три точки $A = (-1, 2)$, $B = (-4, 1)$, $C = (2, 0)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 13

1. Даны векторы $\vec{a} = (0, -4, 3)$ и $\vec{b} = (1, 3, -1)$. Найти координаты векторного произведения $[\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (0, 1, 0), \vec{b} = (-1, 1, 2), \vec{c} = (-1, -3, 0)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(1, 0, 1)$, $(2, 3, -1)$ и $(-2, 3, -2)$.

5. Даны три точки $A = (-2, -3)$, $B = (3, 0)$, $C = (1, -1)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 14

1. Даны векторы $\vec{a} = (0, 0, 4)$ и $\vec{b} = (-3, -2, -1)$. Найти координаты векторного произведения $[-3\vec{a} + \vec{b}, -\vec{a}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, -1, 2), \vec{b} = (1, 2, -3), \vec{c} = (3, -4, 7)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(1, -1, 2)$, $(2, 3, -2)$ и $(0, -1, -2)$.

5. Даны три точки $A = (0, -1)$, $B = (1, 2)$, $C = (0, 0)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 15

1. Даны векторы $\vec{a} = (-1, -3, 2)$ и $\vec{b} = (3, 1, 1)$. Найти координаты векторного произведения $[\vec{a} + 2\vec{b}, -\vec{a} - 4\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (3, -1, 1), \vec{b} = (-2, 2, 0), \vec{c} = (0, -3, 3)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 3)$ и $(-2, -1, 1)$.

5. Даны три точки $A = (-4, -2)$, $B = (-3, 3)$, $C = (4, 0)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 16

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, -2, 1)$ и $\vec{b} = (-1, -2, 3)$. Найти координаты векторного произведения $[2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-1, 3, -3), \vec{b} = (9, -3, 6), \vec{c} = (2, 2, -1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(4, 3, 2)$, $(4, -1, -2)$ и $(-1, -2, 0)$.

5. Даны три точки $A = (2, -3)$, $B = (0, 1)$, $C = (-2, 3)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 17

1. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3, -2)$ и $\vec{b} = (-1, 2, -2)$. Найти координаты векторного произведения $[-2\vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (0, 1, -1), \vec{b} = (1, -1, -2), \vec{c} = (0, 0, 2)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(-4, -3, -4)$, $(0, -1, -1)$ и $(-1, 0, 2)$.

5. Даны три точки $A = (2, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (0, 3)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 18

1. Даны векторы $\vec{a} = (4, 4, 0)$ и $\vec{b} = (2, 0, 3)$. Найти координаты векторного произведения $[3\vec{a} - \vec{b}, 4\vec{a} - 3\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, 4, -6), \vec{b} = (1, -3, 4), \vec{c} = (2, -1, 1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(0, 0, 3)$, $(2, 2, -1)$ и $(-3, 1, -4)$.

5. Даны три точки $A = (2, 1)$, $B = (-2, 1)$, $C = (-1, 2)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 19

1. Даны векторы $\vec{a} = (2, -1, 1)$ и $\vec{b} = (1, 0, -2)$. Найти координаты векторного произведения $[-\vec{b}, 3\vec{a} + 3\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (4, -3, 4), \vec{b} = (-3, 1, 0), \vec{c} = (-2, 0, 4)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(2, -1, -1)$, $(0, -3, -1)$ и $(0, -2, -2)$.

5. Даны три точки $A = (-1, -4)$, $B = (-1, 2)$, $C = (1, 3)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 20

1. Даны векторы $\vec{a} = (2, -4, 2)$ и $\vec{b} = (1, 0, 1)$. Найти координаты векторного произведения $[\vec{a} + 2\vec{b}, -3\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, -1, 2), \vec{b} = (1, 2, -3), \vec{c} = (3, -4, 7)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(0, -2, 0)$, $(1, -2, 0)$ и $(1, 1, -1)$.

5. Даны три точки $A = (-2, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, -2)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 21

1. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 4, -3)$ и $\vec{b} = (-2, -4, 2)$. Найти координаты векторного произведения $[\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, 3, -3), \vec{b} = (0, -1, 1), \vec{c} = (0, -4, -2)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(2, 4, 2)$, $(2, -3, -2)$ и $(1, 1, 3)$.

5. Даны три точки $A = (1, 1)$, $B = (1, -1)$, $C = (0, -2)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 22

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, -2, 0)$ и $\vec{b} = (4, -2, -1)$. Найти координаты векторного произведения $[-4\vec{a}, -4\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-1, 3, -3), \vec{b} = (9, -3, 6), \vec{c} = (2, 2, -1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(-1, -2, -3)$, $(1, 3, 1)$ и $(-3, 0, -1)$.

5. Даны три точки $A = (2, 0)$, $B = (1, -2)$, $C = (-3, 0)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 23

1. Даны векторы $\vec{a} = (-2, 1, 1)$ и $\vec{b} = (-2, 0, 1)$. Найти координаты векторного произведения $[-2\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (-3, 1, -1), \vec{b} = (0, 1, -1), \vec{c} = (4, 4, 3)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(3, 1, -2)$, $(-2, 0, -4)$ и $(3, -3, 0)$.

5. Даны три точки $A = (0, -1)$, $B = (1, 2)$, $C = (4, 3)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 24

1. Даны векторы $\vec{a} = (3, 0, 1)$ и $\vec{b} = (1, -2, 3)$. Найти координаты векторного произведения $[\vec{a} + \vec{b}, -3\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, 4, -6), \vec{b} = (1, -3, 4), \vec{c} = (2, -1, 1)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(0, 0, -2)$, $(2, 0, -1)$ и $(1, 1, 3)$.

5. Даны три точки $A = (-3, 0)$, $B = (-1, 1)$, $C = (1, -1)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Вариант 25

1. Даны векторы $\vec{a} = (2, -1, 1)$ и $\vec{b} = (0, -1, -1)$. Найти координаты векторного произведения $[4\vec{a} - \vec{b}, 4\vec{a} + 3\vec{b}]$.

2. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (1, 2, -2), \vec{b} = (-3, 3, 4), \vec{c} = (0, 1, 4)$.

4. Применить процесс ортогонализации к векторам $(2, 1, 0)$, $(-3, -1, 3)$ и $(-2, 1, 2)$.

5. Даны три точки $A = (3, 1)$, $B = (-3, -1)$, $C = (0, 0)$. Найти углы $\angle(l(BC), l(CA))$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $\angle_O(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

1 Определение топологического пространства

Пусть X – множество. Рассмотрим набор его подмножеств τ для которого:

1) объединение любого семейства множеств, принадлежащих совокупности τ, также принадлежит совокупности τ;

2) пересечение любого конечного семейства множеств, принадлежащих совокупности τ, также принадлежит совокупности τ;

3) пустое множество $\emptyset$ и всё множество X принадлежат τ.

– множество X с выделенной топологической структурой τ (т. е. пара (X, τ)) называется топологическим пространством;

– элементы множества X называются точками этого топологического пространства;

– элементы множества τ называются открытыми множествами пространства (X, τ).

Примеры:

Дискретное пространство – множество, в котором τ является множество всех его подмножеств.

M2.1. Убедитесь в том, что это топологическое пространство.

Антидискретное пространство – противоположный пример, в котором топологическая структура самая скромная. Она состоит из X и $\emptyset$.

M2.2. Это тоже топологическая структура, не правда ли?

V2.1. Пусть X есть луч $[0; +\infty)$, а τ состоит из $\emptyset, X$ и всевозможных лучей $(a; +\infty)$, где $a > 0$. Докажите, что это топологическая структура.

(доказать $\cup(a_i; +\infty) = (inf a_i; +\infty)$)

Замечание, если замкнутые лучи $[a; +\infty)$, то ня является топологией, так как $\cup[a_i; +\infty) = (inf a_i; +\infty)$

V2.2. Пусть X есть плоскость. Является ли топологической структурой набор множеств, состоящих из $\emptyset, X$ и открытых кругов с центром в начале координат и всевозможными радиусами?

V2.3. Пусть X состоит из четырех элементов: $X = \{a, b, c, d\}$. Выясните, какие из следующих трёх наборов его подмножеств являются топологическими структурами в X:

1) $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}$;

2) $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}$;

3) $\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

Самый важный пример: вещественная прямая

Пусть $X = R$ – множество всех вещественных чисел, τ совокупность объединений всевозможных семейств открытых интервалов (интервалом мы называем множество вида $(a; b)$.

Это пространство называется обычно вещественной прямой, а топологическую структуру называют канонической или стандартной топологией в R.

M2.3. Убедитесь в том, что эта совокупность удовлетворяет аксиомам топологической структуры.

(доказать $\cup A_i \cap \cup B_j = \cup(A_i \cap B_j)$, когда A_i и B_j интервалы)

V2.4. Пусть $X = R$ и τ состоит из пустого множества и всевозможных бесконечных подмножеств прямой R. Является ли топологической структурой?

V2.5. Пусть опять $X = R$, а τ состоит из пустого множества и дополнений всевозможных конечных подмножеств прямой R. Является ли такое топологической структурой?

Пространство из задачи V2.5 в дальнейшем обозначается через R_{T_1} и называется прямой с T_1-топологией или прямой с топологией Зариского.

V2.7. Является ли набор множеств $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ топологической структурой в двухэлементном множестве $\{0,1\}$?

Топология задачи V2.7 называется топологией связного двоеточия или топологией Серпинского.

Употребление новых терминов: точки, открытые множества, замкнутые множества

M2.4. Переформулируйте аксиомы топологической структуры, употребляя термин открытое множество, где только можно.

Говорят, что множество $F \subset X$ *замкнуто* в пространстве (X, τ) , если его дополнение $X \backslash F$ открыто (т. е. если $X \backslash F \in \tau$).

M2.6. Свойства замкнутых множеств. Докажите что:

1) пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто;

2) объединение любого конечного набора замкнутых множеств замкнуто;

3) пустое множество и всё пространство замкнуты.

Обратите внимание на то, что замкнутость не есть отрицание открытости. (Кстати, и в обыденной речи это не совсем антонимы.)

M2.7. Приведите примеры множеств:

1) являющихся одновременно и открытыми, и замкнутыми;

2) не являющихся ни открытыми, ни замкнутыми.

V2.10. Дайте прямое описание следующих замкнутых множеств: 1) дискретного пространства; 2) антидискретного пространства; 3) стрелки; 4) пространства ; 5) пространства R_{T_1}

V2.14. Перечислите все наборы подмножеств трёхэлементного множества, такие, что существуют топологии, в которых эти наборы являются полными наборами замкнутых множеств. (14)

Окрестностью точки топологического пространства называется любое открытое множество, содержащее эту точку

V2.15. Дайте прямое описание окрестностей точек 1) в дискретном пространстве; 2) в антидискретном пространстве; 3) в стрелке; 4) в ; 5) в связном двоеточии.

M2.9. Любое открытое множество вещественной прямой есть объединение дизъюнктных интервалов.

Задачи

1. Найти все топологии на множестве, состоящие из двух точек. Указать те которые отличны от дискретной и антидискретной.

2. Привести пример топологии на множестве из трех элементов, отличных от дискретной и антидискретной.

3. Какая топология на множестве X порождается множеством всех одноэлементных подмножеств $\{x\}$ $(x \in X)$

5. Показать, что пересечение любого семейства топологий на множестве X является топологией на X .

6. На множестве целых действительных чисел Z найти топологии, порожденные:

а) конечными интервалами $\{m, m+1, \ldots, n\}$;

б) бесконечными интервалами $\{m, m+1, \ldots\}$.

Ответ V2.4. Нет, поскольку пересечение бесконечных множеств может быть конечным (приведите пример).

Ответ V2.5. Да. При решении удобно использовать формулу де Моргана, то, что пересечение конечных множеств всегда конечно и что объединение конечного числа конечных множеств также является конечным множеством.

Ответ M2.4. Объединение любого набора открытых множеств открыто. Пересечение любого конечного набора открытых множеств открыто. Пустое множество и всё пространство открытые множества.

Ответ M2.6. Поскольку по определению замкнутое множество есть дополнение открытого, то утверждение теоремы следует из свойств открытых множеств (примените формулы де Моргана).

$X\backslash(\cup A_i) = \cap(X\backslash A_i)$

$x \in \cap(X\backslash A_i) \Leftrightarrow \ \forall i \in I \ \ x \in X\backslash A_i \Leftrightarrow \ \forall i \in I \ \ x \notin A \Leftrightarrow \ x \notin \cup A_i \Leftrightarrow \ x \in X\backslash \cup A_i$.

Ответ M2.7. В любом пространстве пустое множество и всё простран- ство и открыты, и замкнуты, а в дискретном пространстве всякое множество является таковым. Полуоткрытый интервал ни открыт, ни замкнут.

Ответ M2.9. Пусть U открытое подмножество прямой. Для каждой точки $x \in U$. U рассмотрим наибольший (по включению) интервал $(m_x; M_x)$, содержащий эту точку (им является объединение всех интервалов, содержащих x). Так как множество U открыто, такие интервалы существуют. Ясно, что всякие два интервала данного вида либо не пересекаются, либо совпадают.

2 Базы

Базой топологии называется некоторый набор открытых множеств, такой, что всякое непустое открытое множество представимо в виде объединения множеств из этого набора.

V3.1. Могут ли различные топологические структуры иметь одну и ту же базу?

V3.2. Найдите какие-нибудь базы следующих топологических структур: 1) дискретного пространства; 2) пространства ; 3) антидискретного пространства;4) стрелки. Постарайтесь выбрать базы поменьше.

Набор μ открытых множеств топологического пространства (X, τ) называется *предбазой*, если набор

$\{V \mid V = \cap W_i, W_i \in \mu, i \in I_k\}$ всевозможных конечных пересечений множеств из μ является базой топологии τ .

Если τ_1 и τ_2 – топологические структуры в множестве X и $\tau_1 \subset \tau_2$, то говорят, что структура τ_2 тоньше, чем τ_1 , а τ_1 – грубее, чем τ_2 .

К примеру, из всех топологических структур в данном множестве антидис- кретная – самая грубая, а дискретная – самая тонкая, не правда ли?

V3.8. Покажите, что T_1 -топология (см. § 2) грубее обычной топологии вещественной прямой.

Базы, задающие одну и ту же топологическую структуру, называются *эквивалентными*.

Ответ V3.1. Нет, конечно! Топологическая структура восстанавливается по базе, поскольку она является совокупностью объединений всевозможных наборов множеств, входящих в эту базу.

Ответ V3.8 Поэтому следует показать, что множество $R\backslash\{x_i\}_{i=1}^n$ является открытым в обычной топологии прямой.

3 Метрические пространства

Функция $\rho : X \times X \to R_+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ называется метрикой (или расстоянием) в множестве X, если

1) $\rho(x, y) = 0$, когда $x = y$; 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ $\forall x, y \in X$; 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ $\forall x, y, z \in X$.

Пара (X, ρ) называется метрическое просранство.

M4.1. Покажем, что $\rho(x, y) = 0$, если $x = y$ и $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$, является метрикой

M4.2. Докажите, что следующая функция есть метрика $\rho(x, y) = |x - y|$.

M4.3. Докажите, что следующая функция есть метрика:

$\rho(x, y) = (\Sigma_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$

Именно метрики M4.2 и M4.3 имеют в виду всегда, когда говорят об R и R^n как о метрических пространствах, не описывая метрику. Метрика M4.2 есть специальный случай метрики M4.3. Эти метрики называют евклидовыми.

V4.1. Докажите, что следующая функция есть метрика:

$\rho(x, y) = max_i |x_i - y_i|$.

V4.2. Докажите, что следующая функция есть метрика:

$\rho(x, y) = \Sigma_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

Шары и сферы

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, a – его точка и r – положительное вещественное число. Множества

$B(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$ – открытый шар.

$\bar{B}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}$ – замкнутый шар.

$S(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) = r\}$ – сфера.

M4.4. Убедитесь в том, что: $\bar{B}^1$ есть отрезок $[-1; 1]$, $\bar{B}^2$ есть круг, S^0 – пара точек $\{-1, 1\}$; S^1 – окружность, S^2 – сфера, $\bar{B}^3$ – шар.

M4.5. Докажите, что для любых точек x, a произвольного метрического пространства и любого числа $r > \rho(x, a)$ имеет место включение $B(x, r - \rho(x, a)) \subset B(a, r)$.

V4.7. Каковы шары и сферы в плоскости R^2 с метриками из V4.1 и V4.2 (ср. V4.4)

V4.8. Найдите $\bar{B}(a, 1)$, $\bar{B}(a, 1/2)$, и $S = (a, 1/2)$ в пространстве из задачи M4.1.

V4.12. Докажите, что отрезок с концами в точках $a, b \in R^n$ можно описать как множество $\{x \in R^n \mid \rho(a, x) + \rho(x, b) = \rho(a, b)$, где ρ – евклидова метрика.

Метрическая топология

M4.7. Множество всех открытых шаров метрического пространства является базой некоторой топологии.

M4.9. Критерий открытости. Множество открыто в метрическом пространстве, согда оно содержит каждую свою точку вместе с некото- рым шаром, центром которого она является.

V4.20. Докажите, что всякий замкнутый шар замкнут (относительно метрической топологии).

M4.10. Антидискретное пространство, состоящее более чем из одной точки, неметризуемо.

M4.11. Пространство с конечным множеством точек метризуемо, согда оно дискретно.

Расстояние от точки до множества

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$, $b \in X$. Расстоянием от точки b до множества A называется число $\rho(b, A) = inf\{\rho(b, a) \mid a \in A\}$.

M4.12. Докажите, что если A – замкнутое множество, то $\rho(b, A) = 0$, когда $b \in A$.

Ответ M4.2. Неравенство треугольника в данном случае имеет вид $|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$. Положив $a=x-z$, $b=z-y$, получаем стандартное неравенство $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Ответ M4.3. Как и в решении задачи M4.2, неравенство треугольника переписывается. Двукратное возведение этого неравенства в квадрат и упрощение сводят последнее к неравенству Коши–Буняковского $\Sigma a_i b_i)^2 \leq \Sigma a_i^2 \Sigma b_i^2$.

ОтветM4.5. К примеру, если $y \in B(x, r-\rho(x,a)) \subset B(a,r)$, то $\rho(y,x) < r-\rho(x,a)$, откуда в силу неравенства треугольник, следует, что $\rho(y,a) < r$. Значит $y \in B(a,r)$.

Ответ V4.7. Квадраты, стороны которых параллельны, соответственно, осям координат и биссектрисам координатных углов.

Ответ V4.12. Положим $u=b-x$ и $t=x-a$. Неравенство Коши обращается в равенство, когда векторы u и t сонаправлены, т. е. согда точка x лежит на отрезке с концами в точках a и b.

ОтветM4.9. $\Leftarrow$ Если множество вместе с каждой своей точкой содержит шар с центром в этой точке, то оно является объединением таких шаров, следовательно, оно открыто.

$\Rightarrow$ Если $a \in U$, где U открыто, то $a \in B(a,r)$ и $B(a, r-\rho(a,x)) \subset B(x,r) \subset U$.

Ответ V4.20. Покажите, что множество $X \backslash \bar{B}(a,r) = \{x \mid \rho(x,a) > r\}$ открыто

Ответ M4.10. В нём слишком мало открытых множеств. Если $x, y \in X$ и $r=\rho(x,y) > 0$, то шар $\bar{B}(x,r)$ непуст и не совпадает со всем пространством.

Ответ M4.11. $\Rightarrow$ Пусть $x \in X$. Положим $r = min\{\rho(x,y) \mid y \in X \backslash x\}$. Какие точки входят в шар $\bar{B}(x,r)$.

Ответ M4.12. Условие $\rho(b,A) = 0$ означает, что всякий шар с центром в точке b пересекается с A. А это значит, в силу того, что A замкнуто и его дополнение открыто, что b не принадлежит дополнению множества A и, значит, входит в A.

4 Расположение точек относительно множества

Пусть X – топологическое пространство, $A \subset X$ и $b \in X$. Точка b называется:

– внутренней точкой множества A, если некоторая её окрестность содержится в A;

– внешней точкой множества A, если у неё имеется окрестность, не пересекающаяся с A;

– граничной точкой множества A, если всякая её окрестность пересекается и с A и с его дополнением.

- прикосновения точкой множества A, если всякая её окрестность пересекается с A.

- предельной точкой множества A, если всякая её окрестность пересекается с множеством $A \setminus b$.

Точка множества A, не являющаяся предельной для этого множества, называется изолированной.

Внутренностью множества, лежащего в топологическом пространстве, называется наибольшее (по включению) открытое множество, содержащееся в нём (т. е. его открытое подмножество, содержащее любое другое его открытое подмножество). Внутренность множества A обозначается символом $IntA$ или, подробнее, $Int_X A$.

M6.2. Внутренность всякого множества есть множество его внутренних точек.

M6.4. Докажите, что в R: 1) $Int[0;1) = (0;1)$; 2) $IntQ = \emptyset$; 3) $Int(R \setminus Q) = \emptyset$.

V6.1. Найдите внутренность множества $\{a, b, d\}$ в пространстве V2.3 (1)).

V6.2. Найдите внутренность интервала $(0;1)$ на прямой с топологией Зариского.

Замыканием множества называется наименьшее содержащее его замкнутое множество. Замыкание множества A обозначается символом ClA или, подробнее, $Cl_X A$.

V6.3. 1) Если A – подпространство пространства X и $B \subset A$, то $Cl_A B = Cl_X B \cap A$. 2) Верно ли, что $Int_A B = Int_X B \cap A$.

M6.6. Замыкание множества A совпадает с множеством точек прикосновения множества A.

V6.4. Найдите замыкание множества $\{a\}$ в V2.3 (1)).

M6.10. Докажите, что $b \in ClA$, когда $\rho(b, A) = 0$.

Границей множества A называется множество $ClA \setminus IntA$. Обозначается граница множества A символом FrA или, подробнее, $Fr_X A$ (от английского frontier).

V6.5. Найдите в пространстве границу множества $\{a\}$ в V2.3 (1))..

M6.12. Множество A замкнуто, когда $FrA \subseteq A$.

Ответ M6.2. Пусть точка x внутренняя, т. е. существует открытое множество U_x с $x \in U_x \subset A$. Тогда $U_x \subset IntA$ (поскольку $IntA$ – наибольшее из всех открытых множеств, содержащихся в A а, значит, и $x \in IntA$. Обратно, если $x \in IntA$, то само множество $IntA$ и есть содержащаяся в A окрестность точки x.

Ответ V6.1. $Int\{a, b, d\} = \{a, b\}$,

Ответ V6.2. Внутренность интервала $(0;1)$ на прямой с топологией Зариского пуста, поскольку никакое непустое открытое множество этого пространства не помещается в $(0;1)$.

Ответ V6.4. $Cl\{a\} = \{a, c, d\}$.

Ответ V6.5. $Fr\{a\} = \{c, d\}$.

Ответ M6.12. Так как $IntA \subseteq A$, то $ClA = A$, когда $FrA \subseteq A$.

Индивидуальное задание № 2 (прямая и плоскость)

Вариант № 1

1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси *Oz* и проходящей через точки *A(2; 3; -1)* и *B (-1; 2; 4)*.

2. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x+3y-4z+5=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую *x=3t+1 , y=2t+3, z= –t–2* параллельно прямой $2x-y+z-3=0,\qquad x+2y-z-5=0$.

Вариант № 2

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A(2; -3; 2)* и *B(7; 1; 0)* и параллельной оси *Ox*.

2. Уравнения прямой $\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+3y+z+9=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду и определить углы, образуемые этой прямой с координатными осями.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

Вариант № 3

1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси *Oy* и проходящей через точки *A(2; 1; -2)* и *B(-7; -2; 1)*.

2. Привести к каноническому виду Общие уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 2x+3y-4z+5=0 \end{cases}$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; 2; -3)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3},\qquad \frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

Вариант № 4

1. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости *xOy* и проходящей через точку *A (1; 2; -4)*.

2. Преобразовать к каноническому виду общие уравнения прямой $\begin{cases} 2x+3y+2z+8=0 \\ x-y-z-9=0 \end{cases}$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой $x-2y+z-3=0,\quad x+y-z+2=0$.

Вариант № 5

1. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси *Ox* и проходящей через точку *A (3; 7; -1)*.

2. Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую $\begin{cases} 2x-4y+5z+7=0 \\ x+2y+3z+11=0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

3. Убедившись, что прямые $2x+2y-z-10=0$, $x-y-z-22=0$, $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние *d* между ними.

Вариант № 6

1. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости *xOz* и проходящей через точку *A(2; -3; 4)*.

3. Найти точку Q, симметричную точке *P(4; 1; 6)* относительно прямой $x-y-4z+12=0$, $2x+y-2z+3=0$.

Вариант № 7

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *Ox* и точку *A (2; 1; 3)*.

2. Определить следы прямой $\begin{cases} 5x+3y-4z+8=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$

на координатных плоскостях (следом прямой на плоскости называется точка пересечения прямой с плоскостью).

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$, $\quad 2x+3y+z-1=0$.

Вариант № 8

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось *Oz* и точку *A (-2; 4; -4)*.

2. Найти координаты следов прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{4}$ на координатных плоскостях (следом прямой на плоскости называется точка пересечения прямой с плоскостью).

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+1}{-5}$, $\quad x-2y+z-15=0$.

Вариант № 9

1.. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *A(2; -5; 4)* и через ось *Oy*.

2. Найти острый угол между прямыми $\begin{cases} 2x+3y-4z+5=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{cases}$

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:
$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$.

Вариант № 10

1. Какие отрезки на координатных осях отсекает плоскость *2x + 3y - 5z + 30 = 0* ?

2. Через точку *A(1; -1; 2)* провести прямую, параллельную прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

3. Доказать, что прямая *x=3t-2, y=–4t+1, z=4t–5* параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.

.

Вариант № 11

1. Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $x-10y+2z-12=0$ на координатных осях.

2. Через точку *(2; -1; 3)* провести прямую, параллельную оси *Ox*.

3. При каком значении *C* прямая $3x-2y+z+3=0$, $4x-3y+z+1=0$, параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$?

Вариант № 12

1. Найти расстояние между параллельными плоскостями
$5x+3y-4z+15=0$; $15x+9y-12z-5=0$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точки *A(1; 2; -1) и B(0; 3; -4).*

3. Найти точку *Q,* симметричную точке *P(2; -5; 7)* относительно прямой, проходящей через точки M_1*(5; 4; 6)* и M_2*(-2; -17; -8).*

Вариант № 13

1.Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x-3y+6z-14=0$;
$2x-3y+6z+28=0$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точки *A (3; 0; 4)* и *B (-1; -2; 3).*

3. Вычислить расстояние *d* точки *P(1; -1; -2)* от прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

Вариант № 14

1. Через точку *M(2; 3; -1)* провести плоскость, параллельную плоскости

$2x-3y+5z-4=0$.

2. Найти острый угол между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ и плоскостью $2x+y-z+4=0$.

3. Вычислить расстояние d от точки *P(2; 3; -1)* до прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$.

Вариант № 15

1. Через точку M *(-4; -1; 2)* провести плоскость, параллельную плоскости $3x+4y-z-8=0$.

2. Найти острый угол между прямой $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y+4z+5=0 \end{cases}$ и плоскостью $x+y+3z-1=0$.

3. Вычислить расстояние d от точки *P(2; 3; -1)* до прямой $x=t+1$, $y=t+2$, $z=4t+13$.

Вариант № 16

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *(2; 5; -1)* и параллельной плоскости $x+3y-4z+5=0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *P(1; 2; -1)* перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

3. Вычислить расстояние d от точки *P(2; 3; -1)* до прямых $2x-2y+z+3=0$, $3x-2y+2z+17=0$.

Вариант № 17

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *(1; -3; 2)* и параллельно плоскости
$7x-4y+z-4=0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *P (2, —4, —2)* перпендикулярно прямой
$\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+y+3=0 \end{cases}$.

3. Вычислить проекцию точки *P(5; 2; -1)* на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

Вариант № 18

1. Через точки *M(1; 2; 3)* и *N (-2; -1; 3)* провести плоскость, перпендикулярную плоскости

x + 4y - 22 + 5 = 0.

2. Через точку *(2, 1, 6)* провести прямую, перпендикулярную плоскости $x-4y+5z-1=0$, и определить направляющие косинусы этой прямой.

3. При каких значениях *A* и *B* плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой $x=3+2t$, $y=5-3t$, $z=-2-2t$?

Вариант № 19

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *M(-1; 2; -3)* и *N(1; 4; -5)* и перпендикулярной плоскости $3x+5y-6z+1=0$.

2. Найти уравнение перпендикуляра к плоскости $3x-y-5z-8=0$, проходящего через точку *(1, -1, 2)*.

3. Найти точку *Q*, симметричную точке *P(1; 3; -4)* относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

Вариант № 20

1. Выяснить геометрический смысл коэффициентов *A, B* и *C* в общем уравнении плоскости
Ax + By + Cz + D = 0.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$ с плоскостью *x+y — 2z — 4 = 0.*

3. найти проекцию точки *P(2; -1; 3)* на прямую $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.

Вариант № 21

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки: $M_1(1;2;-1)$, $M_2(-1;0;4)$, $M_3(-2;-1;1)$.

2. Найти уравнения перпендикуляра к плоскости
x + 3y — 4z— 13 = 0,
проходящего через точку *(2; -1; 3)*, и определить координаты основания этого перпендикуляра.

3. При каких значениях *A* и *D* прямая $x=3+4t$, $y=1-4t$, $z=-3+t$ лежит в плоскости $Ax+2y-4z+D=0$?

Вариант № 22

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-2;-1)$, $M_3(1;1;-1)$.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-1}$ и плоскости *3x — 4y — z +*

5 = 0.

3. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

Вариант № 23

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1\left(1;-2;-\frac{1}{2}\right)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(0;-1;-1)$.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$ и плоскости $x + y — z + 5 = 0$.

3. Найти точку Q, симметричную точке $P(-3; 2; 5)$ относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \\ x-2y-4z+3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x+y+3z+7=0 \\ 5x-3y+2z+5=0 \end{cases}$.

Вариант № 24

1. Найти расстояние от точки $A(2, 3, -1)$ до плоскости $7x- 6y - 6z +42 = 0$.

2. Проверить, что прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{1}$ лежит в плоскости $x + y — z — 6 = 0$.

3. Найти точку Q, симметричную точке $P(3;-4;-6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$ и $M_3(10;-7;1)$.

Вариант № 25

1. На плоскость $5x-y+3z+12=0$ из начала координат опущен перпендикуляр. Найти его длину и углы, образованные им с координатными осями, а также координаты основания этого перпендикуляра.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{9}$ и плоскости $2x — 3y + z — 3 = 0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=2t+1$, $y=-3t+2$, $z=2t-3$ и точку $M_1(2;-2;1)$.

Вариант № 26

1. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $10x-15y-6z-380=0$, и углы, образуемые этим перпендикуляром с координатными осями.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ и точку *M(1; -1; 2)*.

3. Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(x - 3y + 72z + 36) + \beta(2x + y - z - 15) = 0$ и отстоит от начала координат на расстояние *d=3*.

Вариант № 27

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку *M(2; 3; -1)* параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 10 = 0$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *M(2; - 1; 0)* и прямую $\begin{cases} x - y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

3. Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(10x - 8y - 15z + 36) + \beta(4x + y + 3z - 1) = 0$ и отстоит от точки $C(3;-2;-3)$ на расстояние *d=7*

Вариант № 28

1.Из точки *P(2; 3; -5)* на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *(1; 1; -2)* и прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{5}$.

3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

Вариант № 29

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *A(5; 4; 3)* и отсекающей равные отрезки на осях координат.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 1y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ параллельно прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -3; -4)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковые величины (считая каждый отрезок направленными из начала координат).

Вариант № 30

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения

плоскостей $x+y+5z-1=0$, $2x+3y-z+2=0$ и через точку *M(3; 2; 1)*.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x - y + 2z - 2 = 0$.

3. Найти проекцию точки *C(3; -4; -2)* на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$.

Вариант № 31

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки *P(4; -2; 1)* и *Q(2; 4; 3)*.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x+2y+3z-5=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$

параллельно прямой $\begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases}$.

Вариант № 32

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x-y-12z-3=0$ и $3x+y-7z-2=0$ и перпендикулярной плоскости $x+2y+5z-1=0$

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x-2y+3z-1=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$$

перпендикулярно плоскости $2x+2y-z+5=0$.

Вариант № 33

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A(2; -1; 4)* и *B(3; 2; -1)* перпендикулярно плоскости $x+y+2z-3=0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые: •

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}, \qquad \frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

Вариант № 34

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *M(3; -1; -5)* и перпендикулярной плоскостям $3x-2y+2z+7=0$ и $5x-4y+3z+1=0$.

2. Дана плоскость $x+y-2z-6=0$ и вне её точка *M(1; 1; 1)*. Найти точку *N* симметричную точке *M* относительно данной плоскости.

Вариант № 35

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+3y+5z-4=0$ и $x-y-2z+7=0$ и параллельно оси *Oy*.

2. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ на плоскость $x+y+2z-5=0$.

Индивидуальное задание № 3 (кривые 2-го порядка)

Вариант № 1

1. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$.

2. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями. Изобразить эти линии на чертеже

a) $y=+\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; b) $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$;

c) $y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$; d) $y=+\frac{1}{7}\sqrt{49-x^2}$ /

3. Из точки $C(1;-10)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

4. Составить уравнения касательных к параболе $y^2=36x$, проведенных из точки *A(2; 9)*.

Вариант № 2

1. Найти множество середины хорд окружности $x^2+y^2=4(y+1)$, проведенных через начало координат.

2. Вычислить расстояние от фокуса $F(c;0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ до односторонней с этим фокусом директрисы.

3. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2-y^2=16$, проведенных из точки A(-1; -7).

4. К параболе $y^2=2px$ проведена касательная. Доказать, что вершина этой параболы лежит посередине между точкой пересечения касательной с осью *OX* и проекцией точки касания на ось *OX*.

Вариант № 3

1.Составить уравнение касательных к окружности $(x-3)^2+(y+2)^2=25$, проведенных в точках пересечения окружности с прямой $x-y+2=0$.

2. Через фокус эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$ проведен перпендикуляр к его большой оси. Определить расстояния от точек пересечения этого перпендикуляра с эллипсом до фокусов.

3. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, параллельных прямой $10x-3y+9=0$.

4. Из точки *A(5; 9)* проведены касательные к параболе $y^2=5x$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

Вариант № 4

1.Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;2)$; $B(0;-1)$; $C(-3;0)$.

2. Эксцентриситет эллипса $e=\frac{2}{3}$, фокальный радиус точки M эллипса равен 10. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

3. На гиперболе $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ найти точку, ближайшую к прямой $3x+2y+1=0$.

4. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины *A* и величину параметра p:

a) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$;

b) $y=4x^2-8x+7$;

c) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$

Вариант № 5

1.Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5;0)$; $B(1;4)$, если её центр лежит на прямой $x+y-3=0$.

2. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2+5y^2=20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние

между фокусами 2c=6 и эксцентриситет $e=\frac{3}{2}$.

4. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус *F(4; 3)* и директриса $x-5=0$.

Вариант № 6

1.Найти угол между радиусами окружности $x^2+y^2+4x-6y=0$, проведенными в точки её пересечения с осью OY.

2. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между директрисами равно $\frac{228}{13}$ и расстояние между фокусами 2c=26.

4. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+b$ касается параболы $y^2=2px$.

Вариант № 7

1.Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2=2x+4y-4$ относительно прямой $x-y-3=0$.

2. Дан эллипс $9x^2+5y^2=45$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $e=\frac{3}{2}$.

4. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2=8x$ и параллельна прямой $2x+2y-3=0$.

Вариант № 8

1. Составить уравнение окружности, если её центр лежит на прямой $3x-y-2=0$ и окружность проходит через точки $A(3;1)$ и $B(-1;3)$.

2. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $9x^2+5y^2=1$, две другие лежат с концами его малой оси.

3. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ и прямой $9x+2y-24=0$.

4. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2=16x$ и перпендикулярна к прямой $2x+4y+7=0$.

Вариант № 9

1. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы уравнениями $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

2. Определить эксцентриситет эллипса, если его малая ось видна из фокусов под углом 60^0.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

4. Вычислить длину стороны правильного треугольника *ABC,* вписанного в параболу с параметром *p,* в предположении, что *A* совпадает с вершиной параболы.

Вариант № 10

1. Составить уравнение хорды окружности $x^2+y^2=49$, делящейся в точке $A(1;2)$ пополам.

2. Определить эксцентриситет эллипса, если :
отрезок между фокусами виден и вершин малой оси под прямым углом;
расстояние между директрисами в три раза больше расстояния между фокусами.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если дана точка $M_1\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ гиперболы и уравнение директрис $x=\pm\frac{4}{3}$.

4. Поздравляем! Вам выпал счастливый билет ! Задания не будет!

Вариант № 11

1. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ перпендикулярного к прямой $5x+2y-13=0$.

2. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$, параллельных прямой $3x+2y+7=0$.

3. Установить, какая линия определяется уравнением $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$.

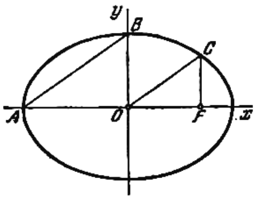
Изобразить её на чертеже.

4. Написать уравнение параболы, если известно, что она проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси *OX*.

Вариант № 12

1. Определить, при каких значениях углового коэффициента к прямой $y=kx$ пересекает окружность $x^2+y^2-10x+16=0$, касается её, проходит вне её.

2. Через фокус F эллипса проведен перпендикуляр к его большой оси (см. рис.). Определить, при каком значении эксцентриситета эллипса отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{OC}$ будут параллельны.



3. Установить, какая линия определяется уравнением $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$.

Изобразить её на чертеже.

4. Даны вершина параболы *A(6; -3)* и уравнение ее директрисы $3x-5y+1=0$. Найти фокус *F* этой параболы.

Вариант № 13

1. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, изобразить на рисунке:

a) $y=+\sqrt{9-x^2}$ b) $y=-\sqrt{25-x^2}$

c) $y=-\sqrt{4-y^2}$ d) $x=+\sqrt{16-y^2}$

2. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$, перпендикулярных к прямой $3x+2y+7=0$.

3. Дано уравнение равносторонней гиперболы $x^2-y^2=a^2$. Найти ее уравнение в новой системе, приняв за оси координат ее асимптоты.

4. Определить площадь треугольника, у которого одна вершина принадлежит директрисе параболы $y^2=4x$, а две другие служат концами хорды, проходящей через фокус, перпендикулярно оси *OX*.

Вариант № 14

1. Определить уравнение линии центров окружностей, заданных уравнениями:

a) $(x-3)^2 + y^2 = 9$ и $(x+2)^2 + (y-1) = 1$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ и $x^2 + y^2 - 6x = 0$

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если его малая ось равна 16, а эксцентриситет $e = \frac{3}{5}$.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

4. На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

Вариант № 15

1.Написать уравнение окружности радиуса $R = \sqrt{5}$, касающихся прямой $x - 2y - 1 = 0$ в точке $M(3;1)$.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а расстояние между директрисами равно $\frac{50}{3}$.

3. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $e = 2$.

4. На параболе $y^2 = 12x$ найти точку, фокальный радиус которой равен *9*.

Вариант № 16

1. Какие из уравнений определяют окружность:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$,

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 14 = 0$,

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$.

2. Эксцентриситет эллипса $e = \frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, одна из директрис задана уравнением $x = 16$. Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной -4, до фокуса, одностороннего с данной директрисой.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которого расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что

расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксценриситет $e=\frac{7}{5}$.

4. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен *24 м* и высоты *6 м*.

Вариант № 17

1. Составить уравнение окружности, если её центр совпадает с точкой $C(1,-1)$, и прямая $5x-12y+9=0$ является касательной к окружности.

2. Эксцентриситет эллипса $e=\frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, один из фокусов (-2; 0). Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной 2, до директрисы, односторонней с данным фокусом.

3. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до двух её асимптот есть величина постоянная, равная $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

4. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус *F(4; 3)* и директриса $y+1=0$.

Вариант № 18

1.Составить уравнение окружности, если её центр совпадает с началом координат, и прямая $3x-4y+20=0$ является касательной к окружности.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между его директрисами равно 5, и расстояние между фокусами равно 4.

3. Доказать, что расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до её асимптоты равно b.

4. Под каким углом к горизонту брошен камень, который, двигаясь по параболе, ушел на расстояние *24 м* от начального положения. Определить параметр траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, *6 м*.

Вариант № 19

1. Составить уравнение окружности, которая имеет центр на прямой $2x+y=0$, касается прямых $4x-3y+10=0$ и $4x-3y-30=0$.

2. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+m$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3. Доказать, что уравнении $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ определяет

гиперболу, найти координаты её центра С, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис.

4. Вывести условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается параболы $y^2 = 2px$.

Вариант № 20

1. Составить уравнение окружности, касающейся параллельных прямых $2x + y - 5 = 0$ и $2x + y + 15 = 0$, причем одной их них в точке $A(2,1)$.

2. Из точки $A\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Составить их уравнения.

3. Определить, при каких значениях m прямая $y = \frac{5}{2}x + m$ пересекает гиперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, касается её, проходит вне гиперболы.

4. Стальной трос подвешен за два конца; точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно *20 см*. Величина его прогиба на расстоянии *2 м* от точки крепления, считая по горизонтали, равна *14,4 см*. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму дуги параболы.

Вариант № 21

1.Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;1)$, $B(1;-1)$ $C(2;0)$

2. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, расстояние которых до правого фокуса равно 14.

3. Провести касательные к гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$ параллельно прямой $2x + 4y - 5 = 0$ и вычислить расстояние d между ними.

4. Из точки P(-3; 12) проведены касательные к параболе $y^2 = 10x$. Вычислить расстояние d от точки P до хорды параболы, соединяющей точки касания.

Вариант № 22

1. Определить длину хорды окружности $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$, делящейся в точке A(1; 2) пополам.

2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат

симметрично начала координат, зная что его малая ось равна 16, а эксцентриситет $e = \frac{3}{5}$.

3. Найти точку пересечения прямой $2x - y - 10 = 0$ и гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

4. Провести касательную к параболе $y^2 = 12x$ параллельно прямой $3x - 2y + 30 = 0$ и вычислить расстояние d между этой касательной и данной прямой.

Вариант № 23

1. Составить уравнение касательной к окружности $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ в точке A(-5; 7).

2. Найти точки пересечения прямой $3x + 10y - 25 = 0$ и эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

3. Из точки $P(1;-5)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$. Вычислить расстояние d от точки P до хорды гиперболы, соединяющей точки касания.

4. На параболе $y^2 = 64x$ найти точку M_1, ближайшую к прямой $4x + 3y - 14 = 0$, и вычислить расстояние d от точки M_1 до этой прямой.

Вариант № 24

1. Составить уравнение диаметра окружности $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$, проходящего через середину хорды, отсекаемой на прямой $x - 2y - 3 = 0$.

2. Найти точки пересечения прямой $x + 2y - 7 = 0$ и эллипса $x^2 + 4y^2 = 25$.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

4. Доказать, что две параболы, имеющую общую ось и общий фокус, расположенный между ее вершинами, пересекаются под прямым углом.

Вариант № 25

1. Составить уравнение окружности, которая, имея центр на прямой $2x + y = 0$, касается прямых $4x - 3y + 10 = 0$, $4x - 3y - 30 = 0$.

2. Через фокус эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{15} = 1$ проведен перпендикуляр к его большой оси. Определить расстояния от точек пересечения этого перпендикуляра с эллипсом

до фокусов.

3. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, параллельных прямой $10x-3y+9=0$.

4. На параболе $y^2=12x$ найти точку, фокальный радиус которой равен *9*.

Вариант № 26

1. Определить, как расположена прямая относительно окружности (пересекает ли, касается или проходит вне ее), если прямая и окружность заданы следующими уравнениями:

$y=x+10$, $x^2+y^2-1=0$,

$y=2x-3$, $x^2+y^2-3x+2y-3=0$,

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $x^2+y^2-8y+2y+12=0$.

2. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$, параллельных прямой $3x+2y+7=0$.

3. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2-y^2=16$, проведенных из точки A(-1; -7).

4. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины *A* и величину параметра p:

a) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$; b) $y=4x^2-8x+7$; c) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$

Вариант № 27

1. Составить уравнения касательных к окружности $(x-3)^2+(y+2)^2=25$, проведенных в точках пересечения окружности с прямой $x-y+2=0$.

2. Из точки $A\left(\frac{10}{3};\frac{5}{3}\right)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. Составить их уравнения.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

4. На параболе $y^2=64x$ найти точку *M₁*, ближайшую к прямой $4x+3y-14=0$, и вычислить расстояние *d* от точки M_1 до этой прямой.

Вариант № 28

1. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;2)$, $B(0;-1)$ $C(-3;0)$.

2. Вычислить расстояние от фокуса $F(c;0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ до односторонней с этим фокусом директрисы.

3. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, параллельных прямой $10x-3y+9=0$.

4. Провести касательную к параболе $y^2=12x$ параллельно прямой $3x-2y+30=0$ и вычислить расстояние d между этой касательной и данной прямой.

Вариант № 29

1. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а расстояние между директрисами равно $\frac{50}{3}$.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которого расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксценриситет $e=\frac{7}{5}$.

4. На параболе $y^2=16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен *13*.

Приложение 2

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Геометрия и топология»
Направление подготовки – 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»
профиль «Технология программирования»
Форма подготовки (очная)

Владивосток
2015

Паспорт фонда оценочных средств
по дисциплине «Геометрия и топология»

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
Способность применять в профессиональной деятельности знания математических основ информатики (ОПК-2)	Знает	основные понятия и инструменты геометрии и топологии, роль и место их в математической науке, в приложения к естественным наукам.
	Умеет	применять полученные знания для решения математических задач, использовать геометрический язык и символику при построении моделей; применять методы геометрии и топологии.
	Владеет	Геометрическими и топологическими методами решения научных, в том числе прикладных задач.

№ п/п	Контролируемые разделы / темы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций		Оценочные средства	
				текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Евклидовы пространства и их подпространства. Метод координат	ОПК2	Знает	ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы № 1-65 по теме Евклидовы пространства и их подпространства. Метод координат
			Умеет Владеет	ПР12 домашние задания	
2	Кривые и поверхности в евклидовом пространстве	ОПК2	Знает	ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы № 1-25 по теме Кривые и поверхности
			Умеет Владеет	ПР12 домашние задания	
3	Элементы топологии	ОПК2	Знает	ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы № 1-52 по теме Элементы топологии
			Умеет Владеет	ПР12 домашние задания	
4	Векторные поля, тензоры и дифференциальные формы	ОПК2	Знает	ПР2 контрольная работа	Экзамен, вопросы № 1-20 по теме Векторные поля, тензоры и дифференциальные формы
			Умеет Владеет	ПР12 домашние задания	

Шкала оценивания уровня сформированности компетенций

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции		критерии	показатели	баллы
Способность применять в профессиональной деятельности знания математических основ информатики (ОПК-2)	знает (пороговый уровень)	основные понятия и инструменты геометрии и топологии, роль и место их в математической науке, в приложения к естественным наукам. топологии	Знание определений, основных понятий геометрии и топологии; основных законов естественнонаучных (математических) дисциплин и их роли в профессиональной деятельности .	способность дать определения основных понятий геометрии и топологии, решать типовые задачи. -способность перечислить источники информации	61-75
	умеет (продвинутый)	применять полученные знания для решения математических задач, использовать геометрический язык и символику при построении моделей; применять методы геометрии и топологии.	Умение применять полученные знания для решения математических задач, использовать математический язык и символику при построении моделей;	- способность самостоятельно изучить доказательство геометрических и топологических теорем -способность применять изученные методы решения для нестандартного решения поставленных задач - способность обосновать выбранный метод решения	76-85
	владеет (высокий)	Геометрическими и топологическими методами решения научных, в том числе прикладных задач.	Владение геометрическими и топологическими методами решения типовых задач математики и её приложений	Способность уверенно владеть геометрическими и и топологическими математическими , методами решения типовых задач математики и её приложений дач -способность бегло и точно применять терминологический аппарат предметной области исследования в устных ответах на вопросы и в	86-100

				письменных работах	

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

Текущая аттестация студентов. Текущая аттестация студентов проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация проводится в форме собеседования (устного опроса) для проверки теоретических знаний, а также в форме защиты проекта, выполняемого в рамках самостоятельной работы параллельно с лабораторными работами и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

– степень усвоения теоретических знаний - оценивается в форме собеседования и контрольных работ;

– уровень овладения практическими умениями и навыками – оценивается в форме защиты индивидуального заданий (проектов), выполняемого в рамках лабораторных.

Критерии оценки знаний умений и навыков при текущей проверке

I. Оценка устных ответов:

Отметка "Отлично"

1. Дан полный и правильный ответ на основе изученных теорий.
2. Материал понят и изучен.
3. Материал изложен в определенной логической последовательности, литературным языком.

4. Ответ самостоятельный.

Отметка "Хорошо"

1, 2, 3, 4 – аналогично отметке "Отлично".

5. Допущены 2-3 несущественные ошибки, исправленные по требованию учителя, наблюдалась "шероховатость" в изложении материала.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Учебный материал, в основном, изложен полно, но при этом допущены 1-2 существенные ошибки (например, неумение применять законы и теории к объяснению новых фактов).
2. Ответ неполный, хотя и соответствует требуемой глубине, построен несвязно.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Незнание или непонимание большей или наиболее существенной части учебного материала.
2. Допущены существенные ошибки, которые не исправляются после уточняющих вопросов, материал изложен несвязно.

II. Оценка умения решать задачи:

Отметка "Отлично"

1. В решении и объяснении нет ошибок.
2. Ход решения рациональный.
3. Если необходимо, решение произведено несколькими способами.
4. Допущены ошибки по невнимательности (оговорки, описки).

Отметка "Хорошо"

1. Существенных ошибок нет.
2. Допущены 1-2 несущественные ошибки или неполное объяснение, или использование 1 способа при заданных нескольких.

Отметка "Удовлетворительно"

1. Допущено не более одной существенной ошибки, записи неполны, неточности.
2. Решение выполнено с ошибками в математических расчетах.

Отметка "Неудовлетворительно"

1. Решение осуществлено только с помощью учителя.
2. Допущены существенные ошибки.
3. Решение и объяснение построены не верно.

III. Оценка письменных работ:

Критерии те же. Из оценок за каждый вопрос выводится средняя итоговая оценка за письменную работу.

Оценочные средства для текущей аттестации

Оценочные средства для текущей аттестации подготовлены в виде индивидуальных домашних заданий и контрольных работ по каждой теме (образцы типовых ИДЗ представлены в приложении 1).

Промежуточная аттестация студентов. Промежуточная аттестация студентов проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

По дисциплине предусмотрен экзамен, который проводится в письменной форме.

Оценочные средства для промежуточной аттестации
Вопросы к экзамену

Тема Евклидовы пространства и их подпространства. Метод координат.

1. Свойства расстояния, взаимное расположение точек на прямой. Определение эвклидова пространства. Прямые, лучи, отрезки в евклидовом пространстве. Середина отрезка. Разбиение прямой на два луча.
   Произведение числа на вектор. Описание прямой, луча, отрезка с помощью данной операции.
2. Произведение числа на вектор и сумма векторов. Существование и единственность.
3. Проверка аксиом линейного пространства для множества векторов с фиксированным началом. Некоторые их следствия.
4. Связь понятия суммы с понятием равенства векторов. Нахождение середины отрезка с помощью векторных операций.
5. Угол между прямыми. Свойства ортогональных проекций точек на прямые в евклидовом пространстве.
6. Линейность проекции. Равенство векторов с равными проекциями.
7. Скалярное произведение. Связь с проекцией.
8. Углы между векторами. Основные свойства.
9. Скалярное произведение. Основные свойства.
10. Основные свойства равенства векторов.
11. Определения и свойства операций над свободными векторами. Равенства $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.
12. Выражение углов между векторами и прямыми и расстояний между точками через скалярные произведения.
13. Основные свойства параллельных переносов точек.
14. Основные свойства параллельных переносов векторов.
15. Параллельный перенос прямой. Свойства параллельных прямых.
16. Коллинеарность и пропорциональность векторов.
17. Векторное параметрическое уравнение прямой, луча, отрезка.

18. Линейные пространства. Пространство строк длины n.
19. Линейные комбинации, линейная зависимость и линейная независимость.
20. Подпространства линейного пространства. Подпространство, порождённое системой векторов.
21. Базис, ранг, размерность. Равенство ранга системы векторов и размерности порождённого ей подпространства.
22. Подпространства эвклидова пространства. Примеры. Их характеристика в терминах векторных подпространств.
23. Подпространства эвклидова пространства. Примеры. Задание эвклидова подпространства векторным подпространством.
24. Параллельный перенос эвклидова подпространства. Параллельность эвклидовых подпространств. Их свойства.
25. Параллельность векторов и евклидовых подпространств.
26. Необходимое и достаточное условие пересечения эвклидовых подпространств.
27. Определение и характеристика плоскости..
28. Существование и единственность плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум данным векторам. Векторное параметрическое уравнение плоскости.
29. Существование и единственность плоскости, проходящей: через три данные точки; через две пересекающиеся прямые; через две параллельные прямые.
30. Уравнение прямой в плоскости. Геометрический смысл линейного уравнения с 2 неизвестными и его коэффициентов. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
31. Разбиение плоскости на 2 полуплоскости.
32. Расстояние от точки до прямой в плоскости.
33. Определение и свойства ориентированного угла между векторами плоскости.
34. Ориентированный угол на плоскости. Выражение декартовых координат вектора через ориентированный угол.
35. Ориентированный угол на плоскости. Формула преобразования декартовых координат на плоскости.
36. Ориентированный угол на плоскости. Откладывание вектора под заданным ориентированным углом.
37. Ориентированный угол на плоскости. Сложение ориентированных углов.
38. Ориентированный угол на плоскости. Полярные координаты: определение, свойства, связь с декартовыми.
39. Уравнение плоскости в 3-мерном пространстве, параллельной двум данным векторам.
40. Геометрический смысл линейного уравнения с тремя неизвестными и его коэффициентов.
41. Уравнение, задающее множество всех векторов, параллельных данной плоскости.
42. Взаимное расположение двух плоскостей.

43. Взаимное расположение прямой и плоскости.
44. Взаимное расположение двух прямых в 3-мерном пространстве.
45. Существование и единственность ортогональной проекции точки на плоскость.
46. Ортогональная проекция точки на плоскость. Расстояние от точки до плоскости.
47. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
48. Матрицы перехода, их свойства.
49. Необходимое и достаточное условие невырожденности матрицы перехода.
50. Ортогональные матрицы и декартовы системы координат.
51. Формулы преобразования аффинных и декартовых координат векторов и точек.
52. Векторное произведение. Существование, единственность, вычисление в декартовых координатах.
53. Векторное произведение. Алгебраические свойства и геометрический смысл. Двойное векторное произведение. Тождество Якоби.
54. Смешанное произведение. Вычисление в декартовых координатах, алгебраические свойства и геометрический смысл.
55. Ортогональная проекция точки на эвклидово подпространство. Расстояние от точки до подпространства.
56. Формула для нахождения расстояния от точки до подпространства.
57. Общий перпендикуляр к двум евклидовым подпространствам. Расстояние между подпространствами.
58. Свойства ортогональной проекции векторов на эвклидово подпространство.
59. Расстояние от точки до прямой в эвклидовом пространстве. Формулы для расстояний от точки до прямой и между скрещивающимися прямыми в 3-мерном пространстве.
60. Каноническое и полярное уравнения и директориальное свойство эллипса.
61. Каноническое и полярное уравнения и директориальное свойство гиперболы.
62. Каноническое и полярное уравнения и директориальное свойство параболы.
63. Классификационная теорема для кривых второй степени.
64. Канонические уравнения поверхностей 2-й степени в 3-мерном пространстве. Их исследование и построение.
65. Классификация поверхностей второй степени в трехмерном пространстве.

Тема Кривые и поверхности

1. Кривые. Вектор скорости и касательная к кривой.
2. Длина кривой. Формула для длины гладкой кривой. Естественная параметризация регулярной кривой.

3. Кривизна и кручение. Векторы главной нормали и бинормали. Формулы Френе. Геометрический смысл тождественного равенства 0 кривизны кривой.
4. Понятие поверхности. Параметризация и локальная параметризация поверхности. График функции, как поверхность. Сфера.
5. Касательное пространство и касательная плоскость к поверхности.
6. Первая основная (метрическая) форма поверхности. Её коэффициенты. Деривационные формулы.
7. Изометрии. Критерий изометричности элементарных поверхностей.
8. Лемма о проекции вектора ускорения на нормаль к поверхности. 2-я основная форма поверхности. Независимость 2-й основной формы от выбора параметризации.
9. 2-я основная форма поверхности. Формула для нахождения нормальной кривизны кривой. Нормальная кривизна поверхности в данной точке в данном направлении.
10. Главные кривизны и главные направления. Формула Эйлера.
11. Главные кривизны и главные направления. Следствия формулы Эйлера.
12. Гауссова и средняя кривизна. Формула для нахождения гауссовой кривизны.
13. Поверхности вращения и их параметризации. Параметризации сферы и тора.
14. Первая и вторая основные формы сферы, плоскости и цилиндра. Пример изометричных поверхностей, одна из которых имеет нулевую вторую форму, а другая ненулевую.
15. Теорема Гаусса.
16. Изометрия. Неизометричность области на плоскости и области на сфере.
17. Нормальная кривизна поверхности в данной точке в данном направлении. Её вычисление через 2-ю основную форму.
18. Главные кривизны и главные направления. Теорема Эйлера.
19. Гауссова кривизна. Формула для нахождения Гауссовой кривизны.
20. Деривационные формулы.
21. Теорема Гаусса.
22. Изометрия. Неизометричность области на плоскости и области на сфере.
23. Ковариантная производная векторного поля и ковариантная производная поля вдоль кривой. Связь между ними.
24. Свойства ковариантной производной.
25. Определение геодезической и её уравнение.

Тема Элементы топологии

1. Основные теоретико-множественные операции и соотношения.
2. Определение топологического пространства. Примеры. Пересечение бесконечного числа открытых множеств.

3. Замкнутые множества топологического пространства. Объединение бесконечного числа замкнутых множеств.
4. Хаусдорфовы пространства. Топология на метрическом пространстве.
5. Относительно открытые и относительно замкнутые множества. Индуцированная топология на подмножестве топологического пространства.
6. Определение окрестности, внутренней точки, точки прикосновения, внутренности, замыкания. Примеры точек разных типов. Свойства окрестностей. Окрестности в индуцированной топологии.
7. Свойства внутренности, замыкания, границы.
8. Связь фундаментальных систем окрестностей и баз топологии.
9. Условия, при которых данная система подмножеств может служить базой некоторой топологии.
10. Необходимое и достаточное условие того, чтобы данная система открытых подмножеств была базой топологического пространства.
11. Характеризация точек прикосновения с помощью последовательностей в пространстве с первой аксиомой счетности.
12. Точки прикосновения, предельные, внутренние точки, окрестности в метрическом пространстве.
13. Определение предела и непрерывности. Связь этих понятий.
14. Критерии непрерывности в точке отображения топологических пространств.
15. Критерии непрерывности отображения топологических пространств.
16. Критерии непрерывности отображения в метрическое пространство и из метрического пространства.
17. Непрерывность композиции.
18. Непрерывность суммы, произведения на число, скалярного и векторного произведений при отображении из топологического пространства в евклидово.
19. Непрерывность отображения и его координатных функций. Непрерывность линейного отображения.
20. Определение и теорема о существовании произведения топологических пространств.
21. Пространство R^n , как произведение n экземпляров вещественной прямой.
22. Покрытия, вписанные системы векторов. Леммы о вписанности.
23. Компактные подмножества топологического пространства. Компактность замкнутого и замкнутость компактного подмножеств.
24. Компактность объединения и компактность непрерывного образа компактных множеств.
25. Замкнутость и ограниченность компактного подмножества метрического пространства.
26. Теорема о достижении наибольшего и наименьшего значений функции на компактном подмножестве топологического пространства.
27. Гомеоморфность, как отношение эквивалентности на классе всех топологических пространств.

28. Гомеоморфность непрерывного биективного отображения компакта. Пример биективного непрерывного отображения на компакт, не являющегося гомеоморфизмом.
29. Выпуклые множества. Описание выпуклой оболочки.
30. Критерии независимости точек в линейном пространстве.
31. Барицентрические координаты точки в плоскости, натянутой на несколько независимых точек.
32. Симплексы, грани симплекса. Характеристика точек симплекса и его граней через барицентрические координаты.
33. Теорема о гомеоморфности компактного множества шару, а его границы - сфере.
34. Теорема о гомеоморфности шару компактного выпуклого множества.
35. Описание внутренних точек симплекса. Гомеоморфность симплекса шару.
36. Симплициальные комплексы и полиэдры. Шар и сфера, как полиэдры. Другие примеры комплексов и полиэдров.
37. Подкомплексы. Лемма о разбиении комплекса в объединение непересекающихся подкомплексов.
38. Связные подмножества топологического пространства. критерии связности.
39. Связность объединения семейства связных множеств с непустым пересечением.

Связанность точек топологического пространства и связные компоненты.

41. Связанность непрерывного образа связного множества.
42. Описание связных подмножеств вещественной прямой.
43. Линейная связанность точек и компоненты линейной связности.
44. Связность линейно связного множества. Пример связного не линейно связного множества.
45. Связанность вершин симплициального комплекса и связность его тела.
46. Ориентированные цепи симплициального комплекса. Граничный оператор. Лемма о граничном операторе цепи вида $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\sigma(a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_n)$.
47. Циклы и границы. Основное свойство граничного оператора. Определение групп гомологий.
48. Вычисление (n-1)-мерных групп гомологий симплекса и его границы.
49. Гомологический критерий связанности вершин симплициального комплекса.
50. Гомологический критерий связности полиэдра.
51. Основные свойства групп гомологий.
52. Теорема о неподвижной точке.

Тема Векторные поля, тензоры и дифференциальные формы

1. Карты и функции перехода.
2. Карты и атласы. Полные атласы.

3. Дифференцируемые многообразия. Примеры: локально эвклидовы пространства, проективные пространства.
4. Тензоры на многообразии. Алгебраические операции над тензорами.
5. Дифференциальные формы. Внешнее произведение дифференциальных форм.
6. Внешнее дифференцирование. Замкнутые и точные формы. Когомологии Дерама.
7. Внешнее дифференцирование. Замкнутые и точные формы. Пример замкнутой, но не точной формы.
8. Алгебраические свойства внешнего дифференцирования.
9. Теорема двойственности и теорема об ортогональном дополнении.
10. Псевдоортонормированные базисы псевдоевклидовых пространств. Пространства типа (k,l).
11. Гиперболические и определённые плоскости.
12. Обратные неравенства типа Коши-Буняковского в пространстве Минковского.
13. Линейные изометрии пространств с билинейной формой. Свойства матриц линейной изометрии.
14. Преобразование Пуанкаре, как суперпозиция сдвига и линейной изометрии.
15. Преобразования Лоренца. Бусты.
16. Разложение преобразования Лоренца в суперпозицию буста и ортогонального преобразования.
17. Функционал действия. Вывод уравнений Эйлера – Лагранжа.
18. Вывод многомерных уравнений Эйлера – Лагранжа.
19. Тензор электромагнитного поля, как как замкнутая 2-форма в пространстве Минковского. Первая пара уравнений Максвелла.
20. Вторая пара уравнений Максвелла в тензорном и векторном виде.