



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

«СОГЛАСОВАНО»

Руководитель образовательной программы

А.С. Величко

«09» июля 2015 г.

«УТВЕРЖДАЮ»

Врио заведующего кафедрой  
математических методов в экономике

А.С. Величко

«09» июля 2015 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
Статистические методы и модели прикладной математики  
**Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика**  
профиль «Математические методы в экономике»  
**Форма подготовки очная**

курс 2 семестр 3, 4

лекции 72 час.

практические занятия 72 час.

лабораторные работы 0 час.

в том числе с использованием МАО лек. 0 час. / пр. 0 час. / лаб. 0 час.

всего часов аудиторной нагрузки 144 час.

в том числе с использованием МАО 0 час.

самостоятельная работа 144 час.

в том числе на подготовку к экзамену 27 час.

контрольные работы (количество) 4

курсовая работа / курсовой проект не предусмотрены

зачет 3 семестр

экзамен 4 семестр

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 12.03.2015 № 208

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры математических методов в экономике, протокол № 17 от «09» июля 2015 г.

Врио заведующего кафедрой математических методов в экономике, к.ф.-м.н., доцент А.С. Величко

Составитель:

доцент кафедры математических методов в экономике к.ф.-м.н., доцент А.В. Мишаков

## АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Статистические методы и модели прикладной математики» предназначена для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», профиль «Математические методы в экономике».

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 8 зачетных единиц (288 часов). Дисциплина реализуется на 2 курсе в 3-м и 4-м семестрах. Дисциплина входит в обязательные дисциплины базовой части блока «Дисциплины (модули)».

Особенности построения курса: лекции (72 часа), практические занятия (72 часа), самостоятельная работа (117 часов), подготовка к экзамену (27 часов).

Так как в название дисциплины входят такие термины как математика, прикладная математика, методы и модели, то их необходимо пояснить для определения основной тематики предлагаемого курса.

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Прикладная математика – совокупность математических идей и методов, непосредственно используемых в других науках и технике.

Статистический (стохастический) – прилагательное от слова (существительного) статистичность (стохастичность).

Статистичность (стохастичность) – свойство математических объектов, выражающееся в том, что они зависят от случая.

Методы – множественное число от термина «Метод».

Метод – совокупность приёмов или операций для построения искомого результата.

Модели – множественное число от термина «Модели».

Модель – это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая способна замещать объект таким образом, что её изучение даёт на новую информацию об этом объекте. (При этом мы должны понимать, что реальные объекты слишком сложны, поэтому для их

изучения создают модели – копии изучаемых реальных объектов. С одной стороны, модели должны быть доступны для изучения, в силу чего они не должны быть слишком сложными – значит, они неминуемо будут лишь упрощенными копиями. Но, с другой стороны, выводы, полученные при их изучении, мы хотим распространить на реальные объекты – прототипы, следовательно, модель должна отражать существенные черты изучаемого реального объекта. В силу такой двойственности построение, составление моделей во многом является искусством. Чем удачнее будет подобрана, построена модель, чем лучше она будет отражать существенные черты реального объекта, тем успешнее будет её исследование и полезнее вытекающие из этого исследования, выводы и рекомендации).

Вопросы о роли в современном мире математики вообще и прикладной математики в частности, о необходимости формирования культуры математического мышления специалиста любой отрасли знаний связаны с методом математического моделирования как методом изучения объектов реальной действительности.

По форме представления модели можно разделить на физические, символические, смешанные. К символическим моделям относятся математические модели.

Математическая модель – это приближённое описание какого-либо класса явлений, объектов внешнего мира, выраженное с помощью математических понятий и математической символики. (Составление математических моделей и называется математическим моделированием. Именно через составление математических моделей применяется прикладная математика в научных исследованиях, в других науках. Это довольно ярко заметно и в экономической науке. Фактически математический аппарат и математические модели, в которых он применяется, излагаются в предлагаемом курсе, в сущности, параллельно.)

Прежде всего математические модели делятся на образные (чертежи, графики, схемы и т.д.) и знаково-символические (уравнения, формулы и т.д.).

Знаково-символические модели бывают следующих видов:

1) оптимизационные (в частности, экономико-математические) модели, в которых введён критерий оптимальности, определяющий смысловое содержание построенной целевой функции, связывающей факторы модели (например, задача о расходе сырья);

2) функциональные модели, в которой по значениям одной переменной можно определить значения другой. К ним относятся динамические модели, когда в качестве переменной участвует время, например:  $s = vt$  (зависимость пути  $s$  от времени  $t$  и скорости  $v$ ), и статические модели, например:  $S = xy$  (зависимость площади прямоугольника от его длины и ширины).

Кроме того, математические модели можно разделить на детерминистские и статистические (стохастические). Детерминистские модели выражаются формулой, уравнением, в которые входят достоверные величины, а в статистических (вероятностных или стохастических) моделях участвуют случайные величины.

С позиции непрерывности математические модели делятся также на непрерывные и дискретные модели, например, дискретные и непрерывные случайные величины.

Следует ещё раз подчеркнуть, что базисные математические понятия, являющиеся каркасом математической теории, представляют из себя модели реально существующих объектов. Это число, множество, функция, длина, площадь, объём, вектор, матрица, производная, дифференциал, первообразная, определённый интеграл, дифференциальное уравнение, событие, вероятности, случайная величина и др.

Если математическая модель построена, то её исследование ведётся средствами математики без привлечения содержательных соображений. Процесс математического моделирования (построения и исследования математической модели) разбивается на следующие этапы:

1) построение математической модели: отбрасывание второстепенных факторов, построение описательной модели объекта и переводение её на математический язык;

2) изучение построенной математической модели с помощью математических методов;

3) проверка адекватности построенной модели опытным данным;

4) в случае несоответствия опытным данным – уточнение математической модели или её замена другой моделью.

Статистическая модель – математическая конструкция, формализующая исходные объекты статистической задачи: статистические данные, имеющие случайный характер, связанные с ними события и возможные распределения вероятностей.

Статистический метод (исследования) – метод (исследования), опирающийся на рассмотрение статистических данных о тех или иных совокупностях объектов.

Метод – совокупность приёмов или операций для построения искомого результата.

В предлагаемом курсе речь идёт о методах и моделях прикладной математики в статистической версии, т.е. о статистических методах и моделях прикладной математики, используемых в теории вероятностей и математической статистике, т.е. в математической науке, изучающей с одной стороны абстрактные математические модели случайных явлений, а с другой стороны – методы получения научно обоснованных выводов о массовых случайных явлениях и процессах по данным наблюдений или экспериментов (или иными словами изучающей методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений или экспериментов с целью выявления статистических закономерностей).

Таким образом, данный курс (СМиМППМ) эквивалентен курсу теории вероятностей и математической статистики (ТВиМС).

Содержание дисциплины СМиМПИМ (ТВиМС) охватывает следующий круг вопросов: основные разделы теории вероятностей и математической статистики. При этом элементы регрессионного анализа и метод наименьших квадратов не вошел в данный курс ТВиМС в силу того, что эти вопросы студенты будут изучать в курсе «Эконометрика». Основная тематика курса определяется потребностями прикладных и специальных курсов, таких как «системный анализ и моделирование в экономике», «моделирование транспортных потоков и систем», «модели городской экономики», «эконометрика», «статистика», «методы социально-экономического прогнозирования и др. В совокупности с указанными дисциплинами ТВиМС способствует качественному улучшению профессиональной подготовки студентов, а также способствует формированию системного целостного взгляда на единство всех разделов математики, являющейся своеобразным метаязыком, на котором написана универсальная «книга» природы и общества.

**Цель** – формирование у студентов базовых понятий и методов теории вероятностей и математической статистики, подготовить их к изучению смежных прикладных и специальных курсов, использующих различные методы и модели теории вероятностей и математической статистики.

**Задачи:**

- знать основные понятия и методы ТВиМС, уметь применять их для решения задач экономики;
- уметь описывать экономические и финансовые модели с помощью ТВиМС, решать задачи экономики основными методами ТВиМС;
- развить способность ориентироваться в постановке задач и определять, каким образом следует искать средства их решения с точки зрения ТВиМС;
- проводить с помощью основных методов и моделей ТВиМС разработку и исследование математических моделей

экономических объектов, систем и процессов, предназначенных для проведения расчётов, анализа и подготовки экономических решений;

- владеть навыками решения практических задач.

Для успешного изучения дисциплины «Статистические методы и модели прикладной математики» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

- готовность к самостоятельной работе;
- способность свободно производить аналитические действия со случайными величинами и их характеристиками, уметь оперировать с наиболее употребимыми в практике статистических исследований законами распределений.

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие профессиональные компетенции (элементы компетенций).

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ПК-9 - способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат	Знает	основы теории вероятностей, необходимые для решения математических и финансово-экономических задач
	Умеет	рассчитывать численные характеристики основных статистических распределений, в том числе рассчитывать численно значения статистических оценок при заданных выборочных значениях и доказывать основные теоремы элементарной теории вероятностей, решать стандартные теоретико-вероятностные задачи
	Владеет	навыками применения современного математического инструментария для решения задач экономики; методикой построения, анализа и применения математических моделей в экономике
ПК-12 - способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук	Знает	прикладные аспекты предельных теорем теории вероятностей, в том числе применительно к теории статистического оценивания и проверки статистических гипотез
	Умеет	применять теоретико-вероятностные методы для решения задач экономики и финансов

	Владеет	построением математических моделей случайных явлений, изучаемых естественными науками
--	---------	---

## **I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

### **МОДУЛЬ 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (36 часов)**

#### **Введение (0,5 часа)**

Предмет теории вероятностей. Исторический экскурс.

#### **Раздел I. Случайные события (18 часов)**

#### **Тема 1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей (12 часов)**

Опыт со случайным исходом. Статистическая устойчивость. Понятие случайного события. Классификация событий. Классическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания (свойства биномиальных коэффициентов), формула Стирлинга, перестановки с повторениями, размещения с повторениями, сочетания с повторениями. Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме. Статистическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности. Понятие вероятности как обобщение предыдущих определений вероятности. Алгебра событий. Диаграммы Эйлера-Венна. Основная терминология в алгебре событий. Принцип двойственности для событий (формулы де Моргана). Понятие условной вероятности. Зависимые и независимые события. Теорема сложения вероятностей (для двух совместных и двух несовместных событий). Теорема умножения вероятностей (для двух зависимых и двух независимых событий). Обобщение формулы сложения вероятностей (на случай  $n$  событий). Обобщение формулы умножения вероятностей (на случай  $n$  событий). Независимые в совокупности события. Парно независимые события. Пример Бернштейна. Надежность систем из параллельно и последовательно соединённых элементов. Определение вероятностей



разрыва цепочки из  $n$  параллельно и  $n$  последовательно соединённых элементов, если вероятность разрыва в каждом элементе одинакова и равна  $p$ . Формула полной вероятности. Формула Бойеса. Пространство элементарных событий. Примеры. Событие как подмножество пространства элементарных событий. Аксиомы теории вероятностей (с включением аксиомы о  $\mathcal{B}$  – алгебре событий). Понятие вероятностного пространства. Дискретное вероятностное пространство. Примеры  $\mathcal{B}$  – алгебр. Конституенты. Максимальное число всех событий  $\mathcal{B}$  – алгебры. Понятие условной вероятности в парадигме индуцирования условного вероятностного пространства.

### **Тема 2. Повторные независимые и зависимые испытания (6 часов)**

Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли). Распределение Бернулли (биномиальное распределение вероятностей). Наивероятнейшее число (мода) в распределении Бернулли. Полиномиальное распределение. Пример вычисления вероятности выпадения чисел 1, 2, ..., 6 при шести бросаниях игральной кости. Гипергеометрическое распределение (в случаях извлечения с возвращением и извлечения без возвращения). Пример игры «Спортлото»: 6 из 49». Асимптотика Пуассона: формула (распределение) Пуассона. Наивероятнейшее число (мода) в распределении Пуассона. Поток случайных событий на оси времени. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Плотность стандартного нормального (гауссовского) распределения и её свойства. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Функция Лапласа – функция стандартного нормального (гауссовского) распределения и её свойства. Функция Лапласа в различных видах.

### **Раздел II. Случайные величины (12,5 часов)**

#### **Тема 3. Случайные величины: понятие и свойства (4 часа)**

Понятие случайной величины. Определения и примеры. Закон распределения дискретной случайной величины. Функция распределения вероятностей. Основные свойства функции распределения вероятностей. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины

(обобщённый подход на основе функции Хевисайда – функции единичного скачка). Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей и её основные свойства. Плотность распределения вероятностей дискретной случайной величины (обобщённый подход на основе  $\delta$ -функции Дирака – производной от функции Хевисайда).

#### **Тема 4. Случайные величины: плотность и функция основных распределений (2 часа)**

Вырожденное (индикаторное) распределение. Равномерное (прямоугольное) распределение. Нормальное (гауссовское) распределение. Распределение Коши. Показательное (экспоненциальное) распределение. Биномиальное распределение (распределение Бернулли) на основе обобщённого подхода с функцией Хевисайда.

#### **Тема 5. Случайные величины: числовые характеристики (6 часов)**

Математические операции над случайными величинами. Математическое ожидание случайной величины (в непрерывном и дискретном случаях). Примеры вычисления математического ожидания случайной величины: нормальное (гауссовское) распределение, показательное (экспоненциальное) распределение, распределение Бернулли, распределение Коши. Свойства математического ожидания (с доказательствами). Дисперсия случайной величины (в непрерывном и дискретном случаях) и её свойства (с доказательствами). Примеры вычисления дисперсии случайной величины: нормальное (гауссовское) распределение, показательное (экспоненциальное) распределение, распределение Бернулли. Мода и медиана случайной величины (в непрерывном и дискретном случаях). Квантиль (симметричная квантиль) и критическая точка (симметричная критическая точка) порядка  $p$  случайной величины. Моменты (начальные и центральные) случайной величины (в непрерывном и дискретном случаях). Коэффициенты асимметрии (скóшенности) и эксцесса (крутости) случайной величины. Среднеквадратическая ошибка. Нормальный (гауссовский) закон

распределения: полное обсуждение (вместе с расчетами всех его числовых характеристик).

### **Тема 6. Случайные величины: характеристическая функция (0,5 часа – обзор вопросов для самостоятельной работы студентов)**

Характеристическая функция случайной величины. Основные свойства характеристической функции. Примеры вычисления характеристической функции (для линейной связи двух случайных величин и для гауссовской случайной величины). Моменты, кумулянты и характеристическая функция.

### **Раздел III. Случайные векторы (4,5 часов)**

#### **Тема 7. Случайные векторы: двумерный случай (4 часа)**

Понятие двумерной случайной величины и закон её распределения. Функция распределения вероятностей двух случайных величин. Совместная (двумерная) плотность распределения вероятности двух случайных величин. Условная функция распределения вероятностей. Условная плотность вероятности. Числовые характеристики двумерного случайного вектора. Верхняя и нижняя границы корреляции и ковариации. Ковариация и независимость двух случайных величин. Ковариация и геометрия линий равного уровня плотности вероятности. Коэффициент корреляции. Коэффициент корреляции и расстояние (метрика).

#### **Тема 8. Случайные векторы (многомерный случай и функции случайных величин) (0,5 часа – обзор вопросов для самостоятельной работы студентов)**

Понятие многомерной случайной величины и закон её распределения. Функция распределения вероятностей многомерного случайного вектора. Плотность вероятности многомерного случайного вектора. Многомерное нормальное распределение. Частный случай: двумерный нормальный закон распределения. Характеристическая функция многомерного случайного вектора. Функции случайных величин (многомерный случай). Частный случай: функция случайной величины, распределение вероятностей функции

одной случайной величины. Преобразование нескольких случайных величин (многомерный случай). Частный (двумерный) случай: композиция (свёртка) законов распределения. Хи-квадрат распределение вероятностей. Распределение Стьюдента. Распределение Фішера (Фішера-Снедекóра).

**Раздел IV. Закон больших чисел и предельные теоремы теории вероятностей (0,5 часа – обзор вопросов для самостоятельной работы студентов)**

**Тема 9. Предельные теоремы теории вероятностей (0,5 часа – обзор вопросов для самостоятельной работы студентов)**

Предварительные замечания: закон больших чисел. Неравенство Мэркова (лемма Чебышёва). Неравенство Чебышёва. Теоремы Чебышёва. Теоремы Бернулли и Пуассона. Центральная предельная теорема (ЦПТ) – теорема Ляпунова. Интегральная теорема Муавра-Лапласа как частный случай ЦПТ.

## **МОДУЛЬ 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (36 часов)**

### **Введение (0,5 часа)**

Предмет математической статистики. Исторический экскурс.

### **Раздел I. Математическая статистика (часть 1) (7 часов)**

**Тема 1. Методы статистического описания результатов наблюдений (выборочная теория) (7 часов)**

Генеральная и выборочная совокупности. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная (представительная) выборка. Собственно-случайная, механическая, типическая (стратифицированная) и серийная (гнездовая) выборки. Случайная выборка и её реализация. Выборочное пространство, статистическая модель (непрерывная и дискретная), параметрическая модель, статистика (выборочная характеристика), выборочное распределение, выборочное значение, сходимость по вероятности и слабая сходимость (сходимость по распределению). Выражения для средней, дисперсии и доли (в группированном и негруппированном видах) для выборочной совокупности. Вариационный ряд,

вариационный ряд случайной выборки. Статистический ряд (простой статистический ряд), интервальный статистический ряд. Формула Стерджеса, величина интервала, метод «конвертов» подсчёта интервальных частот. Эмпирическая и выборочная функции распределения. Эмпирическая плотность распределения. Графическое изображение статистического ряда (полигон, гистограмма, кумулята, эмпирическая функция распределения). Теорема Гливленко. Средняя степенная  $k$ -го порядка (средняя гармоническая, средняя геометрическая, средняя квадратическая, свойство мажорантности средних). Выборочные числовые моменты. Статистический ряд и его характеристики в негруппированном и группированном видах (размах, среднее арифметическое, дисперсия, среднее линейное отклонение, медиана, мода, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации). Среднее арифметическое и его свойства. Выборочная дисперсия и её свойства. Упрощённый способ расчёта среднего арифметического (средней арифметической) и дисперсии. Начальные и центральные моменты статистического ряда (в негруппированном и группированном видах) и их свойства. Соотношения между центральными и начальными моментами второго, третьего и четвёртого порядков. Асимметрия и эксцесс статистического ряда (в негруппированном и группированном видах). Упрощённый способ расчёта асимметрии и эксцесса.

## **Раздел II. Математическая статистика (часть 2). Теория оценивания (18 часов)**

### **Тема 2. Точечные оценки параметров (общие свойства оценок и методы оценивания) (12 часов)**

Постановка задачи оценивания. Понятие оценки параметров. Точечные оценки и их свойства (состоятельность, несмещённость и эффективность). Асимптотическая несмещённость. Асимптотическая эффективность. Теорема

о состоятельности оценки и её следствие. Теорема об оценке генеральной средней. Теорема об оценке генеральной дисперсии. Исправленная выборочная дисперсия как несмещённая и состоятельная оценка генеральной дисперсии. Теорема об оценке генеральной доли. Теорема об единственности эффективной оценки. Регулярные модели. Теорема о неравенстве Рао-Крамера. Количество информации по Фишеру (информация Фишера). Показатель эффективности по Рао-Крамеру. Понятие эффективности оценки по Рао-Крамеру. Критерий эффективности для регулярных моделей. Методы нахождения точечных оценок (метод аналогии (подстановки), метод моментов, метод квантилей, метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия). Состоятельность оценок метода моментов. Теорема об асимптотических свойствах оценок максимального правдоподобия.

### **Тема 3. Интервальные оценки параметров (6 часов)**

Распределения, связанные с нормальным: хи-квадрат, Стьюдента, Фишера (общие сведения). Свойства их квантилей. Теорема Фишера. Понятие интервального оценивания. Доверительный интервал. Доверительная вероятность. Предельная ошибка выборки (ошибка репрезентативности). Средняя квадратическая (стандартная) ошибка выборки. Построение доверительного интервала для генеральной средней и генеральной доли по большим выборкам (теорема и её следствия). Интервальные оценки математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной и неизвестной генеральной дисперсии. Интервальные оценки дисперсии нормально распределённой генеральной совокупности при известной и неизвестной генеральной средней. Формулы средних квадратических ошибок повторной и бесповторной выборок. Объёмы повторной и бесповторной выборок. Связь между объёмами повторной и бесповторной выборок и объёмом генеральной совокупности.

### **Раздел III. Математическая статистика (часть 3) (10 часов)**

#### **Тема 4. Проверка статистических гипотез (10 часов)**

Постановка задачи проверки статистической гипотезы. Проверка статистических гипотез (принцип практической уверенности, статистическая гипотеза и общая схема её проверки, нулевая и альтернативная гипотезы, статистический критерий, уровень значимости критерия (ошибка 1-го рода), ошибка 2-го рода, мощность критерия). Проверка статистических гипотез о параметрах нормально распределённой генеральной совокупности (проверка гипотезы о равенстве двух выборочных средних, проверка гипотезы о равенстве двух выборочных дисперсий, проверка гипотез о числовых значениях параметров). Критерий хи-квадрат Пирсона (проверка гипотез о виде распределения генеральной совокупности и о независимости двух случайных величин). Критерий Колмогорова (проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности). Критерий Колмогорова-Смирнова (проверка гипотезы об однородности выборок).

**Раздел IV. Математическая статистика (часть 4) (0,5 часа – обзор вопросов для самостоятельной работы)**

**Тема 5. Элементы дисперсионного анализа (0,25 часа – обзор вопросов для самостоятельной работы)**

Элементы однофакторного дисперсионного анализа (однофакторная дисперсионная модель, основные предпосылки дисперсионного анализа, схема дисперсионного анализа, метод линейных контрастов). Понятие о двухфакторном дисперсионном анализе (двухфакторная дисперсионная модель, схема двухфакторного дисперсионного анализа).

**Тема 6. Элементы корреляционного анализа (0,25 часа – обзор вопросов для самостоятельной работы)**

Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Корреляционная таблица, поле корреляции (диаграмма рассеивания). Выборочный (эмпирический) коэффициент корреляции и его основные свойства. Основные положения корреляционного анализа (двумерная модель). Проверка значимости и интервальная оценка параметров связи.

Корреляционное отношение и индекс корреляции. Понятие о многомерном корреляционном анализе. Множественный и частный коэффициенты корреляции. Коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Коэффициент конкордации (согласованности) рангов Кендалла. Основы статистического исследования зависимостей (общие сведения).

## **II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА**

### **Практические занятия (72 часа)**

#### **МОДУЛЬ 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (36 часов)**

##### **Занятие 1. Случайные события – часть 1 (2 часа)**

1. Понятие случайного события.

##### **Занятие 2. Случайные события – часть 2 (2 часа)**

1. Алгебраические операции над событиями.

##### **Занятие 3. Случайные события – часть 3 (2 часа)**

1. Аксиоматическое определение вероятности события.
2. Классическая вероятностная схема – схема урн.

##### **Занятие 4. Случайные события – часть 4 (2 часа)**

1. Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме:

- а) схема выбора, приводящая к сочетаниям;
- б) схема выбора, приводящая к размещениям.

##### **Занятие 5. Случайные события – часть 5 (2 часа)**

1. Геометрические вероятности.
2. Условные вероятности. Независимость событий.

##### **Занятие 6. Случайные события – часть 6 (2 часа)**

1. Вероятности сложных событий.



### **Занятие 7. Случайные события – часть 7 (2 часа)**

1. Формула полной вероятности.
2. Формула Байеса.

### **Занятие 8. Случайные величины – часть 1 (2 часа)**

1. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин (часть 1).

### **Занятие 9. Случайные величины – часть 2 (2 часа)**

1. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин (часть 2):
  - а) гипергеометрическое распределение;
  - б) равномерное (прямоугольное) распределение;
  - в) показательное (экспоненциальное) распределение;
  - г) распределение Коши;
  - д) распределение Рэля;
  - е) распределение Максвелла.

### **Занятие 10. Случайные величины – часть 3 (2 часа)**

1. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин (часть 3):
  - а) распределение арксинуса;
  - б) распределение Парето;
  - в) гамма-распределение;
  - г) распределение хи-квадрат;
  - д) распределение Вейбулла;
  - е) бета-распределение.

### **Занятие 11. Случайные величины – часть 4 (2 часа)**

1. Распределения, связанные с повторными независимыми испытаниями. Схема Бернулли: распределение Бернулли.
2. Полиномиальное распределение.

### **Занятие 12. Случайные величины – часть 5 (2 часа)**

1. Распределение Пуассона.

### **Занятие 13. Случайные величины – часть 6 (2 часа)**

1. Нормальный закон распределения.

### **Занятие 14. Случайные векторы – часть 1 (2 часа)**

1. Законы распределения и числовые характеристики случайных векторов (часть 1):

- а) двумерный случай;
- б) многомерный случай.

### **Занятие 15. Случайные векторы – часть 2 (2 часа)**

1. Законы распределения и числовые характеристики случайных векторов (часть 2):

- а) равномерное распределение.

### **Занятие 16. Случайные векторы – часть 3 (2 часа)**

1. Законы распределения и числовые характеристики случайных векторов (часть 3):

- а) Нормальный закон распределения на плоскости.

### **Занятие 17. Функции случайных величин – часть 1 (2 часа)**

1. Числовые характеристики функций случайных величин.

### **Занятие 18. Функции случайных величин – часть 2 (2 часа)**

1. Законы распределения функций случайной величины.
2. Задача композиции (свёртки) законов распределения.

## **МОДУЛЬ 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (36 часов)**

### **Занятие 1. Выборочная теория – часть 1 (2 часа)**

1. Выборка и способы её представления (часть 1):
  - а) генеральная совокупность и выборочная совокупность – выборка;
  - б) вариационный ряд выборки;
  - в) размах выборки;
  - г) частота и относительная частота элемента выборки;

д) статистический ряд.

## **Занятие 2. Выборочная теория – часть 2 (2 часа)**

1. Выборка и способы её представления (часть 2):

- а) формула Стёрджеса для подсчёта числа интервалов;
- б) величина интервала;
- в) метод «конвертов» подсчёта числа интервалов;
- г) группированный статистический ряд;
- д) накопленные частота и относительная частота.

## **Занятие 3. Выборочная теория – часть 3 (2 часа)**

1. Выборка и способы её представления (часть 3):

- а) эмпирическая и выборочная функции распределения;
- б) эмпирическая плотность распределения;
- в) графическое изображение статистического ряда (полигон, гистограмма, кумулята, эмпирическая функция распределения).

## **Занятие 4. Числовые характеристики выборочного (эмпирического) распределения – часть 1 (2 часа)**

1. Случай негруппированной и группированной выборок (часть 1):

- а) выборочное (эмпирическое) математическое ожидание – средняя арифметическая;
- б) выборочная (эмпирическая) дисперсия;
- в) выборочная (эмпирическая) мода;
- г) выборочная (эмпирическая) медиана.

## **Занятие 5. Числовые характеристики выборочного (эмпирического) распределения – часть 2 (2 часа)**

1. Случай негруппированной и группированной выборок (часть 2):

- а) выборочные (эмпирические) начальные и центральные моменты порядка  $k$ ;
- б) выборочный (эмпирический) коэффициент асимметрии;
- в) выборочный (эмпирический) коэффициент эксцесса;
- г) выборочная (эмпирическая) квантиль порядка  $p$ .

## **Занятие 6. Числовые характеристики выборочного (эмпирического) распределения – часть 3 (2 часа)**

1. Упрощенный способ вычислений всех выборочных (эмпирических) характеристик группированной выборки в случае преобразования центрирования на моду и нормирования на величину интервала.

## **Занятие 7. Теория оценивания – часть 1 (2 часа)**

1. Точечные оценки параметров (общие свойства оценок):

- а) Несмещённость и смещённость точечной оценки;
- б) метод подстановки или аналогии.

## **Занятие 8. Теория оценивания – часть 2 (2 часа)**

1. Состоятельность точечной оценки (часть 1):

а) состоятельность оценок средней и дисперсии (в трёх модификациях) для случая одной генеральной совокупности и одной выборки заданного объема.

## **Занятие 9. Теория оценивания – часть 3 (2 часа)**

1. Состоятельность точечной оценки (часть 2):

а) состоятельность оценок средней и дисперсии (в трёх модификациях) для случая одной генеральной совокупности и двух выборок заданных объемов.

## **Занятие 10. Теория оценивания – часть 4 (2 часа)**

1. Эффективность точечной оценки:

а) информация (количество информации) Фйшера в непрерывном и дискретном случаях;

б) теорема о неравенстве Рао-Крамера;

в) показатель эффективности по Рао-Крамеру.

## **Занятие 11. Теория оценивания – часть 5 (2 часа)**

1. Методы нахождения точечных оценок (часть 1):

а) метод максимального правдоподобия.

## **Занятие 12. Теория оценивания – часть 6 (2 часа)**

1. Методы нахождения точечных оценок (часть 2):

а) метод моментов;

б) метод квантилей.

**Занятие 13. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера.  
Теорема Фишера (2 часа)**

**Занятие 14. Теория оценивания – часть 7 (2 часа)**

1. Интервальные оценки параметров (часть 1):

а) доверительные интервалы и доверительная вероятность;

б) доверительные интервалы для параметров нормально распределённой генеральной совокупности (часть 1):

1) доверительный интервал для математического ожидания генеральной совокупности (генеральной средней) при известной генеральной дисперсии в случаях одной и двух выборок заданных объемов из генеральной совокупности;

2) доверительный интервал для генеральной средней при неизвестной генеральной дисперсии в случаях одной и двух выборок заданных объемов из генеральной совокупности.

**Занятие 15. Теория оценивания – часть 8 (2 часа)**

1. Интервальные оценки параметров (часть 2):

а) доверительные интервалы для параметров нормально распределённой генеральной совокупности (часть 2):

1) доверительный интервал для генеральной дисперсии при известной генеральной средней;

2) доверительный интервал для генеральной дисперсии при неизвестной генеральной средней;

3) доверительный интервал для отношения двух генеральных дисперсий в случае двух выборок заданных объемов из двух генеральных совокупностей.

**Занятие 16. Теория оценивания – часть 9 (2 часа)**

1. Интервальные оценки параметров (часть 3):

а) доверительные интервалы для параметров нормально распределённой генеральной совокупности (часть 3):

1) доверительный интервал для разности двух генеральных средних при известных дисперсиях двух генеральных совокупностей в случае двух выборок заданных объемов из этих совокупностей;

2) доверительный интервал для разности двух генеральных средних при неизвестных (но равных друг другу) дисперсиях двух генеральных совокупностей в случае двух выборок заданных объемов из этих совокупностей.

### **Занятие 17. Проверка статистических гипотез – часть 1 (2 часа)**

1. Постановка задачи проверки статистической гипотезы:

- а) принцип практической уверенности;
- б) статистическая гипотеза и общая схема её проверки;
- в) нулевая и альтернативная гипотезы;
- г) статистический критерий;
- д) уровень значимости критерия (ошибка 1-го рода);
- е) ошибка 2-го рода;
- ж) мощность критерия.

2. Проверка статистических гипотез о параметрах нормально распределенной генеральной совокупности.

### **Занятие 18. Проверка статистических гипотез – часть 2 (2 часа)**

1. Критерий хи-квадрат Пёрсона:

а) проверка гипотез о виде распределения генеральной совокупности;

б) проверка гипотез о независимости двух случайных величин.

## **III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной математики» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

#### **IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА**

Контролируемые разделы дисциплины, этапы формирования компетенций, виды оценочных средств, зачетно-экзаменационные материалы, комплекты оценочных средств для текущей аттестации, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

#### **V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

##### **Основная литература**

*(электронные и печатные издания)*

1. Мхитарян, В. С. **Теория вероятностей и математическая статистика** [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. С. Мхитарян, Е. В.

Астафьева, Ю. Н. Миронкина, Л. И. Трошин; под ред. В. С. Мхитаряна. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. – URL: <http://znanium.com/go.php?id=451329>

2. Фадеева Л. Н., Лебедев А. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / Л. Н. Фадеева, А. В. Лебедев ; под ред. Л. Н. Фадеевой. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЭКСМО , 2010. – 493 с.

3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов. – 12-е изд., перераб. – М.: Высшее образование , 2008. – 479 с.

4. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие [для вузов] - 2-е изд., стер. - СПб. : Лань , 2007. – 336 с.

#### **Дополнительная литература** (печатные и электронные издания)

1. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов по экономическим специальностям. - 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Юнити-Дана , 2007. – 551 с.
2. Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. **Теория вероятностей и математическая статистика**: Учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - 2-е изд., испр. и перераб. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 240 с. – URL: <http://znanium.com/go.php?id=447828>
3. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие для втузов . [в 4 ч. : ч. 3] . Теория вероятностей и математическая статистика / [Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов, В. Н. Земсков и др.] ; под ред. А. В. Ефимова. - Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Наука : Физматлит , 1990. – 427 с.



4. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. - Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Наука : Физматлит , 2002. – 496 с. – URL: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=48170](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=48170)
5. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики : учебник. – М.: Наука, 1982. – 255 с.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учебное пособие. - Изд. 4-е, стер. – М.: Высшая школа , 2007. – 491 с.
7. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие. - 9-е, стер. изд. - М.: Высшая школа , 2004. – 404 с.
8. Фигурин В. А., Оболонкин В. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. - Минск : Новое знание , 2000. – 206 с

#### **Перечень дополнительных информационно-методических материалов**

1. Мхитарян В.С., Шишов В.Ф., Козлов А.Ю. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. – Электрон. доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 416 с. – (Сер. «Бакалавриат»).
2. Палий И.А. Теория вероятностей: учебное пособие. – Электрон. доп. – М.: ИНФА-М, 2015. – 236 с. – (Высшее образование).
3. Семенов В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – Электрон. доп. – СПб.: Питер, 2013. – 192 с. – (Стандарт третьего поколения для бакалавров и специалистов).
4. Соколов Г.А., Чистякова Н.А. Теория вероятностей: учебник. – Электрон. доп. – 2-е изд., стер. – М.: Изд-во «Экзамен», 2012. – 432 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – 3-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс , 2013. – 287 с.

6. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Изд-во «Лань», 2012.
7. Коршунов Д.А., Чернова Н.И., Сборник задач и упражнений по математической статистике. – 3-е изд., стер. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2014.
8. Гнеденко Б.В., Курс теории вероятностей. – 6-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2014.

## **VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Рекомендации по планированию и организации времени, отведенного на изучение дисциплины, описание последовательности действий обучающихся**

Освоение дисциплины следует начинать с изучения рабочей учебной программы, которая содержит основные требования к знаниям, умениям и навыкам. Обязательно следует учитывать рекомендации преподавателя, данные в ходе установочных занятий. Затем – приступать к изучению отдельных разделов и тем в порядке, предусмотренном программой.

Получив представление об основном содержании раздела, темы, необходимо изучить материал с помощью рекомендуемой основной литературы. Целесообразно составить краткий конспект или схему, отображающую смысл и связи основных понятий данного раздела и включенных в него тем. Обязательно следует записывать возникшие вопросы, на которые не удалось ответить самостоятельно.

Подготовку к началу обучения включает несколько необходимых пунктов:

- 1) Необходимо создать для себя рациональный и эмоционально достаточный уровень мотивации к последовательному и планомерному изучению дисциплины.

2) Необходимо изучить список рекомендованной основной и дополнительной литературы и убедиться в её наличии у себя дома или в библиотеке в бумажном или электронном виде.

3) Необходимо иметь «под рукой» специальные и универсальные словари, справочники и энциклопедии, для того, чтобы постоянно уточнять значения используемых терминов и понятий. Пользование словарями и справочниками необходимо сделать привычкой. Опыт показывает, что неудовлетворительное усвоение предмета зачастую коренится в неточном, смутном или неправильном понимании и употреблении понятийного аппарата учебной дисциплины.

4) Желательно в самом начале периода обучения возможно тщательнее спланировать время, отводимое на работу с источниками и литературой по дисциплине, представить этот план в наглядной форме (график работы с датами) и в дальнейшем его придерживаться, не допуская срывов графика индивидуальной работы и «аврала» в предсессионный период. Пренебрежение этим пунктом приводит к переутомлению и резкому снижению качества усвоения учебного материала.

### **Рекомендации по работе с литературой**

1) Всю учебную литературу желательно изучать «под конспект». Чтение литературы, не сопровождаемое конспектированием, даже пусть самым кратким – бесполезная работа. Цель написания конспекта по дисциплине – сформировать навыки по поиску, отбору, анализу и формулированию учебного материала. Эти навыки обязательны для любого специалиста с высшим образованием независимо от выбранной специальности.

2) Написание конспекта должно быть творческим – нужно не переписывать текст из источников, но пытаться кратко излагать своими словами содержание ответа, при этом максимально структурируя конспект, используя символы и условные обозначения. Копирование и «заучивание»

неосмысленного текста трудоемко и по большому счету не имеет большой познавательной и практической ценности.

3) При написании конспекта используется тетрадь, поля в которой обязательны. Страницы нумеруются, каждый новый вопрос начинается с нового листа, для каждого экзаменационного вопроса отводится 1-2 страницы конспекта. На полях размещается вся вспомогательная информация – ссылки, вопросы, условные обозначения и т.д.

4) В итоге данной работы «идеальным» является полный конспект по программе дисциплины, с выделенными определениями, узловыми пунктами, примерами, неясными моментами, проставленными на полях вопросами.

5) При работе над конспектом обязательно выявляются и отмечаются трудные для самостоятельного изучения вопросы, с которыми уместно обратиться к преподавателю при посещении установочных лекций и консультаций, либо в индивидуальном порядке.

6) При чтении учебной и научной литературы всегда следить за точным и полным пониманием значения терминов и содержания понятий, используемых в тексте. Всегда следует уточнять значения по словарям или энциклопедиям, при необходимости записывать.

7) При написании учебного конспекта обязательно указывать все прорабатываемые источники, автор, название, дата и место издания, с указанием использованных страниц.

### **Подготовка к промежуточной аттестации по дисциплине: экзамену (зачету)**

К аттестации допускаются студенты, которые систематически в течение всего семестра посещали и работали на занятиях и показали уверенные знания в ходе выполнении практических заданий и лабораторных работ.

Непосредственная подготовка к аттестации осуществляется по вопросам, представленным в рабочей учебной программе. Тщательно изучите формулировку каждого вопроса, вникните в его суть, составьте план ответа. Обычно план включает в себя:

— определение сущности рассматриваемого вопроса, основных положений, утверждений, определение необходимости их доказательства;

— запись обозначений, формул, необходимых для полного раскрытия вопроса;

— графический материал (таблицы, рисунки, графики), необходимые для раскрытия сущности вопроса;

— роль и значение рассматриваемого материала для практической деятельности, примеры использования в практической деятельности.

## **VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине необходима аудитория для проведения лекционных и практических занятий.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

---

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ  
РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

**по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной  
математики»**

**Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика  
профиль «Математические методы в экономике»**

**Форма подготовки очная**

**Владивосток  
2015**

## План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине

№ п/п	Дата/сроки выполнения	Вид самостоятельной работы	Примерные нормы времени на выполнение	Форма контроля
	МОДУЛЬ 1.		72 часа	
1	4 неделя	Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций.	16 часов	Собеседование
2	6 неделя	Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях.	8 часов	Проект
3	10 неделя	Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций	16 часов	Собеседование
4	12 неделя	Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях.	8 часов	Проект
5	16 неделя	Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной	16 часов	Собеседование

		литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций		
6	18 неделя	Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях.	8 часов	Проект
	МОДУЛЬ 2.		45 часов	
1	22 неделя	Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций	10 часов	Собеседование
2	24 неделя	Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях.	5 часов	Проект
3	28 неделя	Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций	10 часов	Собеседование
4	30 неделя	Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях.	5 часов	Проект
5	34 неделя	Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и	10 часов	Собеседование



		конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций		
6	36 неделя	Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях.	5 часов	Проект

## Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению

По основным темам предусмотрена самостоятельная работа студентов как в теоретической (проработка лекционного материала с использованием предложенного списка литературы по курсу), так и в практической частях курса (решение домашних заданий с использованием примеров и конкретных ситуаций, рассматриваемых на лекциях, а также с использованием учебных пособий из предложенного списка литературы по курсу). Результаты освоения разделов курса оцениваются на основании самостоятельного решения домашних работ с итоговым контрольным мероприятием в виде экзамена.

На самостоятельное изучение вынесены отдельные темы курса. Эти темы изучаются самостоятельно, используя учебную литературу, приведенную в списке литературы.

Примеры решения задач повышенной сложности, предназначенных для самостоятельной работы студентов:

### Задача 1.

Случайная величина  $\xi$  равномерно распределена на отрезке  $[0, 2]$ .  
Найти плотность вероятности случайной величины  $\eta = \varphi(\xi) = -\sqrt{\xi + 1}$ .

### Решение:

Из условия задачи следует, что

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2], \\ \frac{1}{2}, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Далее, функция  $y = \varphi(x) = -\sqrt{x + 1}$  является монотонной и дифференцируемой функцией на отрезке  $[0, 2]$  и имеет обратную функцию  $x = \varphi^{-1}(y) = y^2 - 1$ , производная которой равна  $\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} = 2y$ . Кроме того,  $\varphi(0) = -1$ ,  $\varphi(2) = -\sqrt{3}$ . Следовательно, согласно теории:

$$\begin{aligned}
f_{\eta}(y) &= f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} \right| = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) \cdot 2|y| = \\
&= 2|y| \cdot \begin{cases} 0, & y \notin [-\sqrt{3}, -1], \\ -y, & y \in [-\sqrt{3}, -1]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Значит,

$$f_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-\sqrt{3}, -1], \\ -y, & y \in [-\sqrt{3}, -1]. \end{cases}$$

**Задача 2.** Двумерный случайный вектор распределен по нормальному закону с совместной плотностью вероятностей, определяемой формулой:

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)} \left[ \frac{x-m_X}{\sigma_X} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2\rho_{XY}(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right] \right\}. \quad (1)
\end{aligned}$$

Найти безусловную плотность вероятностей компоненты  $X$ , условную плотность вероятности  $f_Y(y/x)$ , условное математическое ожидание  $M[Y/X = x]$  и условную дисперсию  $D[Y/X = x]$ .

**Решение:**

По теоретической формуле имеем:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy, \quad (2)$$

где  $f_{X,Y}(x,y)$  определяется формулой (1). Сделаем замену переменной:

$$\frac{x-m_X}{\sqrt{2}\sigma_X} = u, \quad \frac{y-m_Y}{\sqrt{2}\sigma_Y} = v, \quad \text{и обозначим для краткости } \rho = \rho_{XY}.$$

Тогда

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{1-\rho^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{1-\rho^2}v^2 + \frac{2\rho uv}{1-\rho^2}\right) dv.$$

Дополняя до полного квадрата в показателе экспоненты под знаком интеграла, получим известный интеграл Пуассона:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{u^2 - \rho^2 u^2}{1-\rho^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(v-u\rho)^2}{1-\rho^2}\right] dv = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-u^2} = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}, \tag{3}
\end{aligned}$$

что совпадает с известной плотностью нормального (гауссовского) распределения вероятностей с параметрами  $m_X$  и  $\sigma_X$ .

Условную плотность вероятности находим по известной теоретической формуле, учитывая (1) и (3):

$$\begin{aligned}
f_Y(y/x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2\sigma_Y^2)} [y - m_Y - \right. \\
\left. -\rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(x - m_X)]^2\right\}. \tag{4}
\end{aligned}$$

Это значит, что  $f_Y(y/x)$  представляет собой гауссовскую плотность вероятности с параметрами, имеющими смысл условного математического ожидания и условной дисперсии (по образцу (3)):

$$M[Y/X = x] = m_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - m_X) \tag{5}$$

$$D[Y/X = x] = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2). \tag{6}$$

Кстати, уравнение (5), определяющее условное математическое ожидание как функцию  $x$ , называется в регрессионном анализе уравнением (линейной) регрессии  $Y$  на  $X$ .

**Задача 3.** Пусть случайная величина  $\xi \in N(a, \sigma)$ , причем значения параметра  $a$  (генеральной средней) неизвестно, а генеральная дисперсия  $\sigma^2$  известна. Требуется на уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу  $H_0 : a = a_0$ , если альтернативная гипотеза  $H_1 : a = a_1 > a_0$ . Построить критерий отношения правдоподобия. Вычислить объем выборки  $n$ , необходимый для достижения ошибки второго рода, равный  $\beta$ , при уровне значимости  $\alpha$ .

### Решение:

Если верна гипотеза  $H_0$ , т.е.  $\xi \in N(a, \sigma)$ , то функция правдоподобия в точке  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  равна согласно теории:

$$L_0(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a_0)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Если же верна гипотеза  $H_1$ , т.е.  $\xi \in N(a_1, \sigma)$ , то функция подобия равна:

$$L_1(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Отношение правдоподобия имеет вид:

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp\left[\frac{(a_1 - a_0)(2\bar{x} - a_1 - a_0)n}{2\sigma^2}\right],$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  - выборная (эмпирическая) средняя или средняя арифметическая.

Поскольку  $a_1 > a_0$ , то это отношение является монотонно возрастающей функцией от  $\bar{x}$ , и поскольку  $L_0(x) \neq 0$ , то неравенство  $L_1/L_0 > C$  равносильно неравенству  $\bar{x} > \bar{C}$ , где  $C$  и  $\bar{C}$  - некоторые константы. Поэтому согласно теории критическая область имеет вид:  $S = \{x: \bar{x} > \bar{C}\}$ , где  $P(\bar{x} > \bar{C} | H_0) = \alpha$ .

При условии истинности нулевой гипотезы  $H_0$  имеем согласно теории  $\bar{x} \in N(a_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ , поэтому

$$\alpha = P(\bar{x} > \bar{C} | H_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{C} - a_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{\bar{C} - a_0}{\sigma} \sqrt{n}\right),$$

где  $\Phi(u)$  и  $\Phi_0(u)$  - известные стандартная и «укороченная» функции Лапласа. Отсюда  $\Phi_0\left(\frac{\bar{C} - a_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2} - \alpha$ .

Обозначим через  $u_\alpha$  решение уравнения  $\Phi_0(u_\alpha) = \frac{1}{2} - \alpha$ , тогда константа имеет вид  $\bar{C} = a_0 + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Заметим, что величина  $u_\alpha$  является квантилью уровня (порядка)  $1 - \alpha$  для стандартного нормального

распределения и выступает здесь в качестве **критической точки**. Значение её можно найти по таблице функции Лапласа.

Итак, наиболее мощным критерием проверки гипотезы  $H_0: a = a_0$  при альтернативной  $H_1: a = a_1 > a_0$  оказывается следующий:

если  $\bar{x} < a_0 + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , то  $H_0$  принимается;

если  $\bar{x} > a_0 + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , то  $H_0$  отклоняется (и принимается  $H_1$ ).

По определению (согласно теории) ошибка второго рода равна:

$$\beta = P(\bar{x} \leq \bar{C} | H_1) = \Phi\left(\frac{\bar{C} - a_1}{\sigma} \sqrt{n}\right). \text{ Отсюда } \Phi\left(\frac{a_1 - \bar{C}}{\sigma} \sqrt{n}\right) = 1 - \beta.$$

Получаем, что должно выполняться равенство

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{a_1 - \bar{C}}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{a_1 - a_0}{\sigma} \sqrt{n} - u_\alpha\right).$$

#### Задача 4.

Имеется четыре партии сырья для предприятия машиностроения. Из каждой партии отобрано пять образцов и проведены испытания на определение величины разрывной нагрузки. Результаты испытаний приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Номер партии	Разрывная нагрузка				
	1	200	140	170	145
2	190	150	210	150	150
3	230	190	200	190	200
4	150	170	150	170	180

Требуется на уровне значимости  $\alpha = 0,01$  (на основании однофакторного дисперсионного анализа), существенно ли влияние различных партий сырья на величину разрывной нагрузки.

**Решение:**

В данном случае  $m = 4$ ,  $n = 5$ . Среднюю арифметическую каждой строки в табл. 1 вычислим (согласно теории) по формуле:

$$\bar{x}_{i*} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} .$$

Имеем:  $\bar{x}_{1*} = 164$ ;  $\bar{x}_{2*} = 170$ ;  $\bar{x}_{3*} = 202$ ;  $\bar{x}_{4*} = 164$  .

Найдем среднюю арифметическую всей совокупности:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} / mn = 3500 / 20 = 175 .$$

На основании теории однофакторный дисперсионный анализ удобно представить в виде табл. 2.

Таблица 2.

Компонента дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы $k$	Оценка дисперсий
Межгрупповая	$\sum_i (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2$	$m - 1$	$S_1^2 = \frac{1}{m - 1} \sum_i (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2$
Внутригрупповая	$\sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_{i*})^2$	$m(n - 1)$	$S_2^2 = \frac{1}{m(n - 1)} \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_{i*})^2$
Полная (общая)	$\sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2$	$mn - 1$	$S^2 = \frac{1}{mn - 1} \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2$

Вычислим (согласно теории) по табл. 1. Величины, необходимые для построения табл. 2:

• сумму квадратов отклонений между группами (т.е.  $SS_1$ ) с  $k_1 = m - 1$  степенями свободы:

$$SS_1 = 5 \sum_{i=1}^4 (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2 = 4980, \quad k_1 = 4 - 1 = 3 ;$$

• сумму квадратов отклонений между группами (т.е.  $SS_2$ ) с  $k_2 = mn - m$  степенями свободы:

$$SS_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 (x_{ij} - \bar{x}_{i*})^2 = 7270, \quad k_2 = 20 - 4 = 16;$$

• полную сумму квадратов (т.е.  $SS$ ) с  $k = mn - 1$  степенями свободы:

$$SS = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 (x_{ij} - \bar{x})^2 = 12250, \quad k = 20 - 1 = 19.$$

По найденным значениям составим таблицу 3 (т.е. табл.2 с вычисленными значениями):

Таблица 3.

Компонента дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы $k$	Оценка дисперсий
Межгрупповая	4 980	3	1 660,0
Внутригрупповая	7 270	16	454,4
Полная (общая)	12 250	19	644,7

Вычислим (согласно теории) статистику:

$$F_B = (4980 \cdot 1/3)/(7270 \cdot 1/6) = 3,65.$$

По известной таблице  $F$ -распределения (распределения Фишера) найдем значение  $F_{кр}$  при  $k_2 = 16$  и  $k_1 = 3$  степенях свободы и уровне значимости  $\alpha = 0,01$ . Имеем  $F_{кр} = 5,29$ . Вычисленное значение  $F_B$  меньше табличного, поэтому согласно теории можно утверждать, что нулевая гипотеза не отвергается, а это значит, что различие между сырьем в партиях не влияет на величину разрывной нагрузки.

### **Требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы**

Самостоятельная работа включает в себя повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам занятий; самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях.



Результаты самостоятельной работы представляются и оформляются в виде ответов на основные положения теоретического и практического материала дисциплины по темам; письменного разбора процесса решения практических заданий и задач.

В случае подготовки слайдов для защиты проекта, они должны быть контрастными (рекомендуется черный цвет шрифта на светлом фоне), кегль текста слайдов – не менее 22pt, заголовков – 32pt. Основная цель использования слайдов - служить вспомогательным инструментом к подготовленному выступлению, цитирование больших фрагментов текста на слайдах не допускается. Приветствуется использование рисунков, графиков, таблиц, интерактивного материала, однако, следует предусмотреть выбор цвета и толщину линий.

Слайды должны содержать титульный лист, цели и задачи (не более 2-х слайдов с обзором актуальности, новизны, теоретической и практической значимости работы), основные публикации с их кратким обзором (1-2 слайда), формальную постановку задачи и формулировку моделей (1-2 слайда), краткое тезисное (!) изложение ключевых положений работы (разумное количество слайдов с учетом общего времени выступления), заключение (с изложением результатов работы, подведением выводов, обсуждением практического использования работы, возможностей проведения дальнейших исследований и разработок в данной области).

Как правило, 12-15 слайдов оказывается достаточным для полного представления работы.

### **Критерии оценки выполнения самостоятельной работы**

Общие критерии оценки выполнения самостоятельной работы – правильность ответов на вопросы по темам теоретической части дисциплины, верность получаемых ответов в ходе решения практических заданий и задач.

Оценивание знаний в форме собеседования проводится по критериям:

- логичность изложения, знание и понимание основных аспектов и дискуссионных проблем по теме;
- владение методами и приемами анализа теоретических и/или практических аспектов по теме.

Оценивание знаний в форме проекта проводится по критериям:

- завершенность и полнота выполненных заданий в рамках проекта;
- владение методами и приемами решения конкретных задач;
- качество оформления письменного отчета в соответствии с правилами и стандартами оформления.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

---

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной  
математики»  
Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика  
профиль «Математические методы в экономике»  
Форма подготовки очная

Владивосток  
2015

**Паспорт  
фонда оценочных средств  
по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной  
математики»**

Код и формулировка компетенции	Этапы формирования компетенции	
ПК-9 - способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат	Знает	основы теории вероятностей, необходимые для решения математических и финансово-экономических задач
	Умеет	рассчитывать численные характеристики основных статистических распределений, в том числе рассчитывать численно значения статистических оценок при заданных выборочных значениях и доказывать основные теоремы элементарной теории вероятностей, решать стандартные теоретико-вероятностные задачи
	Владеет	навыками применения современного математического инструментария для решения задач экономики; методикой построения, анализа и применения математических моделей в экономике
ПК-12 - способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук	Знает	прикладные аспекты предельных теорем теории вероятностей, в том числе применительно к теории статистического оценивания и проверки статистических гипотез
	Умеет	применять теоретико-вероятностные методы для решения задач экономики и финансов
	Владеет	построением математических моделей случайных явлений, изучаемых естественными науками

**МОДУЛЬ 1.**

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства - наименование		
			текущий контроль	промежуточная аттестация	
1	Случайные события	ПК-9	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 1-34
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 1-8
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 1-8
		ПК-12	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 1-34
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 1-8
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 1-8
2	Случайные величины	ПК-9	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 35-58
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 9-14
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 9-14

3	Случайные векторы	ПК-12	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 35-58
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 9-14
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 9-14
		ПК-9	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 59-68
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 15-19
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 15-19
ПК-12	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 59-68		
	Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 15-19		
	Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 15-19		

## МОДУЛЬ 2.

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины	Коды и этапы формирования компетенций	Оценочные средства - наименование		
			текущий контроль		промежуточная аттестация
1	Выборочная теория	ПК-9	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 1-13
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 1-7
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 1-7
		ПК-12	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 1-13
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 1-7
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 1-7
2	Теория оценивания	ПК-9	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 14-24
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 8-12
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 8-12
		ПК-12	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 14-24
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 8-12
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 8-12
3	Интервальные оценки параметров	ПК-9	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 25-32
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 13-16
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 13-16
		ПК-12	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 25-32
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 13-16
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 13-16
4	Проверка статистических гипотез	ПК-9	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 33-40
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 17-19
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 17-19
		ПК-12	Знает	Собеседование (УО-1)	Экзамен, вопросы 33-40
			Умеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 17-19
			Владеет	Проект (ПР-9)	Экзамен, проект 17-19

## Зачетно-экзаменационные материалы

### Вопросы для подготовки к экзамену по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной математики»

#### МОДУЛЬ 1.

1. Опыт со случайным исходом. Статистическая устойчивость.
2. Понятие случайного события. Классификация событий.
3. Классическое определение вероятности.
4. Основные формулы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания (свойства биномиальных коэффициентов), формула Стирлинга.
5. Основные формулы комбинаторики: перестановки с повторениями, размещения с повторениями, сочетания с повторениями.
6. Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме.
7. Статистическое определение вероятности.
8. Геометрическое определение вероятности.
9. Понятие вероятности как обобщение предыдущих определений вероятности.
10. Алгебра событий. Диаграммы Эйлера-Венна.
11. Основная терминология в алгебре событий.
12. Принцип двойственности для событий (формулы де Моргана).
13. Понятие условной вероятности. Зависимые и независимые события.
14. Теорема сложения вероятностей (для двух совместных и двух несовместных событий).
15. Теорема умножения вероятностей (для двух зависимых и двух независимых событий).
16. Обобщение формулы сложения вероятностей на случай  $n$  событий.

17. Обобщение формулы умножения вероятностей на случай  $n$  событий. Независимые в совокупности события. Попарно независимые события. Пример Бернштэйна.

18. Надежность систем из параллельно и последовательно соединённых элементов. Определение вероятностей разрыва цепочки из  $n$  параллельно и  $n$  последовательно соединённых элементов, если вероятность разрыва в каждом элементе одинакова и равна  $p$ .

19. Формула полной вероятности. Формула Бойеса.

20. Пространство элементарных событий. Примеры. Событие как подмножество пространства элементарных событий.

21. Аксиомы теории вероятностей (с включением аксиомы о  $\mathcal{B}$  – алгебре событий). Понятие вероятностного пространства.

22. Дискретное вероятностное пространство.

23. Примеры  $\mathcal{B}$  – алгебр. Конституэнты. Максимальное число всех событий  $\mathcal{B}$  – алгебры.

24. Понятие условной вероятности в парадигме индуцирования условного вероятностного пространства.

25. Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли). Распределение Бернулли (биномиальное распределение вероятностей).

26. Наивероятнейшее число (мода) в распределении Бернулли.

27. Полиномиальное распределение. Пример вычисления вероятности выпадения чисел 1, 2, ..., 6 при шести бросаниях игральной кости.

28. Гипергеометрическое распределение (в случаях извлечения с возвращением и извлечения без возвращения). Пример игры «Спортлото»: 6 из 49».

29. Асимптотика Пуассона: формула (распределение) Пуассона.

30. Наивероятнейшее число (мода) в распределении Пуассона.

31. Поток случайных событий на оси времени.

32. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Плотность стандартного нормального (гауссовского) распределения и её свойства.

33. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Функция Лапласа – функция стандартного нормального (гауссовского) распределения и её свойства.

34. Функция Лапласа в различных видах.

35. Понятие случайной величины. Определения и примеры.

36. Закон распределения дискретной случайной величины.

37. Функция распределения вероятностей и её основные свойства.

38. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины (обобщённый подход на основе функции Хевисайда – функции единичного скачка).

39. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей и её основные свойства.

40. Плотность распределения вероятностей дискретной случайной величины (обобщённый подход на основе  $\delta$ -функции Дирака – производной от функции Хевисайда).

41. Вырожденное (индикаторное) распределение.

42. Равномерное (прямоугольное) распределение.

43. Нормальное (гауссовское) распределение.

44. Распределение Коши.

45. Показательное (экспоненциальное) распределение.

46. Биномиальное распределение (распределение Бернулли) на основе обобщённого подхода с функцией Хевисайда.

47. Математические операции над случайными величинами.

48. Математическое ожидание случайной величины (в непрерывном и дискретном случаях).

49. Примеры вычисления математического ожидания случайной величины: нормальное (гауссовское) распределение, показательное (экспоненциальное) распределение, распределение Бернулли, распределение Коши.

50. Свойства математического ожидания (с доказательствами).

51. Дисперсия случайной величины (в непрерывном и дискретном случаях) и её свойства (с доказательствами).

52. Примеры вычисления дисперсии случайной величины: нормальное (гауссовское) распределение, показательное (экспоненциальное) распределение, распределение Бернулли.

53. Мода и медиана случайной величины (в непрерывном и дискретном случаях).

54. Квантиль (симметричная квантиль) и критическая точка (симметричная критическая точка) порядка  $p$  случайной величины.

55. Моменты (начальные и центральные) случайной величины (в непрерывном и дискретном случаях).

56. Коэффициенты асимметрии (скóшенности) и эксцесса (крутости) случайной величины.

57. Среднеквадратическая ошибка в идеологии оценивания неизвестного параметра.

58. Нормальный (гауссовский) закон распределения: полное обсуждение (вместе с расчетами всех его числовых характеристик).

59. Случайные векторы: понятие двумерной случайной величины и закон её распределения, функция распределения вероятностей двух случайных величин.

60. Совместная (двумерная) плотность распределения вероятности двух случайных величин.

61. Условная функция распределения вероятностей.

62. Условная плотность вероятности.

63. Числовые характеристики двумерного случайного вектора.

64. Верхняя и нижняя границы корреляции и ковариации.

65. Ковариация и независимость двух случайных величин.

66. Ковариация и геометрия линий равного уровня плотности вероятности.

67. Коэффициент корреляции.



68. Коэффициент корреляции и расстояние (метрика).

## **МОДУЛЬ 2.**

1. Генеральная и выборочная совокупности. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная (представительная) выборка. Собственно-случайная, механическая, типическая (стратифицированная) и серийная (гнездовая) выборки. Случайная выборка и её реализация.

2. Выборочное пространство, статистическая модель (непрерывная и дискретная), параметрическая модель, статистика (выборочная характеристика), выборочное распределение, выборочное значение, сходимость по вероятности и слабая сходимость (сходимость по распределению).

3. Выражения для средней, дисперсии и доли (в группированном и негруппированном видах) для выборочной совокупности.

4. Вариационный ряд, вариационный ряд случайной выборки. Статистический ряд (простой статистический ряд), интервальный статистический ряд. Формула Стерджеса, величина интервала, метод «конвертов» подсчёта интервальных частот.

5. Эмпирическая и выборочная функции распределения. Эмпирическая плотность распределения. Графическое изображение статистического ряда (полигон, гистограмма, кумулята, эмпирическая функция распределения).

6. Теорема Гливленко. Средняя степенная  $k$ -го порядка (средняя гармоническая, средняя геометрическая, средняя квадратическая, свойство мажорантности средних).

7. Выборочные числовые моменты.

8. Статистический ряд и его характеристики в негруппированном и группированном видах [размах, среднее арифметическое (без свойств), дисперсия (без свойств), среднее линейное отклонение, медиана, мода, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации].

9. Средняя арифметическая и ее свойства.
10. Выборочная дисперсия и её свойства.
11. Упрощённый способ расчёта среднего арифметического (средней арифметической) и дисперсии.
12. Начальные и центральные моменты статистического ряда (в негруппированном и группированном видах) и их свойства. Соотношения между центральными и начальными моментами второго, третьего и четвёртого порядков.
13. Асимметрия и эксцесс статистического ряда (в негруппированном и группированном видах). Упрощённый способ расчёта асимметрии и эксцесса.
14. Постановка задачи оценивания. Понятие оценки параметров. Точечные оценки и их свойства (состоятельность, несмещённость и эффективность). Асимптотическая несмещённость. Асимптотическая эффективность. Теорема о состоятельности оценки (без доказательства) и её следствие.
15. Теорема об оценке генеральной средней.
16. Теорема об оценке генеральной дисперсии. Доказательство теоремы (из п. 14), исходя из доказательства теоремы об оценке генеральной дисперсии. Исправленная выборочная дисперсия как несмещённая и состоятельная оценка генеральной дисперсии.
17. Теорема об оценке генеральной доли.
18. Теорема об единственности эффективной оценки.
19. Регулярные модели. Теорема о неравенстве Рао-Крамера. Количество информации по Фишеру (информация Фишера). Показатель эффективности по Рао-Крамеру. Понятие эффективности оценки по Рао-Крамеру. Критерий эффективности для регулярных моделей.
20. Пример: статистика (выборочная дисперсия с известным математическим ожиданием) как несмещённая и эффективная по Рао-Крамеру оценка неизвестного параметра (генеральной дисперсии) для

нормальной модели с известным генеральным средним. Неэффективность по Рао-Крамеру исправленной выборочной дисперсии.

21. Пример: статистика (выборочная средняя) как несмещённая и эффективная по Рао-Крамеру оценка неизвестного параметра экспоненциальной модели.

22. Методы нахождения точечных оценок [метод аналогии (подстановки) (МА), метод моментов (ММ), метод квантилей (МК), метод наименьших квадратов (МНК)]. Примеры (МА – оценка математического ожидания, ММ – оценка неизвестного параметра распределения Пуассона, МК – оценки генеральных средней и дисперсии нормального распределения).

23. Методы нахождения точечных оценок [метод максимального правдоподобия (ММП)]. Примеры (ММП – оценка для вероятности  $p$  наступления некоторого события  $A$  по данному числу  $m$  появления этого события в  $n$  независимых испытаниях, ММП – оценки математического ожидания и дисперсии нормально распределённой генеральной совокупности, ММП – оценка неизвестного параметра распределения Пуассона).

24. Состоятельность оценок метода моментов. Теорема об асимптотических свойствах оценок максимального правдоподобия.

25. Распределения, связанные с нормальным:  $\chi^2$ -квадрат, Стьюдента, Фишера (общие сведения). Свойства их квантилей. Теорема Фишера.

26. Понятие интервального оценивания. Доверительный интервал. Доверительная вероятность. Предельная ошибка выборки (ошибка репрезентативности). Средняя квадратическая (стандартная) ошибка выборки.

27. Построение доверительного интервала для генеральной средней и генеральной доли по большим выборкам (теорема и её следствия).

28. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии.

29. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии.

30. Интервальная оценка дисперсии нормально распределённой генеральной совокупности при известной генеральной средней.

31. Интервальная оценка дисперсии нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной генеральной средней.

32. Формулы средних квадратических ошибок повторной и бесповторной выборок. Объёмы повторной и бесповторной выборок. Связь между объёмами повторной и бесповторной выборок и объёмом генеральной совокупности.

33. Постановка задачи проверки статистической гипотезы. Проверка статистических гипотез (принцип практической уверенности, статистическая гипотеза и общая схема её проверки, нулевая и альтернативная гипотезы, статистический критерий, уровень значимости критерия (ошибка 1-го рода), ошибка 2-го рода, мощность критерия).

34. Проверка статистической гипотезы о равенстве двух выборочных средних (в случае нормально распределённой генеральной совокупности).

35. Проверка статистической гипотезы о равенстве двух выборочных дисперсий (в случае нормально распределённой генеральной совокупности).

36. Проверка статистических гипотез о числовых значениях параметров в случае нормально распределённой генеральной совокупности (в частности, о математическом ожидании).

37. Критерий хи-квадрат Пирсона (проверка гипотезы о виде распределения генеральной совокупности).

38. Критерий хи-квадрат (проверка гипотезы о независимости двух случайных величин).

39. Критерий Колмогорова (проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности).

40. Критерий Колмогорова-Смирнова (проверка гипотезы об однородности выборок).

## Комплекты оценочных средств для текущей аттестации

### Вопросы для собеседования

по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной математики»

#### МОДУЛЬ 1.

1. Характеристическая функция случайной величины.
2. Основные свойства характеристической функции.
3. Примеры вычисления характеристической функции (для линейной связи двух случайных величин и для гауссовской случайной величины).
4. Моменты, кумулянты и характеристическая функция.
5. Понятие многомерной случайной величины и закон её распределения. Функция распределения вероятностей многомерного случайного вектора.
6. Плотность вероятности многомерного случайного вектора.
7. Многомерное нормальное распределение.
8. Частный случай: двумерный нормальный закон распределения.
9. Характеристическая функция многомерного случайного вектора.
10. Функции случайных величин (многомерный случай).
11. Частный случай: функция случайных величин, распределение вероятностей функции одной случайной величины.
12. Преобразование нескольких случайных величин (многомерный случай).
13. Частный (двумерный) случай: композиция (свёртка) законов распределения.
14. Хи-квадрат распределение вероятностей.
15. Распределение Стьюдента.
16. Распределение Фишера (Фишера-Снедекора).
17. Предварительные замечания: закон больших чисел.
18. Неравенство Маркова (лемма Чебышёва).

19. Неравенство Чебышёва.
20. Теоремы Чебышёва.
21. Теорема Бернулли.
22. Теорема Пуассона.
23. Центральная предельная теорема (ЦПТ) – теорема Ляпунова.
24. Интегральная теорема Муавра-Лапласа как частный случай ЦПТ.

## **МОДУЛЬ 2.**

1. Элементы однофакторного дисперсионного анализа: однофакторная дисперсионная модель, основные предпосылки дисперсионного анализа.
2. Элементы однофакторного дисперсионного анализа: схема дисперсионного анализа, метод линейных контрастов.
3. Понятие о двухфакторном дисперсионном анализе: двухфакторная дисперсионная модель.
4. Понятие о двухфакторном дисперсионном анализе: схема двухфакторного дисперсионного анализа.
5. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
6. Корреляционная таблица, поле корреляции (диаграмма рассеивания).
7. Выборочный (эмпирический) коэффициент корреляции.
8. Основные свойства выборочного (эмпирического) коэффициента корреляции.
9. Основные положения корреляционного анализа (двумерная модель).
10. Проверка значимости и интервальная оценка параметров связи.
11. Корреляционное отношение и индекс корреляции.
12. Понятие о многомерном корреляционном анализе.
13. Множественный и частный коэффициенты корреляции.
14. Коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла.
15. Коэффициент конкордации (согласованности) рангов Кендалла.

## 16. Основы статистического исследования зависимостей (общие сведения).

Критерии оценки:

✓ 100-86 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.

✓ 85-76 - баллов - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.

✓ 75-61 - балл – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определено и последовательно изложить ответ.

✓ 60-50 баллов – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.



**Темы проектов**  
по дисциплине «**Статистические методы и модели прикладной математики**»

**МОДУЛЬ 1.**

1. Понятие случайного события.
2. Алгебраические операции над событиями.
3. Аксиоматическое определение вероятности события.
4. Классическая вероятностная схема – схема урн.
5. Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме (схема выбора, приводящая к сочетаниям; б) схема выбора, приводящая к размещениям).
6. Геометрические вероятности. Условные вероятности. Независимость событий.
7. Вероятности сложных событий.
8. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
9. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин (гипергеометрическое распределение; равномерное (прямоугольное) распределение; показательное (экспоненциальное) распределение; распределение Коши; распределение Рэля; распределение Максвелла).
10. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин (распределение арксинуса; распределение Парето; гамма-распределение; распределение хи-квадрат; распределение Вейбулла; бета-распределение).
11. Распределения, связанные с повторными независимыми испытаниями. Схема Бернулли: распределение Бернулли.
12. Полиномиальное распределение.
13. Распределение Пуассона.
14. Нормальный закон распределения.
15. Законы распределения и числовые характеристики случайных векторов (двумерный случай; многомерный случай).

16. Законы распределения и числовые характеристики случайных векторов: равномерное распределение, нормальный закон распределения на плоскости.

17. Числовые характеристики функций случайных величин.

18. Законы распределения функций случайной величины.

19. Задача композиции (свёртки) законов распределения.

## **МОДУЛЬ 2.**

1. Выборка и способы её представления:

а) генеральная совокупность и выборочная совокупность – выборка;

б) вариационный ряд выборки;

в) размах выборки;

г) частота и относительная частота элемента выборки;

д) статистический ряд.

2. Выборка и способы её представления:

а) формула Стёрджеса для подсчёта числа интервалов;

б) величина интервала;

в) метод «конвертов» подсчёта числа интервалов;

г) группированный статистический ряд;

д) накопленные частота и относительная частота.

3. Выборка и способы её представления:

а) эмпирическая и выборочная функции распределения;

б) эмпирическая плотность распределения;

в) графическое изображение статистического ряда (полигон, гистограмма, кумулята, эмпирическая функция распределения).

4. Случай негруппированной и группированной выборок:

а) выборочное (эмпирическое) математическое ожидание – средняя арифметическая;

б) выборочная (эмпирическая) дисперсия;

- в) выборочная (эмпирическая) мода;
  - г) выборочная (эмпирическая) медиана.
6. Случай негруппированной и группированной выборок:
- а) выборочные (эмпирические) начальные и центральные моменты порядка  $k$ ;
  - б) выборочный (эмпирический) коэффициент асимметрии;
  - в) выборочный (эмпирический) коэффициент эксцесса;
  - г) выборочная (эмпирическая) квантиль порядка  $p$ .
7. Упрощенный способ вычислений всех выборочных (эмпирических) характеристик группированной выборки в случае преобразования центрирования на моду и нормирования на величину интервала.
8. Точечные оценки параметров (общие свойства оценок):
- а) Несмещённость и смещённость точечной оценки;
  - б) метод подстановки или аналогии.
9. Состоятельность точечной оценки: состоятельность оценок средней и дисперсии (в трёх модификациях) для случая одной генеральной совокупности и одной выборки заданного объема.
10. Состоятельность точечной оценки: состоятельность оценок средней и дисперсии (в трёх модификациях) для случая одной генеральной совокупности и двух выборок заданных объемов.
11. Эффективность точечной оценки:
- а) информация (количество информации) Ф́ишера в непрерывном и дискретном случаях;
  - б) теорема о неравенстве Рао-Крамера;
  - в) показатель эффективности по Рао-Крамеру.
12. Методы нахождения точечных оценок:
- а) метод максимального правдоподобия;
  - б) метод моментов;
  - в) метод квантилей.
13. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера. Теорема Фишера.

14. Интервальные оценки параметров (часть 1):

а) доверительные интервалы и доверительная вероятность;

б) доверительные интервалы для параметров нормально распределённой генеральной совокупности (часть 1):

1) доверительный интервал для математического ожидания генеральной совокупности (генеральной средней) при известной генеральной дисперсии в случаях одной и двух выборок заданных объемов из генеральной совокупности;

2) доверительный интервал для генеральной средней при неизвестной генеральной дисперсии в случаях одной и двух выборок заданных объемов из генеральной совокупности.

15. Интервальные оценки параметров (часть 2):

а) доверительные интервалы для параметров нормально распределённой генеральной совокупности (часть 2):

1) доверительный интервал для генеральной дисперсии при известной генеральной средней;

2) доверительный интервал для генеральной дисперсии при неизвестной генеральной средней;

3) доверительный интервал для отношения двух генеральных дисперсий в случае двух выборок заданных объемов из двух генеральных совокупностей.

16. Интервальные оценки параметров (часть 3):

а) доверительные интервалы для параметров нормально распределённой генеральной совокупности (часть 3):

1) доверительный интервал для разности двух генеральных средних при известных дисперсиях двух генеральных совокупностей в случае двух выборок заданных объемов из этих совокупностей;

2) доверительный интервал для разности двух генеральных средних при неизвестных (но равных друг другу) дисперсиях двух

генеральных совокупностей в случае двух выборок заданных объемов из этих совокупностей.

17. Постановка задачи проверки статистической гипотезы:

- а) принцип практической уверенности;
- б) статистическая гипотеза и общая схема её проверки;
- в) нулевая и альтернативная гипотезы;
- г) статистический критерий;
- д) уровень значимости критерия (ошибка 1-го рода);
- е) ошибка 2-го рода;
- ж) мощность критерия.

18. Проверка статистических гипотез о параметрах нормально распределенной генеральной совокупности.

19. Критерий хи-квадрат Пйрсона:

- а) проверка гипотез о виде распределения генеральной совокупности;
- б) проверка гипотез о независимости двух случайных величин.

Критерии оценки:

✓ 100-86 баллов выставляется, если студент/группа точно определили содержание и составляющие части задания, умеют аргументированно отвечать на вопросы, связанные с заданием. Продемонстрировано знание и владение навыками самостоятельной исследовательской работы по теме. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.

✓ 85-76 - баллов - работа студента/группы характеризуется смысловой цельностью, связностью и последовательностью изложения; допущено не более 1 ошибки при объяснении смысла или содержания проблемы. Продемонстрированы исследовательские умения и навыки. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.

✓ 75-61 балл – проведен достаточно самостоятельный анализ основных этапов и смысловых составляющих проблемы; понимание базовых основ и теоретического обоснования выбранной темы. Привлечены основные источники по рассматриваемой теме. Допущено не более 2 ошибок в смысле или содержании проблемы

✓ 60-50 баллов - если работа представляет собой пересказанный или полностью переписанный исходный текст без каких бы то ни было комментариев, анализа. Не раскрыта структура и теоретическая составляющая темы. Допущено три или более трех ошибок смыслового содержания раскрываемой проблемы.

## **Описание показателей и критериев оценивания компетенций, шкал оценивания**

### **Критерии оценки собеседования**

✓ 100-86 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.

✓ 85-76 - баллов - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.

✓ 75-61 - балл – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определенно и последовательно изложить ответ.

✓ 60-50 баллов – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

### **Критерии оценки проектов**

✓ 100-86 баллов выставляется, если студент/группа точно определили содержание и составляющие части задания, умеют аргументированно отвечать на вопросы, связанные с заданием. Продемонстрировано знание и владение навыками самостоятельной исследовательской работы по теме. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.

✓ 85-76 - баллов - работа студента/группы характеризуется смысловой цельностью, связностью и последовательностью изложения; допущено не

более 1 ошибки при объяснении смысла или содержания проблемы. Продемонстрированы исследовательские умения и навыки. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.

✓ 75-61 балл – проведен достаточно самостоятельный анализ основных этапов и смысловых составляющих проблемы; понимание базовых основ и теоретического обоснования выбранной темы. Привлечены основные источники по рассматриваемой теме. Допущено не более 2 ошибок в смысле или содержании проблемы

✓ 60-50 баллов - если работа представляет собой пересказанный или полностью переписанный исходный текст без каких бы то ни было комментариев, анализа. Не раскрыта структура и теоретическая составляющая темы. Допущено три или более трех ошибок смыслового содержания раскрываемой проблемы

### **Шкала оценивания**

Менее 60 баллов	незачтено	неудовлетворительно
От 61 до 75 баллов	зачтено	удовлетворительно
От 76 до 85 баллов	зачтено	хорошо
От 86 до 100 баллов	зачтено	отлично



## Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

**Текущая аттестация студентов.** Текущая аттестация студентов по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной математики» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной математики» проводится в форме собеседования и защиты проекта и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

- степень усвоения теоретических знаний - оценивается в форме собеседования;
- уровень овладения практическими умениями и навыками – оценивается в форме защиты проекта.

**Промежуточная аттестация студентов.** Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной математики» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

По дисциплине предусмотрен экзамен, который проводится в устной форме и с использованием защиты проекта.

### Критерии выставления оценки студенту на экзамене по дисциплине «Статистические методы и модели прикладной математики»

Баллы (рейтинговой оценки)	Оценка зачета/ экзамена (стандартная)	Требования к сформированным компетенциям
86-100	«зачтено»/ «отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

76-85	<i>«зачтено»/ «хорошо»</i>	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.
61-75	<i>«зачтено»/ «удовлетворительно»</i>	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.
0-60	<i>«не зачтено»/ «неудовлетворительно»</i>	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.