МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Дальневосточный федеральный университет»**
(ДВФУ)

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

| «СОГЛАСОВАНО» | «УТВЕРЖДАЮ» |
|---|---|
| Руководитель образовательной программы | Врио заведующего кафедрой математических методов в экономике |
| _____________ А.С. Величко | _____________ А.С. Величко |
| «09» июля 2015 г. | «09» июля 2015 г. |

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**
Методы и модели прикладной математики
**Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика**
профиль «Математические методы в экономике»
**Форма подготовки очная**

курс 1 семестр 1, 2
лекции 72 час.
практические занятия 108 час.
лабораторные работы 0 час.
в том числе с использованием МАО лек. 0 час. / пр. 0 час. / лаб. 0 час.
всего часов аудиторной нагрузки 180 час.
в том числе с использованием МАО 0 час.
самостоятельная работа 108 час.
в том числе на подготовку к экзамену 54 час.
контрольные работы (количество) 4
курсовая работа / курсовой проект не предусмотрены
зачет не предусмотрены
экзамен 1, 2 семестры

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 12.03.2015 № 208

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры математических методов в экономике, протокол № 17 от «09» июля 2015 г.

Врио заведующего кафедрой математических методов в экономике, к.ф.-м.н., доцент А.С. Величко

Составитель:
доцент кафедры математических методов в экономике к.ф.-м.н., доцент А.В. Мишаков

## АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Методы и модели прикладной математики» предназначена для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», профиль «Математические методы в экономике».

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 8 зачетных единицах (288 часов). Дисциплина реализуется на 1 курсе в 1-м и 2-м семестрах. Дисциплина входит в обязательные дисциплины базовой части блока «Дисциплины (модули)».

Особенности построения курса: лекции (72 часа), практические занятия (108 часов), самостоятельная работа (54 часа), подготовка к экзамену (54 часа).

Так как в название дисциплины входят такие термины как математика, прикладная математика, методы и модели, то их необходимо пояснить для определения основной тематики предлагаемого курса.

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Прикладная математика – совокупность математических идей и методов, непосредственно используемых в других науках и технике.

Методы – множественное число от термина «Метод».

Метод – совокупность приёмов или операций для построения искомого результата.

Модели – множественное число от термина «Модели».

Модель – это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая способна замещать объект таким образом, что её изучение даёт на новую информацию об этом объекте. (При этом мы должны понимать, что реальные объекты слишком сложны, поэтому для их изучения создают модели – копии изучаемых реальных объектов. С одной стороны, модели должны быть доступны для изучения, в силу чего они не должны быть слишком сложными – значит, они неминуемо будут лишь упрощенными копиями. Но, с другой стороны, выводы, полученные при их изучении, мы хотим распространить на реальные объекты – прототипы, следовательно, модель должна отражать существенные черты изучаемого реального объекта. В силу такой двойственности построение, составление моделей во многом является искусством. Чем удачнее будет подобрана, построена модель, чем лучше она будет отражать существенные черты реального объекта, тем успешнее будет её исследование и полезнее вытекающие из этого исследования, выводы и рекомендации).

Вопросы о роли в современном мире математики вообще и прикладной математики в частности, о необходимости формирования культуры математического мышления специалиста любой отрасли знаний связаны с методом математического моделирования как методом изучения объектов реальной действительности.

По форме представления модели можно разделить на физические, символические, смешанные. К символическим моделям относятся математические модели.

Математическая модель – это приближённое описание какого-либо класса явлений, объектов внешнего мира, выраженное с помощью математических понятий и математической символики. (Составление математических моделей и называется математическим моделированием. Именно через составление математических моделей применяется прикладная математика в научных исследованиях, в других науках. Это довольно ярко заметно и в экономической науке. Фактически математический аппарат и математические модели, в которых он применяется, излагаются в предлагаемом курсе, в сущности, параллельно.)

Прежде всего математические модели делятся на образные (чертежи, графики, схемы и т.д.) и знаково-символические (уравнения, формулы и т.д.).

Знаково-символические модели бывают следующих видов:

1) оптимизационные (в частности, экономико-математические) модели, в которых введён критерий оптимальности, определяющий

смысловое содержание построенной целевой функции, связывающей факторы модели (например, задача о расходе сырья);

2) функциональные модели, в которой по значениям одной переменной можно определить значения другой. К ним относятся динамические модели, когда в качестве переменной участвует время, например: $s = \upsilon t$ (зависимость пути $s$ от времени $t$ и скорости $\upsilon$), и статические модели, например: $S = xy$ (зависимость площади прямоугольника от его длины и ширины).

Кроме того, математические модели можно разделить на детерминистские и статистические (стохастические). Детерминистские модели выражаются формулой, уравнением, в которые входят достоверные величины, а в статистических (вероятностных или стохастических) моделях участвуют случайные величины.

С позиции непрерывности математические модели делятся также на непрерывные и дискретные модели, например, дискретные и непрерывные случайные величины.

Следует ещё раз подчеркнуть, что базисные математические понятия, являющиеся каркасом математической теории, представляют из себя модели реально существующих объектов. Это число, множество, функция, длина, площадь, объём, вектор, матрица, производная, дифференциал, первообразная, определённый интеграл, дифференциальное уравнение, событие, вероятности, случайная величина и др.

Если математическая модель построена, то её исследование ведётся средствами математики без привлечения содержательных соображений. Процесс математического моделирования (построения и исследования математической модели) разбивается на следующие этапы:

1) построение математической модели: отбрасывание второстепенных факторов, построение описательной модели объекта и переведение её на математический язык;

2) изучение построенной математической модели с помощью математических методов;

3) проверка адекватности построенной модели опытным данным;

4) в случае несоответствия опытным данным – уточнение математической модели или её замена другой моделью.

В предлагаемом курсе речь идёт о детерминистских методах и моделях прикладной математики, используемых в линейной алгебре, т.е. разделе алгебры (как части математики, рассматривающей алгебраические операции над объектами произвольной природы), в котором изучаются векторные пространства, их линейные отображения, линейные, билинейные и квадратичные формы, а также матрицы, определители и системы линейных уравнений, и, кроме того, используемых в аналитической геометрии, т.е. в разделе геометрии (как части математики, рассматривающей пространственные отношения и формы тел, а также их обобщения), в котором изучаются геометрические образы алгебраическими методами (т.е. изучаются геометрические объекты средствами алгебры на основе метода координат).

Таким образом, данный курс (МиМПМ) в рассматриваемой детерминистской версии эквивалентен курсу линейной алгебры и аналитической геометрии (ЛААГ). При этом в предлагаемый курс МиМПМ (ЛААГ) входят и элементы векторной алгебры как раздела математики, изучающего векторные величины (векторы) и действия с ними, т.е. изучающего простейшие алгебраические операции над векторами: сложение, умножение на число, скалярное, векторное и смешанное произведения.

Содержание дисциплины МиМПМ (ЛААГ) охватывает следующий круг вопросов: основные разделы линейной алгебры и аналитической геометрии. Основная тематика курса определяется потребностями базовых, прикладных и специальных курсов, таких как «математический анализ», «дифференциальные уравнения», «теория вероятностей и математическая статистика», «исследование операций», «теория игр», «теория управления», «линейное программирование в экономике», «системный анализ и моделирование в экономике», «эконометрика», «моделирование транспортных потоков и систем», «модели городской экономики» и др. В совокупности с указанными дисциплинами линейная алгебра и аналитическая геометрия способствует качественному улучшению профессиональной подготовки студентов, а также способствует формированию системного целостного взгляда на единство всех разделов математики, являющейся своеобразным метаязыком, на котором написана универсальная «книга» природы и общества.

**Цель** – формирование у студентов представлений о неразрывном единстве основных разделов алгебры и геометрии как частей математики, описывающей количественные отношения и пространственные формы действительного мира, а также введение студентов в круг базовых понятий и методов линейной алгебры и аналитической геометрии для их подготовки к изучению смежных базовых и специальных курсов, использующих различные методы МиМПМ (ЛААГ).

**Задачи:**

- знать основные понятия ЛААГ, уметь применять их для решения задач экономики;
- уметь описывать экономические и финансовые модели с помощью ЛААГ, решать задачи экономики основными методами ЛААГ;
- развить способность ориентироваться в постановке задач и определять, каким образом следует искать средства их решения с точки зрения ЛААГ;
- проводить с помощью основных методов и моделей ЛААГ разработку и исследование математических моделей экономических объектов, систем и процессов, предназначенных для проведения расчётов, анализа и подготовки экономических решений;

- владеть навыками решения практических задач.

Для успешного изучения дисциплины «Методы и модели прикладной математики» у обучающихся должны быть сформированы следующие предварительные компетенции:

- готовность к самостоятельной работе.

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие профессиональные компетенции (элементы компетенций).

| **Код и формулировка компетенции** | **Этапы формирования компетенции** | |
|---|---|---|
| ПК-9 - способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат | Знает | базовые понятия и основные технические приемы матричной алгебры, аналитической геометрии, теории линейных пространств (над вещественным и комплексным полями) и их отображений, спектральной теории |
| | Умеет | решать широкого класса задачи из различных разделов курса, поисковой и творческой деятельности при решении задач повышенной сложности и нетиповых задач |
| | Владеет | стандартными методами алгебры комплексных чисел и операционного исчисления и их применением к решению прикладных задач |
| ПК-12 - способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук | Знает | основы линейной алгебры и аналитической геометрии, необходимые для успешного изучения математических дисциплин, решения экономических задач |
| | Умеет | применять методы линейной алгебры и аналитической геометрии для решения математических задач, для построения и анализа моделей в экономике |
| | Владеет | навыками применения современного математического инструментария для решения задач экономики; методикой построения, анализа и применения математических моделей в экономике |

Для формирования вышеуказанных компетенций в рамках дисциплины МиМПМ (ЛААГ) применяются неимитационные методы активного обучения: лекция-беседа в рамках теоретической части курса, написание контрольных работ и выполнение задач повышенной сложности – в практической части курса.

## I. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

## МОДУЛЬ 1. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 1 (36 часов)

**Введение (2 часа)**

Предмет математики. Разделы математики: алгебра и геометрия (линейная алгебра, векторная алгебра, общая алгебра, высшая алгебра, аналитическая геометрия). Предметы линейной алгебры и аналитической геометрии. Экскурс в историю.

**Раздел I. Элементы линейной алгебры (часть 1) – матричной алгебры (часть 1) : матрицы и определители (13,5 часов)**

**Тема 1. Матрицы (часть 1) (4 часа)**

Основные определения и сведения о матрицах. Виды матриц. Линейные операции (действия) над матрицами (сложение матриц одинаковых размеров, вычитание матриц одинаковых размеров, умножение числа на матрицу, теорема 1 (о линейных операциях над матрицами)). Умножение (произведение) матриц (согласование матриц, умножение матрицы на матрицу, теорема 2 (о свойствах умножения матриц)). Возведение квадратной матрицы в целую положительную степень. Многочлены от матриц. Транспонирование матрицы (определение транспонированной матрицы, теорема 3 (о свойствах транспонированной матрицы)). Комплексные матрицы.

**Тема 2. Арифметическое пространство (0,5 часа)**

Определение арифметического пространства. Линейная комбинация строк со скалярными коэффициентами. Линейно зависимые и линейно независимые строки. Теорема 4 (о линейной зависимости строк при одной нулевой строке). Теорема 5 (о линейной зависимости строк при линейной зависимости части этих строк). Теорема 6 (о строке как линейной комбинации остальных линейно зависимых строк).

**Тема 3. Определители (определители квадратных матриц) (4 часа)**

Предварительные замечания о задачах, сводящиеся к вычислению определителей. Определители 1-го, 2-го, 3-го и $n$-го порядков (определители 1-го и 2-го порядков, определитель 3-го порядка (правило Саррюса), минор, алгебраическое дополнение, теорема 7 (о величине определителя квадратной матрицы) – теорема Лапла́са). Свойства определителей (свойства 1-9, свойство 10 (свойство замещения), свойство 11 (свойство аннулирования), свойство 12 (об определителе произведения квадратных матриц)). Вычисление определителя разными способами: 1) способом (методом) Лапласа; 2) способом (правилом) Саррюса (правилом треугольников) для $n = 3$; 3) способом, комбинирующих свойство 9 (об элементарных преобразованиях определителя) и теорему Лапласса; 4) способом, сводящим с помощью свойства 9 искомый определитель к определителю треугольного вида.

**Тема 4. Матрицы (часть 2): обратная матрица, матрицы элементарных преобразований, решение матричных уравнений и ранг матрицы (5 часов)**

Невырожденная и вырожденная матрицы. Определение обратной матрицы. Теорема 8 (о существовании обратной матрицы), метод присоединенной матрицы. Свойства обратных матриц (свойства 1-5). Типы матриц элементарных преобразований. Элементарные преобразования матрицы: теорема 9 (об умножении матрицы на матрицы элементарных преобразований). Способ построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований (метод Жорда́на). Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.

Определение ранга матрицы. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях: теорема 10 (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях). Линейные комбинации строк или столбцов: теорема 6' (о линейной комбинации строк (столбцов) данной матрицы: теорема 11 (о связи ранга с числом независимых строк (столбцов)). Строка матрицы как линейная комбинация независимых строк матрицы: теорема 12 (о представлении строки матрицы в виде линейной комбинации независимых строк данной матрицы).

**Раздел II. Элементы линейной алгебры (часть 2) – элементы матричной алгебры (часть 2): системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (7часов)**

**Тема 5. СЛАУ (часть 1): «квадратные» и «прямоугольные» СЛАУ (4 часа)**

Общие понятия СЛАУ. Нахождение единственного решения СЛАУ: метод обратной матрицы, метод с использованием формул Крамера (метод Крамера) – теорема 13 (теорема Крамера) (о решении СЛАУ с помощью определителей).

Равносильность (эквивалентность) СЛАУ при элементарных преобразованиях: теорема 14 (о равносильности СЛАУ при элементарных преобразованиях). Метод Га́усса (метод последовательных исключений Жордана-Гаусса). Теорема 15 (о совместности СЛАУ) – теорема Кроне́кера-Капелли. Схема решений СЛАУ.

**Тема 6. СЛАУ (часть 2): базисные (частные) и общие решения однородных и неоднородных СЛАУ (3 часа)**

Основные (базисные) и неосновные (свободные) переменные. Базисное решение неоднородной СЛАУ. Однородные СЛАУ: свойства однородной СЛАУ, фундаментальные решения – теорема 16 (о фундаментальных решениях однородной СЛАУ), фундаментальный набор решений (ФНР) или фундаментальная система решений (ФСР), число фундаментальных наборов решений. Общее решение неоднородной СЛАУ: теорема 17 (об общем решении неоднородной СЛАУ, представление общего решения неоднородной СЛАУ с помощью ФНР.

**Раздел III. Элементы аналитической геометрии (часть 1): элементы аналитической геометрии на прямой, плоскости и в пространстве (часть 1), элементы векторной алгебры (часть 1) (7,5 часов)**

**Тема 7. Прямоугольная (декартова) система координат и элементы векторной алгебры (часть 1) (6 часов)**

Система координат на прямой. Геометрическое изображение вещественных чисел. Прямоугольная система координат на плоскости. Прямоугольная система координат в пространстве. Понятие вектора. Длина и направление вектора. Коллинеарные векторы. Линейные операции над векторами (скалярные и векторные величины, определение вектора, сложение векторов: правило треугольника или правило «замыкания» линейной цепочки векторов, правило параллелограмма, вычитание векторов, умножение вектора на действительное число, понятие орта вектора, свойства линейных операций над векторами: свойства 1-8). Проекция вектора на ось: теорема 18 (о проекции вектора на ось), теорема 19 (о проекции суммы двух векторов на ось), теорема 20 (о проекции на ось произведения вектора на число). Проекции вектора на оси координат: теорема 21 (о координатах вектора). «Координатные» следствия теорем 19 и 20. Условие коллинеарности двух векторов в координатах. Разложение вектора по базису: ортогональный базис, теорема 22 (о разложении вектора по ортогональному базису). Скалярное произведение векторов (определение и основные свойства (свойства 1-5) скалярного произведения, выражение скалярного произведения через координаты векторов: теорема 23 (о скалярном произведении в координатах).

**Тема 8. Простейшие задачи аналитической геометрии и направляющие косинусы вектора (1 час)**

1-я задача аналитической геометрии: расстояние между двумя точками в пространстве, на плоскости и на прямой – теорема 24 (о расстоянии между двумя точками). Длина (модуль) вектора в координатах вектора (в «больших» координатах) и в координатах концевой и начальной точек вектора (в «малых» координатах). Угол между векторами в «больших» координатах. Направляющие косинусы вектора. Генезис основного тригонометрического тождества. 2-я простейшая задача аналитической геометрии: деление отрезка в данном отношении – теорема 25 (о делении отрезка в данном отношении). Площадь треугольника как 3-я простейшая задача аналитической геометрии на плоскости – теорема 26 (о площади треугольника на плоскости через координаты его вершин).

**Тема 9. Ортогональные криволинейные системы координат на плоскости и в пространстве (0,5 часа)**

Полярные координаты. Полярная система координат. Цилиндрические координаты. Цилиндрическая система координат. Сферические координаты. Сферическая система координат. Географическая система координат как особый частный случай сферической системы координат на сфере конечного радиуса. Географические координаты.

**Раздел IV. Элементы аналитической геометрии (часть 2): элементы аналитической геометрии на плоскости (часть 2) (6 часов)**

**Тема 10. Уравнение линии на плоскости (часть 1) (6 часов)**

Определение линии на плоскости и её уравнение. Классификация кривых на плоскости (кривые 1-го и 2-го порядков). Общий вид кривых первого порядка. Прямая линия. Угол наклона и угловой коэффициент. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (каноническое уравнение прямой). Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом. Параметрические уравнения прямой. Точки пересечения двух прямых. Взаимное расположение двух прямых. Другие уравнения прямой: уравнение прямой в «отрезках»; угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в терминах коэффициентов общих уравнений прямых; уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельно заданной прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно заданной прямой. Расстояние от точки до прямой (первый (прямой) вывод). Нормальное уравнение прямой. Отклонение и расстояние от точки до прямой (второй вывод).

## МОДУЛЬ 2. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 2 (36 часов)

### Раздел V. Элементы аналитической геометрии (часть 3): элементы аналитической геометрии на плоскости (часть 3) (8 часов)

#### Тема 11. Уравнение линии на плоскости (часть 2) (8 часов)

Общий вид кривых второго порядка. Общее уравнение окружности и его частные виды: уравнение смещённой окружности и уравнение несмещённой окружности (каноническое уравнение окружности). График квадратного трёхчлена. Канонические уравнения кривых 2-го порядка: 1) эллипс (определение, фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, уравнение, эксцентриситет); 2) гипербола (определение, фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, уравнение, эксцентриситет); 3) парабола (определение, фокус, фокальный радиус, директриса, характеристическое свойство, уравнение, «прожекторное» («телескопическое») свойство); директрисы эллипса и гиперболы (1-ое и 2-ое определения); теорема 27 (о фокальном радиусе, директрисе и эксцентриситете эллипса); теорема 28 (о фокальном радиусе, директрисе и эксцентриситете гиперболы). Эллипс, гипербола и парабола в терминах конического сечения. Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы. Две основные задачи аналитической геометрии на плоскости. Параметрическое задание кривой: параметрическое уравнение окружности, параметрическое уравнение эллипса, параметрическое уравнение циклоиды.

Пересечение двух кривых. Преобразование декартовых прямоугольных координат: параллельный перенос и поворот координатных осей. Некоторые специальные кривые 2-го порядка на плоскости: спирали, лемниската Берну́лли, 4- и 3-лепестковые розы, астроида, кардиоида, эвольвента (развёртка) окружности.

**Раздел VI. Элементы аналитической геометрии (часть 4): элементы аналитической геометрии в пространстве (часть 2) и элементы векторной алгебры (часть 2) (6 часов)**

**Тема 12. Поверхности 1-го порядка - плоскости в пространстве, кривые 1-го порядка – прямые в пространстве (0,5 часа)**

Определение поверхности в пространстве и её уравнение. Определение кривой (линии) в пространстве и её уравнения. Уравнения плоскости: общее уравнение плоскости; угол между двумя плоскостями и условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей; нормальный вектор плоскости; уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; условие совпадения двух плоскостей; нормальное уравнение плоскости; расстояние от точки до плоскости. Уравнения прямой: общие уравнения прямой; канонические уравнения прямой; параметрические уравнения прямой; угол между двумя прямыми в пространстве и условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве; расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости: условия параллельности и перпендикулярности, угол между прямой и плоскостью.

**Тема 13. Поверхности 2-го порядка (0,5 часа)**

Уравнение цилиндрической поверхности: определение цилиндрической поверхности, образующие и направляющая для цилиндрической поверхности, уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров. Эллипсоид (определение, уравнение и свойства). Однополосный гиперболоид (определение, уравнение и свойства). Двуполосный гиперболоид (определение, уравнение и свойства).

Эллиптический параболоид (определение, уравнение и свойства). Гиперболический параболоид (определение, уравнение и свойства). Конус второго порядка (определение, уравнение и свойства).

**Тема 14. Элементы векторной алгебры (часть 2) (5 часов)**

Векторное произведение векторов: определение векторного произведения двух векторов, основные свойства векторного произведения, теорема 29 (о векторном произведении в координатной форме). Двойное векторное произведение: теорема 30 (о правиле «БАЦ-ЦАБ»), теорема 31 (о тождестве Якóби). Смешанное (скалярно-векторное) произведение трёх векторов: определение, теорема 32 (о геометрическом смысле смешанного произведения), следствия 1 и 2 из теоремы 32, теорема 33 (о смешанном произведении в координатной форме), следствия 1, 2 и 3 из теоремы 33.

**Раздел VII. Элементы линейной алгебры (часть 3) – элементы алгебры комплексных чисел (5 часов)**

**Тема 15. Элементы алгебры комплексных чисел (5 часов)**

Упорядоченные пары действительных чисел и операции над ними. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами. Возведение в степень комплексного числа. Извлечение квадратного корня из комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (произведение и частное от деления двух комплексных чисел, возведение в степень $n$ – формула Муавра, извлечение корня степени $n$ из комплексного числа.

**Раздел VIII. Элементы линейной алгебры (часть 4) – алгебра линейных пространств и линейные отображения (17 часов)**

**Тема 16. Алгебра линейных пространств (8 часов)**

Линейные векторные пространства: понятие линейного векторного пространства, вектор в $n$-мерном пространстве, линейная зависимость и независимость векторов, свойства линейной зависимости векторов. Размерность и базис векторного пространства: размерность векторного пространства, базис векторного пространства, теорема 34 (о разложении $n$-мерного вектора по базису), теорема 35 (о дополнении до базиса). Переход к новому базису: матрица перехода к новому базису, свойства матрицы перехода. Линейные подпространства: понятие линейного подпространства, сумма и пересечение линейных подпространств, свойства суммы и пересечения линейных подпространств, понятие линейной оболочки, свойства линейной оболочки. Евклидовы пространства: понятие евклидова пространства, скалярное произведение двух $n$-мерных векторов, длина (норма) $n$-мерного вектора в евклидовом пространстве, угол между двумя ненулевыми $n$-мерными векторами в евклидовом пространстве, свойства длины (нормы) вектора, ортонормированная система векторов, теорема 36 (о независимости ортонормированной системы векторов, теорема 37 (о существовании ортонормированного базиса) – метод ортогонализации Шмидта, понятие ортогонального дополнения, свойства ортогонального дополнения.

**Тема 17. Линейные отображения (9 часов)**

Общие сведения о линейных отображениях: понятие отображения; образ, ранг, ядро и дефект отображения; теорема 38 (об образе и ядре); теорема 39 (об отображении базиса). Линейные операторы: понятие линейного оператора, свойства линейных операторов, структура линейного оператора, матрица линейного оператора, теорема 40 (о связи матриц оператора в разных базисах), теорема 41 (об определителе оператора в разных базисах). Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: собственные векторы и собственные значения, характеристическое уравнение оператора, характеристические или собственные числа оператора, спектр оператора. Теорема 42 (о независимости собственных векторов). Симметричный оператор: понятие симметричного оператора, теорема 43 (об условии симметричности оператора), теорема 44 (об ортогональности собственных векторов). Квадратичные формы: понятие квадратичной формы, теорема 45 (о связи между квадратичной формой и оператором), теорема 46 (о приведении квадратичной формы к каноническому виду), свойства канонических форм, положительно (отрицательно) определенная и неотрицательно (неположительно) определенная формы, угловые и главные миноры, теорема 47 (об определении знака формы по собственным числам), критерий Сильве́стра: теорема 48 (об определении знака формы по угловым минорам).

# II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА

## Практические занятия (108 часов)

## МОДУЛЬ 1. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 1 (54 часа)

### Занятие 1. Линейная алгебра (часть 1): Матрицы – часть 1 (2 часа)

1. Линейные операции над матрицами.
2. Умножение матрицы на матрицу.
3. Возведение квадратной матрицы в целую положительную степень.
4. Многочлены от матриц.
5. Транспонирование матрицы.

### Занятие 2. Линейная алгебра (часть 2): Матрицы – часть 2 (2 часа)

1. Линейные операции над матрицами.
2. Умножение матрицы на матрицу.

3. Возведение квадратной матрицы в целую положительную степень.

4. Многочлены от матриц.

5. Транспонирование матрицы.

**Занятие 3. Линейная алгебра (часть 3): Определители – часть 1 (2 часа)**

1. Определитель 2-го порядка и его вычисление.

2. Определитель 3-го порядка и его вычисление (правило Са́ррюса – правило «треугольников»).

3. Минор и алгебраическое дополнение.

4. Свойства определителей.

5. Определитель *n*-го порядка и его вычисление (теорема Лапла́сса).

**Занятие 4. Линейная алгебра (часть 4): Определители – часть 2 (2 часа)**

1. Определитель 2-го порядка и его вычисление.

2. Определитель 3-го порядка и его вычисление (правило Са́ррюса – правило «треугольников»).

3. Минор и алгебраическое дополнение.

4. Свойства определителей.

5. Определитель *n*-го порядка и его вычисление (теорема Лапла́сса).

**Занятие 5. Линейная алгебра (часть 5): Определители – часть 3 (2 часа)**

1. Определитель 2-го порядка и его вычисление.

2. Определитель 3-го порядка и его вычисление (правило Са́ррюса – правило «треугольников»).

3. Минор и алгебраическое дополнение.

4. Свойства определителей.

5. Определитель *n*-го порядка и его вычисление (теорема Лапла́сса).

**Занятие 6. Линейная алгебра (часть 6): Матрицы – часть 3 (2 часа)**

1. Обратная матрица и её вычисление методом присоединённой матрицы.

2. Свойства обратных матриц.

3. Элементарные преобразования матрицы.

4. Способ построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований (метод Жордо́на).

5. Решение матричных уравнений.

**Занятие 7. Линейная алгебра (часть 7): Матрицы – часть 4 (2 часа)**

1. Обратная матрица и её вычисление методом присоединённой матрицы.

2. Свойства обратных матриц.

3. Элементарные преобразования матрицы.

4. Способ построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований (метод Жордо́на).

5. Решение матричных уравнений.

**Занятие 8. Линейная алгебра (часть 8): Матрицы – часть 5 (2 часа)**

1. Обратная матрица и её вычисление методом присоединённой матрицы.

2. Свойства обратных матриц.

3. Элементарные преобразования матрицы.

4. Способ построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований (метод Жордо́на).

5. Решение матричных уравнений.

**Занятие 9. Линейная алгебра (часть 9): Матрицы – часть 6 (2 часа)**

1. Ранг матрицы и его нахождение методом окаймляющих миноров.

2. Ранг матрицы и его вычисление методом элементарных преобразований.

3. Линейные комбинации строк и столбцов: линейная зависимость и линейная независимость строк или столбцов матрицы.

**Занятие 10. Линейная алгебра (часть 10): Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – часть 1 (2 часа)**

1. «Квадратная» неоднородная СЛАУ и нахождение её единственного решения: а) методом обратной матрицы; б) методом Кра́мера (с помощью определителей).

2. Равносильность (эквивалентность) «квадратных» и «прямоугольных» однородных и неоднородных СЛАУ при элементарных преобразованиях.

3. Метод Га́усса (метод последовательных исключений Жордана-Гаусса).

4. Теорема Кроне́кера-Капе́лли.

5. Схема решений СЛАУ.

**Занятие 11. Линейная алгебра (часть 11): СЛАУ – часть 2 (2 часа)**

1. «Квадратная» неоднородная СЛАУ и нахождение её единственного решения: а) методом обратной матрицы; б) методом Кра́мера (с помощью определителей).

2. Равносильность (эквивалентность) «квадратных» и «прямоугольных» однородных и неоднородных СЛАУ при элементарных преобразованиях.

3. Метод Га́усса (метод последовательных исключений Жордана-Гаусса).

4. Теорема Кроне́кера-Капе́лли.

5. Схема решений СЛАУ.

**Занятие 12. Линейная алгебра (часть 12): СЛАУ – часть 3 (2 часа)**

1. «Квадратная» неоднородная СЛАУ и нахождение её единственного решения: а) методом обратной матрицы; б) методом Кра́мера (с помощью определителей).

2. Равносильность (эквивалентность) «квадратных» и «прямоугольных» однородных и неоднородных СЛАУ при элементарных преобразованиях.

3. Метод Га́усса (метод последовательных исключений Жордана-Гаусса).

4. Теорема Кроне́кера-Капе́лли.

5. Схема решений СЛАУ.

**Занятие 13. Линейная алгебра (часть 13): СЛАУ – часть 4 (2 часа)**

1. Основные (базисные) и неосновные (свободные) переменные.

2. Базисное решение неоднородной СЛАУ.

3. Однородная СЛАУ и её свойства.

4. Фундаментальные решения однородной СЛАУ, её фундаментальный набор решений (ФНР).

5. Обще решение неоднородной СЛАУ через её базисное решение и через ФНР соответствующей ей однородной СЛАУ.

**Занятие 14. Линейная алгебра (часть 14): СЛАУ – часть 5 (2 часа)**

1. Основные (базисные) и неосновные (свободные) переменные.

2. Базисное решение неоднородной СЛАУ.

3. Однородная СЛАУ и её свойства.

4. Фундаментальные решения однородной СЛАУ, её фундаментальный набор решений (ФНР).

5. Обще решение неоднородной СЛАУ через её базисное решение и через ФНР соответствующей ей однородной СЛАУ.

**Занятие 15. Векторная алгебра – часть 1 (2 часа)**

1. Линейные операции над векторами, правило треугольника или правило «замыкания» линейной цепочки векторов, правило параллелограмма.

2. Коллинеарность векторов, орт вектора.

3. Свойства линейных операций над векторами.

4. Проекция вектора на ось, проекция суммы нескольких векторов на ось, проекция на ось произведения вектора на число.

5. Проекции вектора на оси координат: координаты («большие» координаты) вектора и их нахождение через координаты («малые» координаты) концевой и начальной точек вектора, условие коллинеарности двух векторов в координатах.

6. Разложение вектора по ортогональному базису.

**Занятие 16. Векторная алгебра – часть 2 (2 часа)**

1. Линейные операции над векторами, правило треугольника или правило «замыкания» линейной цепочки векторов, правило параллелограмма.
2. Коллинеарность векторов, орт вектора.
3. Свойства линейных операций над векторами.
4. Проекция вектора на ось, проекция суммы нескольких векторов на ось, проекция на ось произведения вектора на число.
5. Проекции вектора на оси координат: координаты («большие» координаты) вектора и их нахождение через координаты («малые» координаты) концевой и начальной точек вектора, условие коллинеарности двух векторов в координатах.
6. Разложение вектора по ортогональному базису.

**Занятие 17. Векторная алгебра – часть 3 (2 часа)**

1. Скалярное произведение векторов.
2. Основные свойства скалярного произведения.
3. Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

**Занятие 18. Векторная алгебра – часть 4 (2 часа)**

1. Скалярное произведение векторов.
2. Основные свойства скалярного произведения.
3. Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

**Занятие 19. Аналитическая геометрия – часть 1 (2 часа)**

1. Расстояние между двумя точками в пространстве, на плоскости и на прямой, длина (модуль) вектора в координатах вектора (в «больших» координатах) и в координатах концевой и начальной точек вектора (в «малых» координатах).
2. Угол между векторами в «больших» координатах.
3. Направляющие косинусы вектора.
4. Деление отрезка в данном отношении.

5. Площадь треугольника на плоскости через координаты его вершин.

**Занятие 20. Аналитическая геометрия – часть 2 (2 часа)**

1. Расстояние между двумя точками в пространстве, на плоскости и на прямой, длина (модуль) вектора в координатах вектора (в «больших» координатах) и в координатах концевой и начальной точек вектора (в «малых» координатах).
2. Угол между векторами в «больших» координатах.
3. Направляющие косинусы вектора.
4. Деление отрезка в данном отношении.
5. Площадь треугольника на плоскости через координаты его вершин.

**Занятие 21. Аналитическая геометрия – часть 3 (2 часа)**

1. Угол наклона и угловой коэффициент, уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, общее уравнение прямой на плоскости.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (каноническое уравнение прямой).
5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.
7. Параметрические уравнения прямой.

**Занятие 22. Аналитическая геометрия – часть 4 (2 часа)**

1. Угол наклона и угловой коэффициент, уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, общее уравнение прямой на плоскости.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (каноническое уравнение прямой).

5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.

7. Параметрические уравнения прямой.

**Занятие 23. Аналитическая геометрия – часть 5 (2 часа)**

1. Угол наклона и угловой коэффициент, уравнение прямой с угловым коэффициентом.

2. Угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, общее уравнение прямой на плоскости.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (каноническое уравнение прямой).

5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.

7. Параметрические уравнения прямой.

**Занятие 24. Аналитическая геометрия – часть 6 (2 часа)**

1. Точка пересечения двух прямых. Взаимное расположение двух прямых.

2. Уравнение прямой «в отрезках».

3. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в терминах коэффициентов общих уравнений прямых и в терминах угловых коэффициентов прямых.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельно заданной прямой.

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно заданной прямой.

6. Отклонение и расстояние от точки до прямой.

7. Нормальное уравнение прямой.

**Занятие 25. Аналитическая геометрия – часть7 (2 часа)**

1. Точка пересечения двух прямых. Взаимное расположение двух прямых.

2. Уравнение прямой «в отрезках».

3. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в терминах коэффициентов общих уравнений прямых и в терминах угловых коэффициентов прямых.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельно заданной прямой.

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно заданной прямой.

6. Отклонение и расстояние от точки до прямой.

7. Нормальное уравнение прямой.

**Занятие 26. Аналитическая геометрия – часть 8 (2 часа)**

1. Точка пересечения двух прямых. Взаимное расположение двух прямых.

2. Уравнение прямой «в отрезках».

3. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в терминах коэффициентов общих уравнений прямых и в терминах угловых коэффициентов прямых.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельно заданной прямой.

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно заданной прямой.

6. Отклонение и расстояние от точки до прямой.

7. Нормальное уравнение прямой.

**Занятие 27. Аналитическая геометрия – часть 9 (2 часа)**

1. Точка пересечения двух прямых. Взаимное расположение двух прямых.

2. Уравнение прямой «в отрезках».

3. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в терминах коэффициентов общих уравнений прямых и в терминах угловых коэффициентов прямых.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельно заданной прямой.

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно заданной прямой.

6. Отклонение и расстояние от точки до прямой.

7. Нормальное уравнение прямой.

## МОДУЛЬ 2. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 2 (54 часа)

### Занятие 28. Аналитическая геометрия – часть 10 (2 часа)

1. Уравнения смещённой и несмещённой окружности (каноническое уравнение окружности).

2. Уравнения смещённого и несмещённого эллипса (каноническое уравнение эллипса).

3. Фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, эксцентриситет и директрисы эллипса.

### Занятие 29. Аналитическая геометрия – часть 11 (2 часа)

1. Уравнения смещённой и несмещённой окружности (каноническое уравнение окружности).

2. Уравнения смещённого и несмещённого эллипса (каноническое уравнение эллипса).

3. Фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, эксцентриситет и директрисы эллипса.

**Занятие 30. Аналитическая геометрия – часть 12 (2 часа)**

1. Уравнения смещённой и несмещённой гиперболы (каноническое уравнение гиперболы).

2. Фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, эксцентриситет и директрисы гиперболы.

**Занятие 31. Аналитическая геометрия – часть 13 (2 часа)**

1. Уравнения смещённой и несмещённой гиперболы (каноническое уравнение гиперболы).

2. Фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, эксцентриситет и директрисы гиперболы.

**Занятие 32. Аналитическая геометрия – часть 14 (2 часа)**

1. Уравнения смещённой и несмещённой параболы (каноническое уравнение параболы).

2. Фокус, фокальный радиус, фокальный параметр, директриса, характеристическое свойство, «оптическое» («прожекторное» или «телескопическое») свойство параболы.

**Занятие 33. Аналитическая геометрия – часть 15 (2 часа)**

3. Уравнения смещённой и несмещённой параболы (каноническое уравнение параболы).

4. Фокус, фокальный радиус, фокальный параметр, директриса, характеристическое свойство, «оптическое» («прожекторное» или «телескопическое») свойство параболы.

**Занятие 34. Аналитическая геометрия – часть 16 (2 часа)**

1. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

**Занятие 35. Аналитическая геометрия – часть 17 (2 часа)**

1. Параметрические уравнения окружности.

2. Параметрические уравнения эллипса.

3. Параметрические уравнения циклоиды.

**Занятие 36. Аналитическая геометрия – часть 18 (2 часа)**

1. Преобразование декартовых прямоугольных координат: параллельный перенос и поворот координатных осей.

**Занятие 37. Векторная алгебра – часть 5 (2 часа)**

1. Векторное произведение двух векторов.
2. Основные свойства векторного произведения.
3. Векторное произведение в координатной форме.
4. Двойное векторное произведение (правило «БАЦ-ЦАБ»).

**Занятие 38. Векторная алгебра – часть 6 (2 часа)**

1. Векторное произведение двух векторов.
2. Основные свойства векторного произведения.
3. Векторное произведение в координатной форме.
4. Двойное векторное произведение (правило «БАЦ-ЦАБ»).

**Занятие 39. Векторная алгебра – часть 7 (2 часа)**

1. Смешанное (скалярно-векторное) произведение трёх векторов.
2. Геометрический смысл смешанного произведения.
3. Смешанное произведение в координатной форме.

**Занятие 40. Векторная алгебра – часть 8 (2 часа)**

1. Смешанное (скалярно-векторное) произведение трёх векторов.
2. Геометрический смысл смешанного произведения.
3. Смешанное произведение в координатной форме.

**Занятие 41. Линейная алгебра (часть 15): элементы алгебры комплексных чисел – часть 1 (2 часа)**

1. Алгебраическая форма комплексного числа.
2. Геометрическое изображение комплексных чисел.
3. Арифметические действия над комплексными числами.
4. Возведение в степень комплексных чисел.
5. Извлечение квадратного корня из комплексного числа.

**Занятие 42. Линейная алгебра (часть 16): элементы алгебры комплексных чисел – часть 2 (2 часа)**

1. Алгебраическая форма комплексного числа.

2. Геометрическое изображение комплексных чисел.

3. Арифметические действия над комплексными числами.

4. Возведение в степень комплексных чисел.

5. Извлечение квадратного корня из комплексного числа.

**Занятие 43. Линейная алгебра (часть 17): элементы алгебры комплексных чисел – часть 3 (2 часа)**

1. Модуль и аргумент комплексного числа.

2. Тригонометрическая форма комплексного числа.

3. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера.

4. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (произведение и частное от деления двух комплексных чисел, возведение в $n$-ую степень комплексного числа: формула Муавра, извлечение корня степени $n$ из комплексного числа).

**Занятие 44. Линейная алгебра (часть 18): элементы алгебры комплексных чисел – часть 4 (2 часа)**

1. Модуль и аргумент комплексного числа.

2. Тригонометрическая форма комплексного числа.

3. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера.

4. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (произведение и частное от деления двух комплексных чисел, возведение в $n$-ую степень комплексного числа: формула Муавра, извлечение корня степени $n$ из комплексного числа).

**Занятие 45. Линейная алгебра (часть 19): алгебра линейных пространств – часть 1 (2 часа)**

1. Линейная зависимость и независимость векторов.

2. Базис векторного пространства, разложение $n$-мерного вектора по базису, дополнение до базиса.

3. Переход к новому базису: матрица перехода к новому базису, свойства матрицы и перехода.

**Занятие 46. Линейная алгебра (часть 20): алгебра линейных пространств – часть 2 (2 часа)**

1. Линейная зависимость и независимость векторов.

2. Базис векторного пространства, разложение $n$-мерного вектора по базису, дополнение до базиса.

3. Переход к новому базису: матрица перехода к новому базису, свойства матрицы и перехода.

**Занятие 47. Линейная алгебра (часть 21): алгебра линейных пространств – часть 3 (2 часа)**

1. Евклидовы пространства: скалярное произведение двух $n$-мерных векторов, длина (норма) $n$-мерного вектора, угол между двумя ненулевыми $n$-мерными векторами, свойства длины (нормы) вектора.

2. Евклидовы пространства: ортонормированная система векторов, независимость ортонормированной системы векторов, существование ортонормированного базиса – метод ортогонализации Шмидта.

3. Ортогональное дополнение и его свойства.

**Занятие 48. Линейная алгебра (часть 22): алгебра линейных пространств – часть 4 (2 часа)**

1. Евклидовы пространства: скалярное произведение двух $n$-мерных векторов, длина (норма) $n$-мерного вектора, угол между двумя ненулевыми $n$-мерными векторами, свойства длины (нормы) вектора.

2. Евклидовы пространства: ортонормированная система векторов, независимость ортонормированной системы векторов, существование ортонормированного базиса – метод ортогонализации Шмидта.

3. Ортогональное дополнение и его свойства.

**Занятие 49. Линейная алгебра (часть 23): линейные отображения – часть 1 (2 часа)**

1. Линейные отображения; образ, ранг, ядро и дефект отображения; теорема об образе и ядре отображения; теорема об отображении базиса.

2. Линейные операторы, свойства линейных операторов, структура линейного оператора, матрица линейного оператора.

3. Теорема о связи матриц оператора в разных базисах.

4. Теорема об определителе оператора в разных базисах.

**Занятие 50. Линейная алгебра (часть 24): линейные отображения – часть 2 (2 часа)**

1. Линейные отображения; образ, ранг, ядро и дефект отображения; теорема об образе и ядре отображения; теорема об отображении базиса.

2. Линейные операторы, свойства линейных операторов, структура линейного оператора, матрица линейного оператора.

3. Теорема о связи матриц оператора в разных базисах.

4. Теорема об определителе оператора в разных базисах.

**Занятие 51. Линейная алгебра (часть 25): линейные отображения – часть 3 (2 часа)**

1. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: собственные векторы и собственные значения, характеристическое уравнение оператора, характеристические или собственные числа оператора, спектр оператора.

2. Теорема о независимости собственных векторов.

**Занятие 52. Линейная алгебра (часть 26): линейные отображения – часть 4 (2 часа)**

1. Симметричный оператор, теорема об условии симметричности оператора.

2. Теорема об ортогональности собственных векторов.

**Занятие 53. Линейная алгебра (часть 27): линейные отображения – часть 5 (2 часа)**

1. Квадратичные формы.

2. Теорема о связи между квадратичной формой и оператором.

3. Теорема о привидении квадратичной формы к каноническому виду.

4. Свойства канонических форм.

**Занятие 54. Линейная алгебра (часть 28): линейные отображения – часть 6 (2 часа)**

1. Положительно (отрицательно) определённое и неотрицательно (неположительно) определённые формы, угловые и главные миноры.

2. Теорема об определении знака формы по собственным числам.

## III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Методы и модели прикладной математики» представлено в Приложении 1 и включает в себя:

план-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине, в том числе примерные нормы времени на выполнение по каждому заданию;

характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению;

требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы;

критерии оценки выполнения самостоятельной работы.

## IV. КОНТРОЛЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ КУРСА

Контролируемые разделы дисциплины, этапы формирования компетенций, виды оценочных средств, зачетно-экзаменационные материалы, комплекты оценочных средств для текущей аттестации, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, а также критерии и показатели, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, представлены в Приложении 2.

# V. СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

## Основная литература
*(электронные и печатные издания)*

1. Ильин В.А. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебник для вузов/ Ильин В.А., Позняк Э.Г.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.— 277 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/25698.

2. Ильин В.А. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебник для вузов/ Ильин В.А., Позняк Э.Г.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.— 222 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/25716.

3. Скрыдлова Е.В. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Скрыдлова Е.В., Белова О.О.— Электрон. текстовые данные.— Калининград: Российский государственный университет им. Иммануила Канта, 2010.— 151 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23814.

4. Беклемишева, Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.А. Беклемишева, Д.В. Беклемишев, А.Ю. Петрович (и др.). — Изд. 3-е испр. — СПб. : Лань, 2008. — 496 с.

## Дополнительная литература
*(печатные и электронные издания)*

1. Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник. — Электрон. дан. — СПб. : Лань,

2009. — 512 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=493

2. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 445 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=58162

3. Беклемишев, Д.В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2014. — 190 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59632

4. Кадомцев, С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2011. — 167 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2187

5. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии [Электронный ресурс]/ Ефимов Н.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.— 239 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/33384.

**Перечень дополнительных информационно-методических материалов**

1. Малугин В.А. Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата. – Электрон. дан. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Рид Групп, 2011. – 464 с. – (В рамках проекта «Национальное экономическое образование»).

2. Кремер Н.Ш., Фридман М.Н. Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата. – Электрон. дан. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во Юрайт, 2015. – 308 с. – (Серия: «Бакалавр. Академический курс»).

3. Антонов В.И., Лагунова М.В., Лобкова Н.И. и др. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: учебное пособие. – Электрон. дан. – М.: Проспект, 2015. – 144 с.

4. Шипачёв В.С. Курс высшей математики: учебник для вузов/Под ред. Академика А.Н. Тихонова. – Электрон. дан. – 4-е изд., испр. – М.: Изд-во Оникс, 2009. – 608 с.

5. Сборник задач по математике для вузов (в 4-х частях) – Ч.1 – Линейная алгебра и основы математического анализа/Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – Электрон. дан. – 3-е изд. испр. и доп. – СПб: Изд-во «Лань», 2011. – 464 с.

6. Кострикин А.И. Введение в алгебру.. – 2-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – («Классический университетский учебник»).

7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – 4-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2012.

8. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 3-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010.

9. Боревич З.И. Определители и матрицы. – 3-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2013.

10. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – 5-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011.

11. Калачев Н.В. Линейная алгебра. Ч.1. Линейные и евклидовы пространства / Под ред. В.В. Гисина и С.В. Пчелинцева. – М.: Финакадемия, 2009.

12. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высш. Шк., 208.

13. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах. – 3-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010.

## VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

### Рекомендации по планированию и организации времени, отведенного на изучение дисциплины, описание последовательности действий обучающихся

Освоение дисциплины следует начинать с изучения рабочей учебной программы, которая содержит основные требования к знаниям, умениям и навыкам. Обязательно следует учитывать рекомендации преподавателя, данные в ходе установочных занятий. Затем – приступать к изучению отдельных разделов и тем в порядке, предусмотренном программой.

Получив представление об основном содержании раздела, темы, необходимо изучить материал с помощью рекомендуемой основной литературы. Целесообразно составить краткий конспект или схему, отображающую смысл и связи основных понятий данного раздела и включенных в него тем. Обязательно следует записывать возникшие вопросы, на которые не удалось ответить самостоятельно.

Подготовку к началу обучения включает несколько необходимых пунктов:

1) Необходимо создать для себя рациональный и эмоционально достаточный уровень мотивации к последовательному и планомерному изучению дисциплины.

2) Необходимо изучить список рекомендованной основной и дополнительной литературы и убедиться в её наличии у себя дома или в библиотеке в бумажном или электронном виде.

3) Необходимо иметь «под рукой» специальные и универсальные словари, справочники и энциклопедии, для того, чтобы постоянно уточнять значения используемых терминов и понятий. Пользование словарями и справочниками необходимо сделать привычкой. Опыт показывает, что неудовлетворительное усвоение предмета зачастую коренится в неточном,

смутном или неправильном понимании и употреблении понятийного аппарата учебной дисциплины.

4) Желательно в самом начале периода обучения возможно тщательнее спланировать время, отводимое на работу с источниками и литературой по дисциплине, представить этот план в наглядной форме (график работы с датами) и в дальнейшем его придерживаться, не допуская срывов графика индивидуальной работы и «аврала» в предсессионный период. Пренебрежение этим пунктом приводит к переутомлению и резкому снижению качества усвоения учебного материала.

**Рекомендации по работе с литературой**

1) Всю учебную литературу желательно изучать «под конспект». Чтение литературы, не сопровождаемое конспектированием, даже пусть самым кратким – бесполезная работа. Цель написания конспекта по дисциплине – сформировать навыки по поиску, отбору, анализу и формулированию учебного материала. Эти навыки обязательны для любого специалиста с высшим образованием независимо от выбранной специальности.

2) Написание конспекта должно быть творческим – нужно не переписывать текст из источников, но пытаться кратко излагать своими словами содержание ответа, при этом максимально структурируя конспект, используя символы и условные обозначения. Копирование и «заучивание» неосмысленного текста трудоемко и по большому счету не имеет большой познавательной и практической ценности.

3) При написании конспекта используется тетрадь, поля в которой обязательны. Страницы нумеруются, каждый новый вопрос начинается с нового листа, для каждого экзаменационного вопроса отводится 1-2 страницы конспекта. На полях размещается вся вспомогательная информация – ссылки, вопросы, условные обозначения и т.д.

4) В итоге данной работы «идеальным» является полный конспект по программе дисциплины, с выделенными определениями, узловыми пунктами, примерами, неясными моментами, проставленными на полях вопросами.

5) При работе над конспектом обязательно выявляются и отмечаются трудные для самостоятельного изучения вопросы, с которыми уместно обратиться к преподавателю при посещении установочных лекций и консультаций, либо в индивидуальном порядке.

6) При чтении учебной и научной литературы всегда следить за точным и полным пониманием значения терминов и содержания понятий, используемых в тексте. Всегда следует уточнять значения по словарям или энциклопедиям, при необходимости записывать.

7) При написании учебного конспекта обязательно указывать все прорабатываемые источники, автор, название, дата и место издания, с указанием использованных страниц.

## Подготовка к промежуточной аттестации по дисциплине: экзамену (зачету)

К аттестации допускаются студенты, которые систематически в течение всего семестра посещали и работали на занятиях и показали уверенные знания в ходе выполнении практических заданий и лабораторных работ.

Непосредственная подготовка к аттестации осуществляется по вопросам, представленным в рабочей учебной программе. Тщательно изучите формулировку каждого вопроса, вникните в его суть, составьте план ответа. Обычно план включает в себя:

— определение сущности рассматриваемого вопроса, основных положений, утверждений, определение необходимости их доказательства;

— запись обозначений, формул, необходимых для полного раскрытия вопроса;

— графический материал (таблицы, рисунки, графики), необходимые для раскрытия сущности вопроса;

— роль и значение рассматриваемого материала для практической деятельности, примеры использования в практической деятельности.

## VII. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине необходима аудитория для проведения лекционных и практических занятий.

**Приложение 1**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Дальневосточный федеральный университет»**
(ДВФУ)

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

**по дисциплине «Методы и модели прикладной математики»**
**Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика**
профиль «Математические методы в экономике»
**Форма подготовки очная**

**Владивосток**
**2015**

**План-график выполнения самостоятельной работы по дисциплине**

**МОДУЛЬ 1. МиМПМ (ЛААГ) – часть 1**

| № п/п | Дата/сроки выполнения | Вид самостоятельной работы | Примерные нормы времени на выполнение | Форма контроля |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 неделя | Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций. | 6 часов | Собеседование |
| 2 | 6 неделя | Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях. | 3 часа | Проект |
| 3 | 10 неделя | Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций. | 6 часов | Собеседование |
| 4 | 12 неделя | Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях. | 3 часа | Проект |
| 5 | 16 неделя | Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной | 6 часов | Собеседование |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций. | | |
| 6 | 18 неделя | Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях. | 3 часа | Проект |

## МОДУЛЬ 2. МиМПМ (ЛААГ) – часть 1

| № п/п | Дата/сроки выполнения | Вид самостоятельной работы | Примерные нормы времени на выполнение | Форма контроля |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 22 неделя | Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций. | 6 часов | Собеседование |
| 2 | 24 неделя | Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях. | 3 часа | Проект |
| 3 | 28 неделя | Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций. | 6 часов | Собеседование |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 30 неделя | Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях. | 3 часа | Проект |
| 5 | 34 неделя | Повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам лекций. | 6 часов | Собеседование |
| 6 | 36 неделя | Самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях. | 3 часа | Проект |

## Характеристика заданий для самостоятельной работы обучающихся и методические рекомендации по их выполнению

По основным темам предусмотрена самостоятельная работа студентов как в теоретической (проработка лекционного материала с использованием предложенного списка литературы по курсу), так и в практической частях курса (решение домашних заданий с использованием примеров и конкретных ситуаций, рассматриваемых на лекциях, а также с использованием учебных пособий из предложенного списка литературы по курсу). Результаты освоения разделов курса оцениваются на основании самостоятельного решения домашних работ с итоговым контрольным мероприятием в виде экзамена.

На самостоятельное изучение вынесены отдельные темы курса. Эти темы изучаются самостоятельно, используя учебную литературу, приведенную в списке литературы.

Примеры решения задач повышенной сложности, предназначенных для самостоятельной работы студентов:

**Задача 1.** Найти вектор $\vec{c}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\vec{a} = 7\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, если $|\vec{c}| = 5\sqrt{6}$.

**Решение:**

Имеем для биссектрисы:

$$\left(\vec{c}, \widehat{\ } \ \overrightarrow{a_0}\right) = \left(\vec{c}, \widehat{\ } \ \overrightarrow{b_0}\right) \qquad (1)$$

$$\left(\vec{c}, \widehat{\ } \ \vec{a}\right) = \left(\vec{c}, \widehat{\ } \ \vec{b}\right), \qquad (1')$$

где $\overrightarrow{a_0}$ и $\overrightarrow{b_0}$ $-$ орты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, определяемые по формулам:

$$\overrightarrow{a_0} = \vec{a} \,/\, |\vec{a}| \text{ и } \overrightarrow{b_0} = \vec{b} \,/\, \left|\vec{b}\right| . \qquad (2)$$

Тогда

$$\text{пр}_{\overrightarrow{a_0}}\vec{c} = cos\left(\vec{c}, \widehat{\ } \ \overrightarrow{a_0}\right), \qquad (3а)$$

$$\text{пр}_{\overrightarrow{b_0}}\vec{c} = cos\left(\vec{c}, \widehat{\ } \ \overrightarrow{b_0}\right). \qquad (3в)$$

В силу (1) имеем из (3а) и (3в):

$$\text{пр}_{\overrightarrow{a_0}}\vec{c} = \text{пр}_{\overrightarrow{b_0}}\vec{c} \equiv \delta, \tag{4}$$

Поэтому

$$\vec{c} = \mu\left(\text{пр}_{\overrightarrow{a_0}}\vec{c}\right)\overrightarrow{a_0} + \mu\left(\text{пр}_{\overrightarrow{b_0}}\vec{c}\right)\overrightarrow{b_0} = \lambda\left(\overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{b_0}\right),$$

т.е.

$$\vec{c} = \lambda\left(\overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{b_0}\right). \tag{5}$$

Из условия задачи

$$\vec{a} = 7\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 4\vec{k} = (7, -4, -4) \tag{6а}$$

и

$$\vec{b} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k} = (-2, -1, 2). \tag{6в}$$

Поэтому

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{81} = 9\ , \tag{7а}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3\ . \tag{7в}$$

Следовательно:

$$\overrightarrow{a_0} = \vec{a}/|\vec{a}| = (7/9\,, -4/9\,, -4/9), \tag{8а}$$

$$\overrightarrow{b_0} = \vec{b}/\left|\vec{b}\right| = (-2/3\,, -1/3,\ 2/3)\ . \tag{8в}$$

Подставляя (8а) и (8в) в (5), получаем:

$$\vec{c} = \lambda[(7/9\,, -4/9\,, -4/9) + (-2/3\,, -1/3,\ 2/3)] = \\ = (\lambda/9\,, -7\lambda/9\,, 2\lambda/9). \tag{9}$$

Из (9) и условия задачи имеем:

$$5\sqrt{6} = \vec{c} = \sqrt{(\lambda/9)^2 + (-7\lambda/9)^2 + (2\lambda/9)^2}\ ,$$

т.е.

$$\frac{\sqrt{6}}{3}\lambda = 5\sqrt{6}\ ,$$

или

$$\lambda = 15\ . \tag{10}$$

Наконец, подставляя (10) в (9), получаем окончательно

$$\vec{c} = \frac{5}{3}(1, -7, 2) = \frac{5}{3}(\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 2\vec{k})\ .$$

**Задача 2.** Даны вершины треугольника A(1, -1, -3), B(2, 1, -2) и C(-5, 2, -6) . Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине $A$.

**Решение:**

Найдем разложение вектора биссектрисы $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ по базису векторов $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ .

Пусть $\vec{\mathrm{e}}_1 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}/|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ и $\vec{\mathrm{e}}_2 = \overrightarrow{\mathrm{AC}}/|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ − орты векторов $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ . Тогда вектор $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ сонаправлен с вектором $\vec{\mathrm{e}} = \vec{\mathrm{e}}_1 + \vec{\mathrm{e}}_2$ (сравните с выражением с выражением (5) из задачи 1), т.е. существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \lambda\vec{\mathrm{e}} = \lambda\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}/|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + \overrightarrow{\mathrm{AC}}/|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\right). \tag{1}$$

С другой стороны (по правилу «замыкания») имеем:

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \mu\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \mu\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-\mu)\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \mu > 0. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) представляют собой два разложения вектора $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ по базису из векторов $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ . В силу единственности разложения вектора по базису имеем:

$$\lambda/|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \mu \quad \text{и} \quad \lambda/|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 1-\mu \;. \tag{3}$$

Решая систему уравнений (3), находим:

$$\lambda = \left(1/|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + 1/|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\right)^{-1} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|/(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|)\,, \tag{4}$$

так что формула (1) принимает вид:

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,. \tag{5}$$

Из условий задачи находим:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,2,1) \;\text{ и }\; |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{6}\,, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-6,3,-3) \;\text{ и }\; |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 3\sqrt{6}\,,$$

и на основании (5) получаем:

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,,$$

откуда

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (-\tfrac{3}{4},\tfrac{9}{4},0) \;\text{ и }\; |\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = \frac{3}{4}\sqrt{10}\,.$$

**Задача 3.**

В базисе $\mathfrak{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ написать матрицу оператора проектирования $\mathbf{P}_\alpha$ на плоскость α: $x + y + z = 0$.

**Решение:**

Оператор проектирования на плоскость α определяется (из теории) равенством $\mathbf{P}_\alpha\vec{x} = \vec{x}_\alpha$, где $\vec{x}_\alpha -$ ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на плоскость α. Имеем (по теории):

$$\mathbf{P}_\alpha\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_n = \vec{x} - \text{пр}_n\vec{x} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{x} - \frac{(\vec{n},\vec{x})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\,, \qquad (1)$$

где $\vec{n} -$ нормальный вектор плоскости α . В рассматриваемом случае $\vec{n} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}_\alpha\vec{\imath} = \vec{\imath} - \tfrac{1}{3}\vec{n} = \tfrac{2}{3}\vec{\imath} - \tfrac{1}{3}\vec{\jmath} - \tfrac{1}{3}\vec{k}\,,$$

$$\mathbf{P}_\alpha\vec{\jmath} = \vec{\jmath} - \tfrac{1}{3}\vec{n} = -\tfrac{1}{3}\vec{\imath} + \tfrac{2}{3}\vec{\jmath} - \tfrac{1}{3}\vec{k}\,,$$

$$\mathbf{P}_\alpha\vec{k} = \vec{k} - \tfrac{1}{3}\vec{n} = -\tfrac{1}{3}\vec{\imath} - \tfrac{1}{3}\vec{\jmath} + \tfrac{2}{3}\vec{k}\,,$$

откуда

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

**Задача 4.** Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{P}_{0xy}$ проектирования на плоскость 0xy в пространстве $V_3$.

**1. Геометрическое решение:**

Равенство $\mathbf{P}_{0xy}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , $\vec{x} \neq \vec{0}$ , означает, что ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на плоскость *0xy* коллинеарна самому вектору $\vec{x}$ . Но это возможно лишь в двух случаях.

а) Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ компланарен плоскости *0xy* . Для всех таких векторов $\mathbf{P}_{0xy}\vec{x} = \vec{x}$ , т.е. все они являются собственными векторами оператора $\mathbf{P}_{0xy}$ , соответствующими собственному числу $\lambda_1 = 1$ .

б) Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ ортогонален плоскости *0xy* . Для всех таких векторов $\mathbf{P}_{0xy}\vec{x} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{x}$ , т.е. все они являются собственными векторами оператора $\mathbf{P}_{0xy}$ , соответствующими собственному числу $\lambda_2 = 0$ .

В итоге заключаем, что оператор $\mathbf{P}_{0xy}$ имеет два собственных числа: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$ . Соответствующие им собственные векторы:

$\lambda_1 = 1 :\ \vec{\mathrm{x}}^{(\lambda_1)} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\ ,\ \ \vec{\mathrm{x}}^{(\lambda_1)} \neq \vec{0}\ ,$

$\lambda_2 = 0 :\ \vec{\mathrm{x}}^{(\lambda_2)} = z\vec{k}\ , \qquad \vec{\mathrm{x}}^{(\lambda_2)} \neq \vec{0}\ .$

**2. Аналитическое решение:**

Матрица оператора $\mathbf{P}_{0xy}$ в прямоугольном базисе $\mathfrak{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ имеет вид:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(P - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0\ , \qquad (*)$$

откуда $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$ – собственные числа оператора.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 1$ . Как известно, матричное представление векторного равенства (на собственные векторы и собственные значения)

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad (1)$$

Принимает в конечномерном пространстве $V_3$ следующий вид:

$$(A - \lambda E)X = 0\ \ ,\ X \neq 0\ . \qquad (2)$$

Тогда при $\lambda = 1$ система (2) принимает с учетом $(*)$ вид:

$$(P - E)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений (фундаментальный набор решений):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0,0)^T,\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,1,0)^T\ ,$$

а общее решение:

$$xE_1 + xE_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = (x,y,0)^T\ .$$

Отсюда заключаем, что собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 1$ , имеет вид:

$$\vec{x}^{(\lambda_1)} = x\vec{i} + y\vec{j} ,$$

где x и y – произвольные числа, не равные одновременно нулю.

Аналогично рассматривается случай $\lambda_2 = 0$ . При этом получим

$$\vec{x}^{(\lambda_2)} = z\vec{k},$$

где z – произвольное число, отличное от нуля.

## Требования к представлению и оформлению результатов самостоятельной работы

Самостоятельная работа включает в себя повторение теоретического и практического материала дисциплины, заслушиваемого и конспектируемого в ходе аудиторных занятий; изучение основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей учебной программе дисциплины, самоконтроль ответов на основные проблемные вопросы по темам занятий; самостоятельный разбор заданий и задач, решаемых на практических занятиях; самостоятельный повтор действий, осуществляемых в ходе выполнения лабораторных работ, в том числе при работе со специальным программным обеспечением.

Результаты самостоятельной работы представляются и оформляются в виде ответов на основные положения теоретического и практического материала дисциплины по темам; письменного разбора процесса решения практических заданий и задач; собственных действий, осуществляемых в ходе выполнения лабораторных работ.

В случае подготовки слайдов для защиты проекта, они должны быть контрастными (рекомендуется черный цвет шрифта на светлом фоне), кегль текста слайдов – не менее 22pt, заголовков – 32pt. Основная цель использования слайдов - служить вспомогательным инструментом к подготовленному выступлению, цитирование больших фрагментов текста на слайдах не допускается. Приветствуется использование рисунков, графиков, таблиц, интерактивного материала, однако, следует предусмотреть выбор цвета и толщину линий.

Слайды должны содержать титульный лист, цели и задачи (не более 2-х слайдов с обзором актуальности, новизны, теоретической и практической значимости работы), основные публикации с их кратким обзором (1-2 слайда), формальную постановку задачи и формулировку моделей (1-2 слайда), краткое тезисное (!) изложение ключевых положений работы (разумное количество слайдов с учетом общего времени выступления), заключение (с изложением результатов работы, подведением выводов, обсуждением практического использования работы, возможностей проведения дальнейших исследований и разработок в данной области).

Как правило, 12-15 слайдов оказывается достаточным для полного представления работы.

**Критерии оценки выполнения самостоятельной работы**

Общие критерии оценки выполнения самостоятельной работы – правильность ответов на вопросы по темам теоретической части дисциплины, верность получаемых ответов в ходе решения практических заданий и задач.

Оценивание знаний в форме собеседования проводится по критериям:

- логичность изложения, знание и понимание основных аспектов и дискуссионных проблем по теме;
- владение методами и приемами анализа теоретических и/или практических аспектов по теме.

Оценивание знаний в форме проекта проводится по критериям:

- завершенность и полнота выполненных заданий в рамках проекта;
- владение методами и приемами решения конкретных задач;
- качество оформления письменного отчета в соответствии с правилами и стандартами оформления.

**Приложение 2**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Дальневосточный федеральный университет»**
(ДВФУ)

**ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

# ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**по дисциплине «Методы и модели прикладной математики»**
**Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика**
профиль «Математические методы в экономике»
**Форма подготовки очная**

**Владивосток**
**2015**

**Паспорт**
**фонда оценочных средств**
**по дисциплине «Методы и модели прикладной математики»**

| **Код и формулировка компетенции** | **Этапы формирования компетенции** | |
|---|---|---|
| ПК-9 - способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат | Знает | базовые понятия и основные технические приемы матричной алгебры, аналитической геометрии, теории линейных пространств (над вещественным и комплексным полями) и их отображений, спектральной теории |
| | Умеет | решать широкого класса задачи из различных разделов курса, поисковой и творческой деятельности при решении задач повышенной сложности и нетиповых задач |
| | Владеет | стандартными методами алгебры комплексных чисел и операционного исчисления и их применением к решению прикладных задач |
| ПК-12 - способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук | Знает | основы линейной алгебры и аналитической геометрии, необходимые для успешного изучения математических дисциплин, решения экономических задач |
| | Умеет | применять методы линейной алгебры и аналитической геометрии для решения математических задач, для построения и анализа моделей в экономике |
| | Владеет | навыками применения современного математического инструментария для решения задач экономики; методикой построения, анализа и применения математических моделей в экономике |

**МОДУЛЬ 1**. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 1.

| № п/п | Контролируемые разделы дисциплины | Коды и этапы формирования компетенций | | Оценочные средства - наименование | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | текущий контроль | промежуточная аттестация |
| 1 | Элементы линейной алгебры – элементы матричной алгебры: матрицы и определители | ПК-9 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 1-18 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 1-18 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 1-18 |
| | | ПК-12 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 1-18 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 1-18 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 1-18 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | Элементы линейной алгебры – элементы матричной алгебры: системы линейных алгебраических уравнений | ПК-9 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 19-27 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 19-28 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 19-28 |
| | | ПК-12 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 19-27 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 19-28 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 19-28 |
| 3 | Элементы аналитической геометрии: элементы аналитической геометрии на прямой, плоскости и в пространстве, элементы векторной алгебры | ПК-9 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 28-40 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 29-37 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 29-37 |
| | | ПК-12 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 28-40 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 29-37 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 29-37 |
| 4 | Элементы аналитической геометрии: элементы аналитической геометрии на плоскости | ПК-9 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 21-54 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 38-56 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 38-56 |
| | | ПК-12 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 21-54 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 38-56 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 38-56 |

**МОДУЛЬ 2**. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 2.

| № п/п | Контролируемые разделы дисциплины | Коды и этапы формирования компетенций | | Оценочные средства - наименование | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | текущий контроль | промежуточная аттестация |
| 1 | Элементы аналитической геометрии: элементы аналитической геометрии на плоскости | ПК-9 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 55-66 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 1-12 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 1-12 |
| | | ПК-12 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 55-66 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 1-12 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 1-12 |
| 2 | Элементы аналитической геометрии: элементы аналитической геометрии в пространстве и элементы векторной алгебры | ПК-9 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 67-72 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 13-19 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 13-19 |
| | | ПК-12 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 67-72 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 13-19 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 13-19 |
| 3 | Элементы линейной алгебры – элементы алгебры комплексных чисел | ПК-9 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 73-82 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 20-28 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 20-28 |
| | | ПК-12 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 73-82 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 20-28 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 20-28 |
| 4 | Элементы линейной алгебры – алгебра линейных пространств и линейные отображения | ПК-9 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 83-108 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 29-48 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 29-48 |
| | | ПК-12 | Знает | Собеседование (УО-1) | Экзамен, вопросы 83-108 |
| | | | Умеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 29-48 |
| | | | Владеет | Проект (ПР-9) | Экзамен, проект 29-48 |

**Зачетно-экзаменационные материалы**

**Вопросы для подготовки к экзамену**
по дисциплине «**Методы и модели прикладной математики**»

**МОДУЛЬ 1**. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 1.

1. Основные определения и сведения о матрицах. Виды матриц.
2. Линейные операции (действия) над матрицами (сложение и вычитание матриц одинаковых размеров, умножение числа на матрицу, теорема 1 (о линейных операциях над матрицами)).
3. Умножение (произведение) матриц: согласование матриц, умножение матрицы на матрицу, теорема 2 (о свойствах умножения матриц).
4. Возведение квадратной матрицы в целую положительную степень. Многочлены от матриц.
5. Транспонирование матрицы: определение транспонированной матрицы, теорема 3 (о свойствах транспонированной матрицы). Комплексные матрицы.
6. Определители 1-го и 2-го порядков, определитель 3-го порядка: правило Саррюса, минор, алгебраическое дополнение.
7. Теорема 7 (о величине определителя квадратной матрицы) – теорема Лапла́са.
8. Свойства определителей: свойства 1-9, свойство 10 (свойство замещения), свойство 11 (свойство аннулирования), свойство 12 (об определителе произведения квадратных матриц).
9. Невырожденная и вырожденная матрицы. Определение обратной матрицы. Теорема 8 (о существовании обратной матрицы), метод присоединенной матрицы.
10. Свойства обратных матриц (свойства 1-5).

11. Типы матриц элементарных преобразований. Элементарные преобразования матрицы: теорема 9 (об умножении матрицы на матрицы элементарных преобразований).

12. Способ построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований (метод Жорда́на).

13. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.

14. Определение ранга матрицы. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

15. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях: теорема 10 (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях).

16. Линейные комбинации строк или столбцов: теорема 6' (о линейной комбинации строк (столбцов) матрицы).

17. Теорема 11 (о связи ранга матрицы с числом независимых строк (столбцов) данной матрицы).

18. Теорема 12 (о представлении строки матрицы в виде линейной комбинации независимых строк данной матрицы).

19. Общие понятия СЛАУ. Нахождение единственного решения СЛАУ с помощью метода обратной матрицы.

20. Нахождение единственного решения СЛАУ с помощью метода Крамера: теорема 13 – теорема Крамера (о решении СЛАУ с помощью определителей).

21. Равносильность (эквивалентность) СЛАУ при элементарных преобразованиях: теорема 14 (о равносильности СЛАУ при элементарных преобразованиях).

22. Метод Га́усса (метод последовательных исключений Жордана-Гаусса).

23. Теорема 15 (о совместности СЛАУ) – теорема Кроне́кера-Капелли. Схема решений СЛАУ.

24. Основные (базисные) и неосновные (свободные) переменные. Базисное решение неоднородной СЛАУ. Свойства однородной СЛАУ.

25. Понятие фундаментальных решений. Теорема 16 (о фундаментальных решениях однородной СЛАУ).

26. Фундаментальный набор решений (ФНР), число фундаментальных наборов решений.

27. Теорема 17 (об общем решении неоднородной СЛАУ с помощью ФНР.

28. Ось, числовая ось, система координат на прямой. Основное тождество. Геометрическое изображение вещественных чисел.

29. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.

30. Скалярные и векторные величины. Определение вектора. Длина (модуль) вектора. Определения коллинеарных и компланарных векторов. Орт вектора.

31. Линейные операции над векторами (сложение векторов: правило треугольника или правило «замыкания» линейной цепочки векторов, правило параллелограмма; вычитание векторов, умножение вектора на действительное число).

32. Свойства линейных операций над векторами (свойства 1-8).

33. Теорема 18 (о проекции вектора на ось).

34. Теорема 19 (о проекции суммы двух векторов на ось).

35. теорема 20 (о проекции на ось произведения вектора на число).

36. Проекции вектора на оси координат: теорема 21 (о координатах вектора).

37. «Координатные» следствия теорем 19 и 20. Условие коллинеарности двух векторов в координатах.

38. Разложение вектора по базису: ортогональный базис, теорема 22 (о разложении вектора по ортогональному базису).

39. Скалярное произведение векторов: определение и основные свойства (5 свойств) скалярного произведения.

40. Теорема 23 (о скалярном произведении в координатной форме).

41. Определение линии на плоскости и её уравнение. Классификация кривых на плоскости (кривые 1-го и 2-го порядков).

42. Общий вид кривых первого порядка. Прямая линия. Угол наклона и угловой коэффициент. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

43. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

44. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Обще уравнение прямой на плоскости.

45. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (каноническое уравнение прямой).

46. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

47. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.

48. Параметрические уравнения прямой.

49. Точки пересечения двух прямых. Взаимное расположение двух прямых.

50. Уравнение прямой в «отрезках».

51. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в терминах коэффициентов общих уравнений прямых и в терминах угловых коэффициентов прямых.

52. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельно заданной прямой.

53. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно заданной прямой.

54. Расстояние от точки до прямой: первый (прямой) вывод. Нормальное уравнение прямой. Отклонение и расстояние от точки до прямой: второй вывод.

## **МОДУЛЬ 2**. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 2

55. Общий вид кривых второго порядка. Общее уравнение окружности и его частные виды: уравнение смещённой окружности и уравнение несмещённой окружности (каноническое уравнение окружности).

56. График квадратного трёхчлена.

57. Каноническое уравнение центральной кривой 2-го порядка – эллипса (определение, фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, уравнение, эксцентриситет). Уравнение смещённого эллипса.

58. Каноническое уравнение центральной кривой 2-го порядка – гиперболы (определение, фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, уравнение, эксцентриситет). Уравнение смещённой гиперболы.

59. Каноническое уравнение центральной кривой 2-го порядка – параболы (определение, фокус, фокальный радиус, фокальный параметр, директриса, характеристическое свойство, уравнение, «оптическое» («прожекторное» или «телескопическое») свойство). Уравнение смещённой параболы.

60. Определение директрисы эллипса. Теорема 27 (о фокальном радиусе, директрисе и эксцентриситете эллипса).

61. Определение директрисы гиперболы. Теорема 28 (о фокальном радиусе, директрисе и эксцентриситете гиперболы).

62. Эллипс, гипербола и парабола в терминах конических сечений. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

63. Две основные задачи аналитической геометрии на плоскости. Параметрическое уравнение окружности.

64. Параметрические уравнения эллипса (эллипс как деформированная окружность). Пересечение двух кривых.

65. Параметрические уравнения циклоиды.

66. Преобразование декартовых прямоугольных координат: параллельный перенос и поворот координатных осей.

67. Векторное произведение двух векторов: определение и основные свойства (6 свойств) векторного произведения.

68. Теорема 29 (о векторном произведении в координатной форме).

69. Двойное векторное произведение: теорема 30 (о правиле «БАЦ-ЦАБ»).

70. Теорема 31 (о тождестве Якóби).

71. Определение смешанного (скалярно-векторного) произведения трёх векторов. Теорема 32 (о геометрическом смысле смешанного произведения) и два следствия из этой теоремы 32.

72. Теорема 33 (о смешанном произведении в координатной форме) и три следствия из этой теоремы.

73. Упорядоченные пары действительных чисел и операции над ними.

74. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.

75. Геометрическое изображение комплексных чисел.

76. Арифметические действия над комплексными числами. Возведение в степень комплексного числа.

77. Извлечение квадратного корня из комплексного числа.

78. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.

79. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера.

80. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (произведение и частное от деления двух комплексных чисел).

81. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (возведение в $n$–ую степень). Формула Муавра.

82. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (извлечение корня степени $n$ из комплексного

числа).

83. Понятие линейного векторного пространства, вектор в $n$-мерном пространстве, линейная зависимость и независимость векторов, свойства линейной зависимости векторов.

84. Размерность и базис векторного пространства, теорема 34 (о разложении $n$-мерного вектора по базису).

85. Теорема 35 (о дополнении до базиса).

86. Переход к новому базису: матрица перехода к новому базису, свойства матрицы перехода.

87. Понятие линейного подпространства, сумма и пересечение линейных подпространств, свойства суммы и пересечения линейных подпространств.

88. Понятие линейной оболочки, свойства линейной оболочки.

89. Понятие евклидова пространства, скалярное произведение двух $n$-мерных векторов, длина (норма) $n$-мерного вектора и угол между двумя ненулевыми $n$-мерными векторами в евклидовом пространстве.

90. Свойства длины (нормы) вектора (свойства 1-4, причём свойство 3 – неравенство Коши́-Буняко́вского и свойство 4 – неравенство треугольника или неравенство Минко́вского – с доказательствами).

91. Ортонормированная система векторов, теорема 36 (о независимости ортонормированной системы векторов).

92. Теорема 37 (о существовании ортонормированного базиса) – метод ортогонализации Шмидта.

93. Понятие ортогонального дополнения, два свойства ортогонального дополнения (с доказательствами). Ортогональные проекция и составляющая вектора.

94. Общие сведения о линейных отображениях: понятие отображения; образ, ранг, ядро и дефект отображения.

95. Теорема 38 (об образе и ядре отображения).

96. Теорема 39 (об отображении базиса).

97. Линейные операторы: понятие линейного оператора, свойства линейных операторов, структура линейного оператора, матрица линейного оператора.

98. Теорема 40 (о связи матриц оператора в разных базисах).

99. Теорема 41 (об определителе оператора в разных базисах).

100. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: собственные векторы и собственные значения, характеристическое уравнение оператора, характеристические или собственные числа оператора, спектр оператора.

101. Теорема 42 (о независимости собственных векторов).

102. Симметричный оператор: понятие симметричного оператора, теорема 43 (об условии симметричности оператора).

103. Теорема 44 (об ортогональности собственных векторов).

104. Квадратичные формы: понятие квадратичной формы, теорема 45 (о связи между квадратичной формой и оператором).

105. Теорема 46 (о приведении квадратичной формы к каноническому виду).

106. Свойства канонических форм, положительно (отрицательно) определенная и неотрицательно (неположительно) определенная формы, угловые и главные миноры.

107. Теорема 47 (об определении знака формы по собственным числам).

108. Критерий Сильве́стра: теорема 48 (об определении знака формы по угловым минорам).

**Комплекты оценочных средств для текущей аттестации**

**Вопросы для собеседования**
по дисциплине «**Методы и модели прикладной математики**»

**МОДУЛЬ 1**. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 1

1. Определение арифметического пространства. Линейная комбинация строк со скалярными коэффициентами. Линейно зависимые и линейно независимые строки.
2. Теорема 4 (о линейной зависимости строк при одной нулевой строке).
3. Теорема 5 (о линейной зависимости строк при линейной зависимости части этих строк).
4. Теорема 6 (о строке как линейной комбинации остальных линейно зависимых строк).
5. 1-я простейшая задача аналитической геометрии: расстояние между двумя точками в пространстве, на плоскости и на прямой – теорема 24 (о расстоянии между двумя точками).
6. Длина (модуль) вектора в координатах вектора (в «больших» координатах) и в координатах концевой и начальной точек вектора (в «малых» координатах).
7. Угол между двумя ненулевыми векторами в «больших» координатах.
8. Направляющие косинусы вектора. Генезис основного тригонометрического тождества.
9. 2-я простейшая задача аналитической геометрии: деление отрезка в данном отношении – теорема 25 (о делении отрезка в данном отношении).
10. Площадь треугольника как 3-я простейшая задача аналитической

геометрии на плоскости – теорема 26 (о площади треугольника на плоскости через координаты его вершин).

11. Полярные координаты. Полярная система координат.

12. Цилиндрические координаты. Цилиндрическая система координат.

13. Сферические координаты. Сферическая система координат.

14. Географическая система координат как особый частный случай сферической системы координат на сфере конечного радиуса. Географические координаты.

## **МОДУЛЬ 2**. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 2

15. Определение поверхности в пространстве и её уравнение. Определение кривой (линии) в пространстве и её уравнения. Уравнение плоскости (поверхности 1-го порядка): общее уравнение плоскости.

16. Угол между двумя плоскостями и условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Условие совпадения двух плоскостей.

17. Нормальный вектор плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

18. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.

19. Уравнения прямой в пространстве: общие уравнения прямой; канонические уравнения прямой; параметрические уравнения прямой.

20. Угол между двумя прямыми в пространстве и условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

21. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

22. Взаимное расположение прямой и плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности. Угол между прямой и плоскостью.

23. Уравнение цилиндрической поверхности: определение цилиндрической поверхности, образующие и направляющая для цилиндрической поверхности.

24. Уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров.

25. Эллипсоид (определение, уравнение и свойства).

26. Однополосный гиперболоид (определение, уравнение и свойства).

27. Двуполосный гиперболоид (определение, уравнение и свойства).

28. Эллиптический параболоид (определение, уравнение и свойства).

29. Гиперболический параболоид (определение, уравнение и свойства).

30. Конус второго порядка (определение, уравнение и свойства).

Критерии оценки:

- ✓ 100-86 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.

- ✓ 85-76 - баллов - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.

- ✓ 75-61 - балл – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определенно и последовательно изложить ответ.

- ✓ 60-50 баллов – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

**Темы проектов**

по дисциплине «**Методы и модели прикладной математики»**

**МОДУЛЬ 1**. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 1.

1. Линейные операции над матрицами.
2. Умножение матрицы на матрицу.
3. Возведение квадратной матрицы в целую положительную степень.
4. Многочлены от матриц.
5. Транспонирование матрицы.
6. Определитель 2-го порядка и его вычисление.
7. Определитель 3-го порядка и его вычисление (правило Са́ррюса – правило «треугольников»).
8. Минор и алгебраическое дополнение.
9. Свойства определителей.
10. Определитель $n$-го порядка и его вычисление (теорема Лапла́сса).
11. Обратная матрица и её вычисление методом присоединённой матрицы.
12. Свойства обратных матриц.
13. Элементарные преобразования матрицы.
14. Способ построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований (метод Жордо́на).
15. Решение матричных уравнений.
16. Ранг матрицы и его нахождение методом окаймляющих миноров.
17. Ранг матрицы и его вычисление методом элементарных преобразований.
18. Линейные комбинации строк и столбцов: линейная зависимость и линейная независимость строк или столбцов матрицы.

19. «Квадратная» неоднородная СЛАУ и нахождение её единственного решения: а) методом обратной матрицы; б) методом Кра́мера (с помощью определителей).

20. Равносильность (эквивалентность) «квадратных» и «прямоугольных» однородных и неоднородных СЛАУ при элементарных преобразованиях.

21. Метод Га́усса (метод последовательных исключений Жордана-Гаусса).

22. Теорема Кроне́кера-Капе́лли.

23. Схема решений СЛАУ.

24. Основные (базисные) и неосновные (свободные) переменные.

25. Базисное решение неоднородной СЛАУ.

26. Однородная СЛАУ и её свойства.

27. Фундаментальные решения однородной СЛАУ, её фундаментальный набор решений (ФНР).

28. Обще решение неоднородной СЛАУ через её базисное решение и через ФНР соответствующей ей однородной СЛАУ.

29. Линейные операции над векторами, правило треугольника или правило «замыкания» линейной цепочки векторов, правило параллелограмма.

30. Коллинеарность векторов, орт вектора.

31. Свойства линейных операций над векторами.

32. Проекция вектора на ось, проекция суммы нескольких векторов на ось, проекция на ось произведения вектора на число.

33. Проекции вектора на оси координат: координаты («большие» координаты) вектора и их нахождение через координаты («малые» координаты) концевой и начальной точек вектора, условие коллинеарности двух векторов в координатах.

34. Разложение вектора по ортогональному базису.

35. Скалярное произведение векторов.

36. Основные свойства скалярного произведения.

37. Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

38. Расстояние между двумя точками в пространстве, на плоскости и на прямой, длина (модуль) вектора в координатах вектора (в «больших» координатах) и в координатах концевой и начальной точек вектора (в «малых» координатах).

39. Угол между векторами в «больших» координатах.

40. Направляющие косинусы вектора.

41. Деление отрезка в данном отношении.

42. Площадь треугольника на плоскости через координаты его вершин.

43. Угол наклона и угловой коэффициент, уравнение прямой с угловым коэффициентом.

44. Угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

45. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, общее уравнение прямой на плоскости.

46. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (каноническое уравнение прямой).

47. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

48. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.

49. Параметрические уравнения прямой.

50. Точка пересечения двух прямых. Взаимное расположение двух прямых.

51. Уравнение прямой «в отрезках».

52. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в терминах коэффициентов общих уравнений прямых и в терминах угловых коэффициентов прямых.

53. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельно заданной прямой.

54. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно заданной прямой.

55. Отклонение и расстояние от точки до прямой.

56. Нормальное уравнение прямой.

## **МОДУЛЬ 2**. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ) – часть 2

1. Уравнения смещённой и несмещённой окружности (каноническое уравнение окружности).
2. Уравнения смещённого и несмещённого эллипса (каноническое уравнение эллипса).
3. Фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, эксцентриситет и директрисы эллипса.
4. Уравнения смещённой и несмещённой гиперболы (каноническое уравнение гиперболы).
5. Фокусы, фокальные радиусы, характеристическое свойство, эксцентриситет и директрисы гиперболы.
6. Уравнения смещённой и несмещённой параболы (каноническое уравнение параболы).
7. Фокус, фокальный радиус, фокальный параметр, директриса, характеристическое свойство, «оптическое» («прожекторное» или «телескопическое») свойство параболы.
8. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.
9. Параметрические уравнения окружности.
10. Параметрические уравнения эллипса.
11. Параметрические уравнения циклоиды.
12. Преобразование декартовых прямоугольных координат: параллельный перенос и поворот координатных осей.

13. Векторное произведение двух векторов.
14. Основные свойства векторного произведения.
15. Векторное произведение в координатной форме.
16. Двойное векторное произведение (правило «БАЦ-ЦАБ»).
17. Смешанное (скалярно-векторное) произведение трёх векторов.
18. Геометрический смысл смешанного произведения.
19. Смешанное произведение в координатной форме.
20. Алгебраическая форма комплексного числа.
21. Геометрическое изображение комплексных чисел.
22. Арифметические действия над комплексными числами.
23. Возведение в степень комплексных чисел.
24. Извлечение квадратного корня из комплексного числа.
25. Модуль и аргумент комплексного числа.
26. Тригонометрическая форма комплексного числа.
27. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера.
28. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме (произведение и частное от деления двух комплексных чисел, возведение в $n$-ую степень комплексного числа: формула Муавра, извлечение корня степени $n$ из комплексного числа).
29. Линейная зависимость и независимость векторов.
30. Базис векторного пространства, разложение $n$-мерного вектора по базису, дополнение до базиса.
31. Переход к новому базису: матрица перехода к новому базису, свойства матрицы и перехода.
32. Евклидовы пространства: скалярное произведение двух $n$-мерных векторов, длина (норма) $n$-мерного вектора, угол между двумя ненулевыми $n$-мерными векторами, свойства длины (нормы) вектора.
33. Евклидовы пространства: ортонормированная система векторов, независимость ортонормированной системы векторов, существование ортонормированного базиса – метод ортогонализации Шмидта.

34. Ортогональное дополнение и его свойства.

35. Линейные отображения; образ, ранг, ядро и дефект отображения; теорема об образе и ядре отображения; теорема об отображении базиса.

36. Линейные операторы, свойства линейных операторов, структура линейного оператора, матрица линейного оператора.

37. Теорема о связи матриц оператора в разных базисах.

38. Теорема об определителе оператора в разных базисах.

39. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: собственные векторы и собственные значения, характеристическое уравнение оператора, характеристические или собственные числа оператора, спектр оператора.

40. Теорема о независимости собственных векторов.

41. Симметричный оператор, теорема об условии симметричности оператора.

42. Теорема об ортогональности собственных векторов.

43. Квадратичные формы.

44. Теорема о связи между квадратичной формой и оператором.

45. Теорема о привидении квадратичной формы к каноническому виду.

46. Свойства канонических форм.

47. Положительно (отрицательно) определённое и неотрицательно (неположительно) определённые формы, угловые и главные миноры.

48. Теорема об определении знака формы по собственным числам.

Критерии оценки:

- ✓ 100-86 баллов выставляется, если студент/группа точно определили содержание и составляющие части задания, умеют аргументированно отвечать на вопросы, связанные с заданием. Продемонстрировано знание и владение навыками самостоятельной исследовательской работы по теме. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.

✓ 85-76 - баллов - работа студента/группы характеризуется смысловой цельностью, связностью и последовательностью изложения; допущено не более 1 ошибки при объяснении смысла или содержания проблемы. Продемонстрированы исследовательские умения и навыки. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.

✓ 75-61 балл – проведен достаточно самостоятельный анализ основных этапов и смысловых составляющих проблемы; понимание базовых основ и теоретического обоснования выбранной темы. Привлечены основные источники по рассматриваемой теме. Допущено не более 2 ошибок в смысле или содержании проблемы

✓ 60-50 баллов - если работа представляет собой пересказанный или полностью переписанный исходный текст без каких бы то ни было комментариев, анализа. Не раскрыта структура и теоретическая составляющая темы. Допущено три или более трех ошибок смыслового содержания раскрываемой проблемы.

## Описание показателей и критериев оценивания компетенций, шкал оценивания

### Критерии оценки собеседования

- ✓ 100-86 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.
- ✓ 85-76 - баллов - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.
- ✓ 75-61 - балл – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определенно и последовательно изложить ответ.
- ✓ 60-50 баллов – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

### Критерии оценки проектов

- ✓ 100-86 баллов выставляется, если студент/группа точно определили содержание и составляющие части задания, умеют аргументированно отвечать на вопросы, связанные с заданием. Продемонстрировано знание и владение навыками самостоятельной исследовательской работы по теме. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.
- ✓ 85-76 - баллов - работа студента/группы характеризуется смысловой цельностью, связностью и последовательностью изложения; допущено не

более 1 ошибки при объяснении смысла или содержания проблемы. Продемонстрированы исследовательские умения и навыки. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет.

- ✓ 75-61 балл – проведен достаточно самостоятельный анализ основных этапов и смысловых составляющих проблемы; понимание базовых основ и теоретического обоснования выбранной темы. Привлечены основные источники по рассматриваемой теме. Допущено не более 2 ошибок в смысле или содержании проблемы
- ✓ 60-50 баллов - если работа представляет собой пересказанный или полностью переписанный исходный текст без каких бы то ни было комментариев, анализа. Не раскрыта структура и теоретическая составляющая темы. Допущено три или более трех ошибок смыслового содержание раскрываемой проблемы

**Шкала оценивания**

| | | |
|---|---|---|
| Менее 60 баллов | незачтено | неудовлетворительно |
| От 61 до 75 баллов | зачтено | удовлетворительно |
| От 76 до 85 баллов | зачтено | хорошо |
| От 86 до 100 балов | зачтено | отлично |

## Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

**Текущая аттестация студентов**. Текущая аттестация студентов по дисциплине «Методы и модели прикладной математики» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине «Методы и модели прикладной математики» проводится в форме собеседования и защиты проекта и осуществляется ведущим преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

– степень усвоения теоретических знаний - оценивается в форме собеседования;

– уровень овладения практическими умениями и навыками – оценивается в форме защиты проекта.

**Промежуточная аттестация студентов.** Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Методы и модели прикладной математики» проводится в соответствии с локальными нормативными актами ДВФУ и является обязательной.

По дисциплине предусмотрен экзамен, который проводится в устной форме и с использованием защиты проекта.

### Критерии выставления оценки студенту на экзамене по дисциплине «Методы и модели прикладной математики»

| **Баллы** (рейтинговой оценки) | **Оценка зачета/ экзамена** (стандартная) | **Требования к сформированным компетенциям** |
|---|---|---|
| 86-100 | *«зачтено»/ «отлично»* | Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач. |

| | | |
|---|---|---|
| 76-85 | *«зачтено»/ «хорошо»* | Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения. |
| 61-75 | *«зачтено»/ «удовлетвори тельно»* | Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ. |
| 0-60 | *«не зачтено»/ «неудовлетво рительно»* | Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине. |